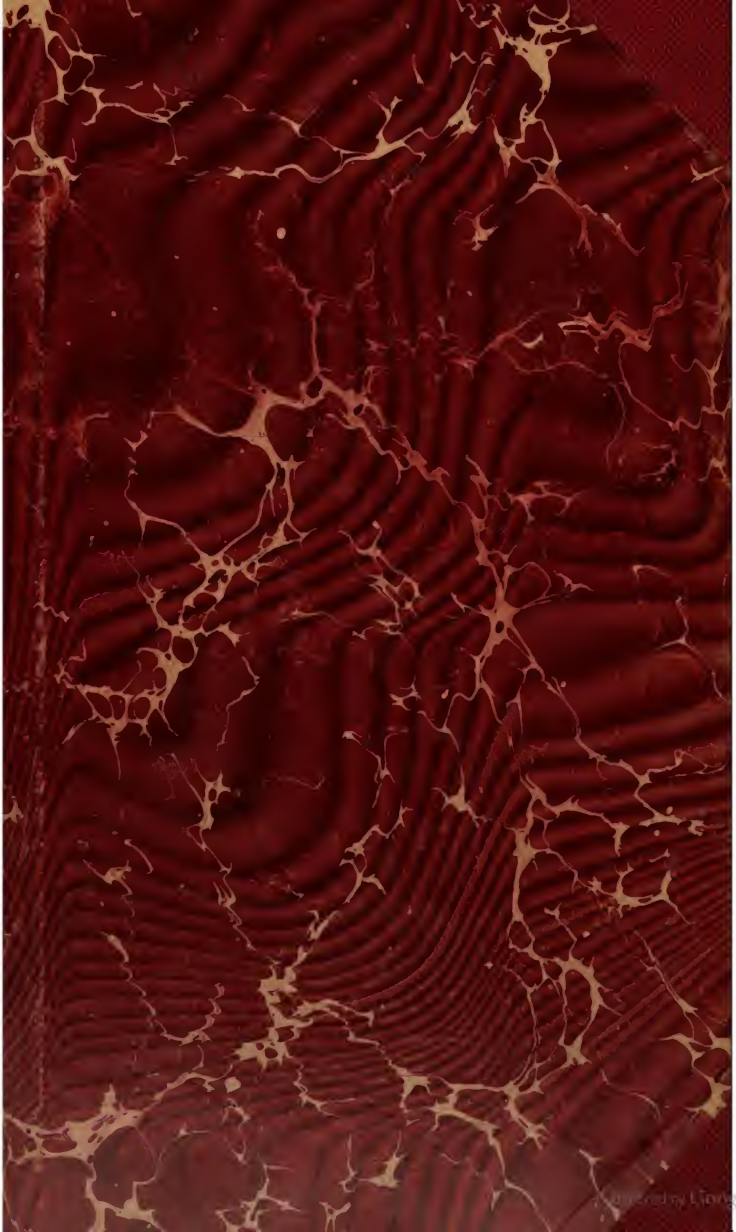

Digitized by Google

SAC
6632

HARVARD UNIVERSITY.

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

11,914

Exchange

September 27, 1907.

Digitized by Google

ABHANDLUNGEN

ELFTER BAND.

Digitized by Google

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

ELFTER BAND.

MIT FÜNF TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1865.

Digitized by Google

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

SIEBENTER BAND.

MIT FÜNF TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1865.

Digitized by Google

INHALT.

P. A. Hansen, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Zweite Abhandlung . . . . . S. 1

G. Mettenius, über die Hymenophyllaceae . . . . . - 401

P. A. Hansen, Relationen einestheils zwischen Summen und Differenzen und anderntheils zwischen Integralen und Differentialen . . . . . - 505

W. G. Hankel, Elektrische Untersuchungen. Sechste Abhandlung: Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte, zweiter Theil . . . . . - 585

Digitized by Google

Indem die mathematisch-physische Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften den siebenten Band ihrer Abhandlungen der Oeffentlichkeit übergiebt, ist sie verpflichtet der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft, durch deren bereitwillige und reichliche Unterstützung ihr die Herausgabe dieses Bandes möglich geworden ist, von neuem ihren Dank auszusprechen.

Digitized by Google

SEP 27 1907

P. A. HANSEN
MITGLIED DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

DARLEGUNG
DER
THEORETISCHEN BERECHNUNG
DER IN DEN
MONDTAFELN
ANGEWANDTEN STÖRUNGEN.

ZWEITE ABHANDLUNG.

Aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Band VII.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1864

Digitized by Google

Libreria italiana ed inglese di ERMANNO LOESCHER TORINO Via Carlo Alberto, 5.

ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

ERSTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Erster Band. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. broch. Preis 4 Thlr. 16 Ngr.

A. F. MÖBIUS, über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. 24 Ngr.

P. A. HANSEN, allgemeine Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. 12 Ngr.

A. SEEBECK, über die Querschwingungen elastischer Stäbe. 10 Ngr.

C. F. NAUMANN, über die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. 10 Ngr.

W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 1 Thlr.

F. REICH, neue Versuche mit der Drehwaage. 20 Ngr.

M. W. DROBISCH, Zusätze zum florentiner Problem. 16 Ngr.

W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus.) 20 Ngr.

ZWEITER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Erster Band. Mit einer Karte. hoch 4. 1850. broch. Preis 6 Thlr.

A. WESTERMANN, Untersuchungen über die in die attischen Redner eingelegten Urkunden. 2 Abhandlungen. 1 Thlr.

F. A. UKERT, über Dämonen, Heroen und Genien. 24 Ngr.

TH. MOMMSEN, über das römische Münzwesen. 1 Thlr. 20 Ngr.

E. v. WIETERSHEIM, der Feldzug des Germanicus an der Weser. 1 Thlr.

G. HARTENSTEIN, Darstellung der Rechtsphilosophie des Hugo Grotius. 20 Ngr.

TH. MOMMSEN, über den Chronographen vom Jahre 354. Mit einem Anhange über die Quellen der Chronik des Hieronymus. 1 Thlr. 10 Ngr.

DRITTER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Zweiter Band. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1857. broch. Preis 7 Thlr. 10 Ngr.

W. ROSCHER, zur Geschichte der Englischen Volkswirthschaftslehre im sechzehnten und siebzehnten Jahrhundert 1851. 1 Thlr.

——— Nachträge. 1852. 8 Ngr.

J. G. DROYSEN, Eberhard Windeck. 1853. 24 Ngr.

TH. MOMMSEN, Polemii Silvii Intercalus. 1853. 16 Ngr.

——— Volusii Maeciani distributio partium. 1853. 6 Ngr.

J. G. DROYSEN, zwei Verzeichnisse, Kaiser Karls V. Lande, seine und seiner Grossen Einkünfte und anderes betreffend. 1854. 20 Ngr.

TH. MOMMSEN, die Stadtrechte der latinischen Gemeinden Salpensa und Malaca in der Provinz Baetica. 1855. 1 Thlr.

——— Nachträge. 1855. 16 Ngr.

FRIEDRICH ZARNCKE, Die urkundlichen Quellen zur Geschichte der Universität Leipzig in den ersten 150 Jahren ihres Bestehens. 1857. 3 Thlr.

VIERTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Zweiter Band. Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. br. Preis 6 Thlr. 20 Ngr.

M. W. DROBISCH, über musikalische Tonbestimmung und Temperatur. 1852. 1 Thlr.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Mit 18 Tafeln. 1852. 1 Thlr. 10 Ngr.

P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 1 Thlr.

——— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2+r'^2-2rr'(\cos U\cos U'+\sin U\sin U'\cos J)$. 1854. 1 Thlr.

O. SCHLÖMILCH, über die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 8 Ngr.

——— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. 16 Ngr.

P. A. HANSEN, die Theorie des Aequatoreals. 1855. 24 Ngr.

C. F. NAUMANN, über die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 10 Ngr.

A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. 1855 20 Ngr.

FÜNFTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe Dritter Band. Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. br. Preis 6 Thlr. 12 Ngr.

M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 12 Ngr

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 1856. 1 Thlr. 20 Ngr

R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. 1856. 16 Ngr.

Digitized by Google

...907

DARLEGUNG

DER

THEORETISCHEN BERECHNUNG

DER IN DEN

MONDTAFELN

ANGEWANDTEN STÖRUNGEN.

VON

P. A. HANSEN.

ZWEITE ABHANDLUNG.

Des VII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° I.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1864.

Digitized by Google

Vom Verfasser übergeben den 12. December 1863.
Der Abdruck vollendet den 16. Juli 1864.

Digitized by Google

DARLEGUNG

DER THEORETISCHEN BERECHNUNG

DER IN DEN

MONDTAFELN

ANGEWANDTEN STÖRUNGEN.

VON

P. A. HANSEN.

ZWEITE ABHANDLUNG.

Digitized by Google

In der vorhergehenden Abhandlung habe ich gezeigt, wie ich die Mondstörungen, die den Abtheilungen 1, 2, 11, 15 angehören, berechnet habe, hier werde ich die Berechnung der übrigen von der Sonne herrührenden Störungen darlegen, und die genaue Berechnung der von der Abplattung der Erde entstehenden zeigen, die in der vorhergehenden Abhandlung nur vorläufig ausgeführt wurde. Endlich zeige ich auch die Berechnung der in den Mondtafeln aufgenommenen Säcularänderungen des Mondes.

Das Verfahren, welches ich hier anwende, ist mit einer Ausnahme wieder das der successiven Substitutionen, mit der Abänderung jedoch, dass ich es nicht auf die Differentialgleichungen der Bewegung selbst, sondern auf die in Bezug auf die Störungen entwickelte Variation derselben anwende. Die Berechnung der Störungen wird dadurch einfacher, indem man einen grossen Theil der Glieder, aus welchen die Störungscoefficienten bestehen, direct, mit anderen Worten ohne successive Näherungen erhält. Die Ausnahme, deren ich erwähnte, betrifft die von der Abplattung der Erde bewirkten Störungen, die ich nicht durch successive Näherungen, sondern durch die Verbindung der Methode der unbestimmten Coefficienten mit der Variation der Differentialgleichungen berechne. Dass ich einen Theil der Mondstörungen durch dieses Verfahren berechnet habe, habe ich schon im Jahre 1847 im XXV. Bande von Schum. Astr. Nachr. angezeigt. Auf diese Weise habe ich unter andern auch die in den Mondtafeln aufgenommenen Säcularänderungen berechnet, hier wende ich jedoch für diese die Methode der successiven Substitutionen an, und zwar aus dem Grunde, um zu zeigen, wie nahe die durch beide sehr verschiedene Verfahrungsarten erhaltenen Resultate mit einander übereinstimmen. Man weiss ausserdem, dass ich bei der Berechnung der Säcularänderungen von der An-

Digitized by Google

nahme ausgegangen bin, dass das Element Ξ dazu nichts beitragen könne, und schon aus dem Grunde, dass die gegenwärtige Abhandlung nicht minder wie die vorhergehende zum Zweck haben zu zeigen, wie ich die Störungscoefficienten der Mondtafeln erhalten habe, musste ich die Annahme $\Xi=0$ in dieser Berechnung beibehalten, und eine etwaige weitere Untersuchung darüber einer besonderen Abhandlung vorbehalten. Für die Beibehaltung dieses Princips sprechen überdies mehrere Gründe, von welchen ich hier den hervorhebe, dass die dadurch erhaltenen Säcularänderungen sowohl die Finsternisse des Mittelalters wie die des Alterthums auf sehr befriedigende Weise darstellen, welches im Gegentheil die von Adams und Delaunay erhaltene Säcularänderung der mittleren Länge nicht vermag.

Wie die Säcularänderungen der Mondtafeln die chronologischen Finsternisse darstellen, ist schon von Airy im XXVI. Bande der *Memoirs of the Royal Astronomical Society* dargelegt worden, und ich habe an dieser Arbeit in so weit Theil, dass ich die darin vorkommenden, auf meine Mond- und Sonnentafeln gegründeten Rechnungen selbst ausgeführt habe, wie in der Abhandlung auch angeführt wird. Da ich in der neuen, total von der alten verschiedenen, Rechnung kleine Unterschiede im Resultat gefunden habe, wie sich in einer so complicirten Rechnung nicht anders erwarten liess, so schien es mir von Interesse zu erfahren, wie die chronologischen Sonnenfinsternisse sich nach der Anbringung dieser kleinen Unterschiede gestalten würden, und ich habe daher in einem Zusatze diese Vergleichung ausgeführt. Es zeigt sich, dass die Darstellung derselben noch ein wenig besser ausfällt, wie ohne diese Aenderungen. Da es ferner erlaubt ist, die Knotenbewegung ein wenig zu ändern, wenn diese Aenderung nur nicht so gross angenommen wird, dass sie die Darstellung der neueren Beobachtungen beeinträchtigt, so habe ich in einem zweiten Zusatze die Wirkung einer solchen Aenderung untersucht. Ich habe in der hundertjährigen Knotenbewegung eine Aenderung von 12″ angenommen, wodurch, wenn man die Knotenlänge der Gegenwart fest hält, die Mondbreiten für Bradley's Zeit sich höchstens um Eine Secunde ändern, und hiedurch eine noch bessere Darstellung der chronologischen Finsternisse erhalten. Endlich da Delaunay sich noch der Hoffnung hinzugeben scheint,*)

*) Cf. Conn. d. t. für 1864.

Digitized by Google

dass mit seiner Säcularänderung der mittleren Länge sich die chronologischen Sonnenfinsternisse auch darstellen lassen würden, so habe ich in einem dritten Zusatze die Vergleichung dieser Säcularänderung mit denselben Finsternissen möglichst scharf durchgeführt, aber eine gänzliche Nichtübereinstimmung zum Resultat erhalten. Die Sonnenfinsterniss von Larissa wird dort höchstens 7—8 Zolle, und trifft bei Sonnenuntergang ein, so dass von derselben nur ein kleiner Theil dort sichtbar bleibt, und in noch grösserem Maasse findet dasselbe für die Sonnenfinsterniss des Thales statt. Die Sonnenfinsterniss des Agathokles geht so weit nach Norden, dass ihre Wirkung auf dem Punkte, wo Agathokles sich während derselben befunden haben muss, gleichfalls unbedeutend ist. Die Sonnenfinsterniss des Ennius wird in Rom gänzlich unsichtbar, indem für die geographische Lage Roms die erste äussere Ränderberührung eine halbe Stunde nach Sonnenuntergang statt findet. Die Sonnenfinsterniss von Stiklastad entfernt sich sehr beträchtlich von der Gegend des Schlachtfeldes. Mit dieser Säcularänderung kann man die chronologischen Sonnenfinsternisse also nicht darstellen, und eben so wenig lässt sich dieses durch Hinzufügung von Aenderungen in der mittleren Bewegung der Länge oder des Perigäums oder der Knoten bewirken, da die Aenderungen zu diesem Zweck viel grösser ausfallen würden, wie die neueren Beobachtungen es gestatten. Nimmt man aber zugleich mit dieser Säcularänderung an, dass die Umdrehung der Erde um ihre Achse eine allmählige Verzögerung dergestalt erleidet, dass jeder Tag um den 51billionsten Theil seiner Dauer länger ist wie der nächst vorhergehende, dann kann man mit der in Rede stehenden Säcularänderung die chronologischen Sonnenfinsternisse darstellen, wie ich kürzlich in einem, den Berichten dieser Gesellschaft einverleibten, Aufsatze gezeigt habe.

In Bezug auf den eben angezogenen Aufsatz von Delaunay sehe ich mich auch genöthigt, noch ein Mal auf die Darstellung der Mondstörungen durch Reihen, die nach den Potenzen des Verhältnisses der mittleren Bewegung der Sonne zu der des Mondes fortschreiten, zurück zu kommen, da ich immer noch die von mir darüber ausgesprochenen Sätze aufrecht erhalten kann. Diese sind:

1) Es ist bis jetzt noch nicht bewiesen, dass diese Reihen convergiren.

2) Es ist bis jetzt noch kein Versuch zur Restbestimmung derselben

Digitized by Google

gemacht worden, welche erforderlich ist, um über die numerische Genauigkeit der Summe der entwickelten Glieder sich eine Vorstellung machen zu können.

3) Wenigstens eine Anzahl dieser Reihen sind divergirende Reihen. Diese Sätze muss ich deshalb noch aufrecht erhalten, weil sie weder in dem oben angezogenen Aufsatz von Delaunay, noch in irgend einer anderen mir zu Gesicht gekommenen Schrift widerlegt worden sind. In Bezug auf 3) habe ich schon in der Einleitung zu meiner vorhergehenden Abhandlung (S. 95 die Anmerkung) einige der Glieder genannt, deren Coefficienten bei den genannten Reihenentwickelungen divergirende Reihen bilden. Hier will ich näher auf diesen Umstand eingehen. In den Coefficienten der Argumente

$$ig + \omega - \omega'; \quad ig + 2(\omega - \omega'); \quad \text{etc.}$$

wo i eine beliebige ganze Zahl bedeutet, kommt von der Function $\omega - \omega'$ der Coefficient des mit der Zeit multiplicirten Theils derselben, nebst den Potenzen davon in den Nennern vor. Dieser Coefficient wird bei dem in Rede stehenden Verfahren gleichwie alle übrigen Coefficienten durch eine nach den Potenzen des eben genannten Verhältnisses, welches gewöhnlich mit m bezeichnet worden ist, fortschreitende Reihe dargestellt. Allenthalben, wo derselbe in einem Nenner vorkommt, werden die negativen Potenzen davon durch den binomischen Satz in Reihen aufgelöst, mit welchen der betreffende Zähler multiplicirt wird. Die Reihe des binomischen Satzes convergirt aber nur, wenn das zweite Glied des Binoms kleiner ist wie das erste, und wenn das Gegentheil davon statt findet, so divergirt sie. Nun ist aber in dem genannten Coefficienten des Ausdrucks von $\omega - \omega'$ die Summe der Glieder vom zweiten Gliede an gerechnet, die das zweite Glied des Binoms bildet, grösser wie das erste Glied, folglich divergirt die daraus hervorgehende Reihe, und folglich divergiren auch die auf diese Weise erhaltenen Ausdrücke der Coefficienten der oben angeführten Argumente.

Wenn man im Folgenden unter $\omega - \omega'$ blos den Coefficienten der Zeit im vollständigen Ausdruck dieser Function versteht, so ist

$$\omega - \omega' = n \left\{ \frac{3}{4} m^2 + \frac{225}{32} m^3 + \text{etc.} \right\}$$

wenn n die mittlere Bewegung der Mondlänge bezeichnet. Es ist, mit Worten ausgedrückt, dieser Coefficient der Ausdruck der Bewegung des Mondperigäums, da bei dieser Entwickelung die Bewegung des Son-

Digitized by Google

nenperigäums, die strenge genommen davon abgezogen werden müsste, für Null gerechnet wird. Um diesen Coefficienten für die Reihenentwickelung vorzubereiten, wird er wie folgt gestellt,

$$\omega - \omega' = \tfrac{3}{4} nm^2 \left\{ 1 + \tfrac{225}{24} m + \text{etc.} \right\}$$

und hieraus folgt

$$\frac{1}{\omega - \omega'} = \frac{1}{\frac{3}{4} nm^2} \left\{ 1 - \tfrac{225}{24} m + \text{etc.} \right\}$$

$$\frac{1}{(\omega - \omega')^2} = \frac{1}{(\frac{3}{4} nm^2)^2} \left\{ 1 - \tfrac{225}{12} m + \text{etc.} \right\}$$

u. s. w. Die numerischen Werthe dieser Glieder sind,

$$n = 17325593''$$

$$\omega - \omega' = 146435,''6$$

$$m = 0.07480133$$

und hiemit wird

$$\tfrac{3}{4} nm^2 = 72705,''6$$

$$\tfrac{225}{24} m + \text{etc.} = 1,0141$$

also

$$\frac{1}{\omega - \omega'} = \frac{1}{\frac{3}{4} nm^2} \left\{ 1 - 1,0141 + 1.0284 \mp \text{etc.} \right\}$$

$$\frac{1}{(\omega - \omega')^2} = \frac{1}{(\frac{3}{4} nm^2)^2} \left\{ 1 - 2,0282 + 3.0852 \mp \text{etc.} \right\}$$

u. s. w., welches offenbar divergirende Reihen sind.

Hiebei ist stillschweigend angenommen worden, dass die Reihe für $\omega - \omega'$ convergire, welches aber noch von Niemand bewiesen worden ist, sollte sie auch divergiren, so werden die Reihen für $(\omega - \omega')^{-1}$, $(\omega - \omega')^{-2}$, u. s. w., wenn die algebraischen Ausdrücke der Coefficienten in dieselben substituirt werden, um so mehr divergiren.

Es sind nun nicht blos die Coefficienten der oben angeführten Coefficienten, welche divergirende Reihen bilden, sondern dieses ist auch der Fall bei allen andern Störungscoefficienten, zu deren Entwickelung die Coefficienten der oben angeführten Argumente hinzugezogen werden müssen. Man kann nemlich keinen Coefficienten der Mondstörungen einzeln für sich entwickeln, sondern muss für die Entwickelung eines jeden derselben die übrigen mit anwenden. Strenge genommen hängt jeder einzelne Coefficient von allen übrigen ab, und hieraus folgt der Satz, dass wenn unter den nach den Potenzen von m entwik-

Digitized by Google

kelten Ausdrücken der Mondstörungen auch nur Einer erweislich divergirt, alle anderen auch divergiren müssen.

Dieser Satz ist strenge richtig, und da oben die Divergenz von einigen Reihen nachgewiesen ist, so müssen die Reihen für alle Coefficienten, wenn man die Entwickelungen bis zu hinreichend hohen Potenzen von m fortsetzt, divergiren. Es tritt nun freilich im Mondproblem dadurch eine Modification ein, dass auf jeden Coefficienten nicht alle übrigen merkliche Wirkung äussern, wenn man sie nach ihren wahren, auf andere Weise zu ermittelnden, Werthen betrachtet. Die Folge davon ist, dass die durch Reihen nach den Potenzen von m ausgedrückten Störungscoefficienten eine Art von halbconvergirenden Reihen bilden, nemlich Reihen, deren Summen, wenn man nur eine gewisse Anzahl der ersten Glieder derselben betrachtet, bestimmte endliche Werthe zu haben scheinen, in der That aber unendlich gross werden, wenn man ihre Entwickelung unbeschränkt fortsetzt, also Reihen, durch welche nur ein beschränkter Grad von Genauigkeit in den numerischen Werthen derselben erlangt werden kann Diese beschränkte Genauigkeit ist gewiss für jeden Coefficienten verschieden, die Ermittelung derselben aber eine sehr schwer zu lösende Aufgabe, die vielleicht *a priori* gar nicht durchgeführt werden kann. Es wird wohl um die Genauigkeit, die diese Reihen geben, kennen zu lernen, gar kein anderes Mittel übrig bleiben, wie die Vergleichung der numerischen Resultate derselben mit den Resultaten irgend einer anderen Methode, durch welche jede beliebige Genauigkeit erhalten werden kann. Aus diesen Gründen befindet sich aber das Verfahren, welches die Coefficienten der Mondstörungen durch Reihen, die nach den Potenzen von m fortschreiten, ausdrückt, gegen jedes andere, welches die Auflösung der Nenner in unendliche Reihen nicht verlangt, in bedeutendem Nachtheil.

Ehe ich diese Einleitung schliesse, habe ich noch eine Bemerkung zu machen. Erst nachdem die vorhergehende Abhandlung schon gedruckt war, bekam ich genaue Kenntniss von der unendlich grossen Mühe, die sich die Herren Lubbock und Pontécoulant in der neueren Zeit mit meinen den Mond betreffenden Arbeiten gegeben haben. Als Gegenleistung dafür könnte man wohl eine besondere Abhandlung erwarten, zumal mir Stoff genug dazu geliefert worden ist. Allein ich halte dieses für zu viel und ersuche statt dessen die genannten Herren,

Digitized by Google

den Inhalt der vorhergehenden Abhandlung sowohl wie den der gegenwärtigen als Gegenleistung für ihre Bemühungen betrachten zu wollen.

Die Eintheilung dieser Abhandlung, in welcher ich unmittelbar an die vorhergehende anknüpfe, ist die folgende:

§ 15. Entwickelung eines besonderen Princips, welches auf alle noch zu berechnenden Glieder der Mondstörungen angewandt werden kann.

Variation der Differentialgleichungen der Aufgabe. Art. 181—193.

§ 16. Berechnung der numerischen Werthe der im vor. § abgeleiteten Variationscoefficienten. Art. 194—216.

§ 17. Allgemeine Methode zur Berechnung der in der Mondbewegung vorhandenen Störungen sehr langer Periode.

Verbindung der Methode der unbestimmten Coefficienten mit der Variation der Differentialgleichungen. Art. 217—228.

§ 18. Berechnung der Mondstörungen, die den Abtheilungen 3, 4, 12, 13, 16, 17 angehören. Art. 229—243.

§ 19. Berechnung der Mondstörungen, die den Abtheilungen 6, 7, 14 angehören. Art. 244—258.

§ 20. Berechnung der Mondstörungen, die den Abtheilungen 8, 9, 10 angehören.

Berechnung der Erdmasse und der Sonnenparallaxe, die aus der Vergleichung der Mondstörungen mit den Beobachtungen folgt. Art. 259—270.

§ 21. Berechnung der von der Figur der Erde abhängigen Mondstörungen. Art. 271—297.

§ 22. Berechnung der Säcularänderungen des Mondes. Art. 298—318.

Zusatz I. Entwickelung der Wirkung, die die im vor. § erhaltenen Unterschiede der Säcularänderungen auf die Darstellung der chronologischen Finsternisse äussern. Art. 319.

Zusatz II. Ermittelung des Einflusses von 12″ Veränderung der hundertjährigen Knotenbewegung auf dieselben Finsternisse. Art. 320.

Digitized by Google

Zusatz III. Vergleichung der Säcularänderung der mittleren Mondlänge von Adams und Delaunay mit denselben Finsternissen. Art. 321.

§ 15. Entwickelung eines besonderen Princips, welches auf alle noch zu berechnenden Glieder der Mondstörungen angewandt werden kann.

Variation der Differentialgleichungen der Aufgabe.

181.

Für alle noch zu berechnenden Störungsglieder des Mondes werde ich ein anderes charakteristisches Zeichen einführen, und zwar Δ statt des bisher angewandten δ. Lässt man daher die Bezeichnung der im Vorhergehenden berechneten Störungen unverändert, so sind die Ausdrücke der vollständigen Störungen

$$n\partial z + n.\Delta z;\ v + \Delta v;\ \delta\frac{h_0}{h} + \Delta\frac{h_0}{h};\ \delta P + \Delta P;\ \delta Q + \Delta Q;\ \delta K + \Delta K$$

und behandelt man die veränderlichen Theile von y, α, η eben so, so werden

$$y + \Delta y;\ \alpha + \Delta\alpha;\ \eta + \Delta\eta$$

die Ausdrücke der vollständigen Werthe dieser Functionen. Die vollständigen Störungen der Sonnenbewegung werden nach diesem Princip mit

$$n'\Delta z';\ \Delta v';\ \Delta p';\ \Delta q'$$

zu bezeichnen sein. Alle Störungsglieder, deren Inbegriff hier unter dem Zeichen Δ zu verstehen sind, sind nicht grösser, als dass man mit der Berücksichtigung der ersten Potenz derselben ausreicht, wogegen aber ihre Producte mit denen, die unter dem Zeichen δ verstanden werden, nicht übergangen werden dürfen. Hieraus folgt, dass man jene als einen Zuwachs dieser betrachten kann, wovon die Berücksichtigung der ersten Potenz ausreicht. Man erhält daher die Ausdrücke für ihre Differentiale, wenn man die Variation der bisher angewandten Differentialgleichungen in Bezug auf die Störungen sucht, diese entwickelt und integrirt, womit man überdiess, wenn man es für dienlich hält, die

Digitized by Google

Methode der unbestimmten Coefficienten verbinden kann, die hier auf lauter linearische Bedingungsgleichungen führt.*)

182.

Es sollen jetzt alle im Vorhergehenden zur Berechnung der Störungen angewandten Gleichungen diesem Princip gemäss entwickelt, und mit der Function T angefangen werden. Da T Function von

$$nz,\ \nu,\ h,\ P,\ Q,\ K,\ n'z',\ \nu'$$

ist, so bekommen wir

$$\begin{aligned}\Delta T = &\left(\frac{dT}{ndz}\right) n.\Delta z + \left(\frac{dT}{d\nu}\right).\Delta\nu + \left(\frac{dT}{d\frac{h_0}{h}}\right).\Delta\frac{h_0}{h}\\ &+ \left\{\left(\frac{dT}{dP}\right) - F\left(\frac{dT}{dK}\right)\right\}.\Delta P + \left(\frac{dT}{dQ}\right).\Delta Q\\ &+ \left(\frac{dT}{n'dz'}\right) n'.\Delta z' + \left(\frac{dT}{d\nu'}\right).\Delta\nu' + \Delta T\end{aligned}$$

indem hier auch die Relation $\Delta K = -F.\Delta P$ statt findet, die im Art. 36 eingeführt und erklärt wurde. Das in dieser Gleichung ΔT benannte Glied bezeichnet den Zuwachs, oder den Theil des vollständigen Werthes von T, aus welchem überhaupt die unter dem Zeichen Δ enthaltenen Störungsglieder hervorgehen. Für die Entwickelung der im vorstehenden Ausdruck enthaltenen partiellen Differentialquotienten ist die Form zu betrachten, unter welche T im Vorhergehenden gebracht, und die im Art. 43 erklärt worden ist. Da hier nur $T^{(1)}$ in Betracht kommt, so ist der erste der beiden Ausdrücke (17) vorzunehmen.

183.

Der anzuwendende Ausdruck ist also der folgende, in welchem der Index 1 weggelassen werden kann, ohne Unbestimmtheit zu erzeugen,

$$T = \overline{T} + \overline{G}\nu + \overline{U}\left\{(1+\nu)^2\frac{h^2}{h_0^2} - 1\right\} + \Sigma(2\nu+\nu^2)$$

und hieraus ergeben sich sogleich die folgenden Ausdrücke der erforderlichen Differentialquotienten,

$$\left(\frac{dT}{ndz}\right) = \left(\frac{d\overline{T}}{ndz}\right) + \left(\frac{d\overline{G}}{ndz}\right)\nu + \left(\frac{d\overline{U}}{ndz}\right)\left\{(1+\nu)^2\frac{h^2}{h_0^2} - 1\right\} + \left(\frac{d\Sigma}{ndz}\right)(2\nu+\nu^2) \quad \ldots \quad (60)$$

*) In Schum. Astr. Nachr. B. XXV. p. 327. 328 habe ich schon dieses Princip angedeutet.

Digitized by Google

in welchem die Entwickelung der Differentiale der Functionen $\overline{T}$, $\overline{G}$, $\overline{U}$, $\overline{\Sigma}$ nach nz wieder durch den Ausdruck (20) gegeben ist, in welchem bez.

$$\left(\frac{dT_0}{dg}\right),\ \left(\frac{dG_0}{dg}\right),\ \left(\frac{dU_0}{dg}\right),\ \left(\frac{d\Sigma_0}{dg}\right)$$

statt T_0 zu substituiren ist. Es wird also

$$\left(\frac{d\overline{T}}{ndz}\right) = \left(\frac{dT_0}{dg}\right) + \left(\frac{d^2T_0}{dg^2}\right) ndz + \text{etc.}$$

und eben so für die übrigen Functionen. Gleichwie im Vorhergehenden braucht man durch den Ausdruck (20) nur drei der vorbenannten vier Functionen zu entwickeln, da leicht zu finden ist, dass die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{d\overline{T}}{ndz}\right) = \left(\frac{d\overline{G}}{ndz}\right) + \left(\frac{d\overline{U}}{ndz}\right) + \left(\frac{d\overline{\Sigma}}{ndz}\right)$$

statt findet. Der vorstehende Ausdruck von T giebt ferner

$$\left(\frac{d\overline{T}}{d\nu}\right) = \overline{G} + 2\overline{U}(1+\nu)\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 + 2\overline{\Sigma}(1+\nu)$$

oder

$$(61) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \left(\frac{dT}{d\nu}\right) = D - D\frac{\nu}{1+\nu}$$

wenn man

$$D = \overline{T} + \overline{U} + \overline{\Sigma} + \overline{G}\nu + 2\overline{U}\left\{(1+\nu)^2\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 - 1\right\} + 2\overline{\Sigma}(2\nu+\nu^2)$$

$$(62) \quad = 2\overline{T} - \overline{G} - \overline{G}\nu$$

setzt. Dieser Ausdruck ist zur Berechnung geeigneter wie der vorhergehende, da die Function D durch blose Additionen aus den im Vorhergehenden schon entwickelten und berechneten Functionen erhalten wird, und also die Berechnung von $\left(\frac{dT}{d\nu}\right)$ nur die Berechnung Eines Products erfordert. Ferner erhält man

$$\left(\frac{dT}{d\frac{h_0}{h}}\right) = -2\overline{U}(1+\nu)^2\left(\frac{h}{h_0}\right)^3$$

oder

$$(63) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \left(\frac{dT}{d\frac{h_0}{h}}\right) = E + E\partial\frac{h}{h_0}$$

wo

$$(64) \quad \ldots\ldots E = -2\overline{U} - 2\overline{U}\left\{(1+\nu)^2\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 - 1\right\}$$

ist, und daher auch die Berechnung nur Eines Products erforderlich ist. Ferner wird

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{d\bar{T}}{dP}\right) - F\left(\frac{d\bar{T}}{dK}\right) &= \left\{\left(\frac{dT}{dP}\right) - F\left(\frac{dT}{dK}\right)\right\} + \left\{\left(\frac{d\bar{G}}{dP}\right) - F\left(\frac{d\bar{G}}{dK}\right)\right\}\nu \\
&+ \left\{\left(\frac{dU}{dP}\right) - F\left(\frac{dU}{dK}\right)\right\}\left\{(1+\nu)^2\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 - 1\right\} \\
&+ \left\{\left(\frac{d\Sigma}{dP}\right) - F\left(\frac{d\Sigma}{dK}\right)\right\}(2\nu+\nu^2) \\
\left(\frac{dT}{dQ}\right) = \left(\frac{d\bar{T}}{dQ}\right) + \left(\frac{d\bar{G}}{dQ}\right)\nu &+ \left(\frac{dU}{dQ}\right)\left\{(1+\nu)^2\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 - 1\right\} + \left(\frac{d\Sigma}{dQ}\right)(2\nu+\nu^2)
\end{aligned}\right\} \quad (65)$$

wo die überstrichenen Functionen wieder durch den Ausdruck (20) zu berechnen sind, nachdem darin bez.

$$\left(\frac{dT_0}{dP}\right) - F\left(\frac{dT_0}{dK}\right);\ \left(\frac{dG_0}{dP}\right) - F\left(\frac{dG_0}{dK}\right);\ \left(\frac{dU_0}{dP}\right) - F\left(\frac{dU_0}{dK}\right);$$
$$\left(\frac{d\Sigma_0}{dP}\right) - F\left(\frac{d\Sigma_0}{dK}\right);\ \left(\frac{dT_0}{dQ}\right);\ \left(\frac{dG_0}{dQ}\right);\ \left(\frac{dU_0}{dQ}\right);\ \left(\frac{d\Sigma_0}{dQ}\right);$$

statt T_0 gesetzt worden ist. Da hiebei die Glieder höchster Ordnung, die in dem Ausdruck (20) angesetzt worden sind, übergangen werden dürfen, so reducirt sich die Berechnung der überstrichenen Functionen der Gleichungen (65) auf eine sehr geringe Arbeit. Setzen wir $\left(\frac{dT_0}{dP}\right) - F\left(\frac{dT_0}{dK}\right)$ und bez. $\left(\frac{dT_0}{dQ}\right)$ statt T_0 in (20), so bekommen wir

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\bar{T}}{dP}\right) - F\left(\frac{d\bar{T}}{dK}\right) &= \left\{\left(\frac{dT_0}{dP}\right) - F\left(\frac{dT_0}{dK}\right)\right\} + \left\{\left(\frac{d^2T_0}{dPdg}\right) - F\left(\frac{d^2T_0}{dKdg}\right)\right\} n\delta z \\
&+ \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{d^3T_0}{dPdg^2}\right) - F\left(\frac{d^3T_0}{dKdg^2}\right)\right\}(n\delta z)^2 + \ldots \\
&+ \left\{\left\{\left(\frac{d^2T_0}{dP^2}\right) - 2F\left(\frac{d^2T_0}{dPdK}\right) + F^2\left(\frac{d^2T_0}{dK^2}\right)\right\} + \ldots\right\}\delta P \\
&+ \left\{\left\{\left(\frac{d^2T_0}{dPdQ}\right) - F\left(\frac{d^2T_0}{dQdK}\right)\right\} + \ldots\right\}\delta Q \\
\left(\frac{d\bar{T}}{dQ}\right) = \left(\frac{dT_0}{dQ}\right) &+ \left(\frac{d^2T_0}{dQdg}\right) n\delta z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3T_0}{dQdg^2}\right)(n\delta z)^2 + \ldots \\
&+ \left\{\left\{\left(\frac{d^2T_0}{dPdQ}\right) - F\left(\frac{d^2T_0}{dQdK}\right)\right\} + \ldots\right\}\delta P \\
&+ \left\{\left(\frac{d^2T_0}{dQ^2}\right) + \ldots\right\}\delta Q
\end{aligned}$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit (20), so zeigt sich, dass

$$\left(\frac{d\bar{T}}{dP}\right) - F\left(\frac{d\bar{T}}{dK}\right) = H + \tfrac{1}{2}L\delta P$$
$$\left(\frac{d\bar{T}}{dQ}\right) = N + M\delta P + \tfrac{1}{2}O\delta Q$$

ist, wenn hier unter H, L, N, M, O die zu $\bar{T}$ selbst gehörigen Functionen verstanden werden, deren Zahlenwerthe im § 5 schon gegeben sind; ganz ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die analogen Functionen von $\bar{G}$, U, Σ. Ferner erhält man

Digitized by Google

$$(66)\quad \left(\frac{dT}{n'dz'}\right)=\left(\frac{dT}{n'dz'}\right)+\left(\frac{dG}{n'dz'}\right)\nu+\left(\frac{dU}{n'dz'}\right)\left\{(1+\nu)^2\left(\frac{h}{h_0}\right)^2-1\right\}+\left(\frac{d\Sigma}{n'dz'}\right)(2\nu+\nu^2)$$

wo wieder der Ausdruck (20) anzuwenden ist, welcher hier

$$\left(\frac{d\bar{T}}{n'dz'}\right)=\left(\frac{dT_0}{dg'}\right)+\left(\frac{d^2T_0}{dgdg'}\right)n\delta z+\text{etc.}$$

und ähnliche Ausdrücke für die übrigen Functionen giebt. Endlich wird

$$\left(\frac{dT}{dv'}\right)=-3T$$

womit die Entwickelung aller im Ausdruck von ΔT vorkommenden Differentialquotienten gegeben ist. Die Form des Gliedes ΔT ist je nach dem in Betracht zu ziehenden Theil der Störungsfunction verschieden. Für die aus den Abtheilungen 3 und 4 des Ausdrucks von T des § 4 entspringenden Störungsglieder hat ΔT denselben Ausdruck wie $T^{(1)}$ in der ersten Gleichung (17), nur müssen in der rechten Seite dieser Gleichung die Glieder von $T_0^{(1)}$ substituirt werden, die den Abtheilungen 3 und 4 angehören. Für die Abtheilungen 6, 7, etc. hat ΔT den nemlichen Ausdruck wie $T^{(2)}$ in der zweiten Gleichung (17), und es sind von $T_0^{(2)}$ die Glieder zu substituiren, die den Abtheilungen 6, 7, etc. angehören. Für die übrigen störenden Kräfte nimmt ΔT andere Formen an, die weiter unten am passenden Orte erklärt werden sollen.

184.

Gehen wir zu dW_0 über, und wenden davon die Form an, die im § 6 entwickelt wurde, nemlich

$$\frac{dW_0}{ndt}=T+y\left\{\Psi\frac{\varrho}{a}\cos\varphi-\left[\Upsilon+\frac{2e}{1-e^2}\frac{h}{h_0}\right]\frac{\varrho}{a}\sin\varphi\right\}$$

wo zur Abkürzung ϱ und φ statt ϱ_0 und φ_0 geschrieben worden ist. Die Variation hievon ist

$$\frac{d.\Delta W_0}{ndt}=\Delta T+y\left\{\Delta\Psi\frac{\varrho}{a}\cos\varphi-\left[\Delta\Upsilon-\frac{2e}{1-e^2}\frac{h^2}{h_0^2}\Delta\frac{h_0}{h}\right]\frac{\varrho}{a}\sin\varphi\right\}$$
$$+\Delta y\left\{\Psi\frac{\varrho}{a}\cos\varphi-\left[\Upsilon+\frac{2e}{1-e^2}\frac{h}{h_0}\right]\frac{\varrho}{a}\sin\varphi\right\}$$

und es sind daher zunächst die Variationen $\Delta\Upsilon$ und $\Delta\Psi$ zu entwickeln.

185.

Zu dem Ende nehmen wir zuerst die Gleichungen (5), (6), (8) vor, aus welchen

$$\overline{W}=\frac{h_0}{h}\frac{1-\nu}{1+\nu}-1$$

Digitized by Google

$$\frac{d\overline{W}}{ndz} = -2\frac{dv}{ndt} + \frac{y}{\sqrt{1-e^2}}\frac{d.\overline{r}^2}{a^2 ndz}(1+\nu)$$

folgt. Wenn wir ferner in der Gleichung (25) von W_0 zu $\overline{W}$ übergehen, so ergiebt sich

$$\overline{W} = \Xi + \Upsilon\left(\frac{\overline{r}}{a}\cos\overline{f} + \tfrac{3}{2}e\right) + \Psi\frac{\overline{r}}{a}\sin\overline{f}$$

und ausserdem wurde im Art. 88 gefunden,

$$\Xi + \tfrac{3}{2}e\Upsilon = 2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{\overline{r}}{a}\cos\overline{f};\quad \beta = \frac{\overline{r}}{a}\sin\overline{f}$$

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{ndz} = -\frac{\sin\overline{f}}{\sqrt{1-e^2}};\quad \beta' = \frac{d\beta}{ndz} = \frac{\cos\overline{f}+e}{\sqrt{1-e^2}}$$

so geben die vorstehenden Gleichungen

$$\Upsilon\alpha + \Psi\beta = 2\left(\frac{h_0}{h}\frac{1}{1+\nu} - \frac{h}{h_0}\right)$$

$$\Upsilon\alpha' + \Psi\beta' = -2\left(\frac{dv}{ndt} - y\frac{e}{1-e^2}(1+\nu)\beta\right)$$

und da $\alpha\beta' - \alpha'\beta = \sqrt{1-e^2}$ ist, so bekommt man hieraus durch die Elimination

$$\Upsilon = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{h_0}{h}\frac{1}{1+\nu} - \frac{h}{h_0}\right)\beta' + \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dv}{ndt} - y\frac{e}{1-e^2}(1+\nu)\beta\right)\beta$$

$$\Psi = -\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{h_0}{h}\frac{1}{1+\nu} - \frac{h}{h_0}\right)\alpha' - \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dv}{ndt} - y\frac{e}{1-e^2}(1+\nu)\beta\right)\alpha$$

186.

Nimmt man von den eben erhaltenen Ausdrücken die Variationen, so ergiebt sich nach einigen leichten Reductionen, und wenn man die folgenden Abkürzungen einführt,

$$\alpha'' = \frac{d^2\alpha}{n^2dz^2};\quad \beta'' = \frac{d^2\beta}{n^2dz^2}$$

$$K = \frac{h_0}{h}\frac{1}{1+\nu} - \frac{h}{h_0}$$

$$L = \frac{dv}{ndt} - \frac{3ye}{1-e^2}(1+\nu)\beta$$

$$M = \frac{dz}{dt} + \frac{y}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\overline{r}^2}{a^2}$$

$$N = \frac{1}{1+\nu} + \left(\frac{h}{h_0}\right)^2$$

$$(I) = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\left\{K\beta'' + L\beta'\right\}$$

Digitized by Google

$$(II) = -\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\left\{M\beta' + \frac{ye}{1-e^2}\beta^2\right\}$$
$$(III) = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}N\beta'$$
$$(IV) = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\beta$$
$$(V) = -\frac{2e}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(1+\nu)\beta^2$$
$$(I)' = -\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\left\{K\alpha'' + L\alpha' - \frac{ye}{\sqrt{1-e^2}}(1+\nu)\right\}$$
$$(II)' = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\left\{M\alpha' + \frac{ye}{1-e^2}\alpha\beta\right\}$$
$$(III)' = -\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}N\alpha'$$
$$(IV)' = -\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\alpha$$
$$(V)' = \frac{2e}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(1+\nu)\alpha\beta$$

$$\Delta T = (I)n.\Delta z + (II).\Delta v + (III).\Delta\frac{h_0}{h} + (IV)\frac{d.\Delta v}{ndt} + (V).\Delta y$$
$$\Delta\Psi = (I)'n.\Delta z + (II)'.\Delta v + (III)'.\Delta\frac{h_0}{h} + (IV)\frac{d.\Delta v}{ndt} + (V)'.\Delta y$$

Diese Hülfsgrössen sind aus den im Vorhergehenden enthaltenen Entwickelungen leicht zu berechnen. Substituirt man nun alle entwickelten Grössen in den Ausdruck für $d.\Delta W_0$, so bekommt man

$$\begin{aligned}\frac{d.\Delta W_0}{ndt} &= (1)n.\Delta z + (2).\Delta v + (3).\Delta\frac{h_0}{h} + (4)\frac{d.\Delta v}{ndt} + (5).\Delta y\\ &\quad + (6).\Delta P + (7).\Delta Q\\ &\quad + (8)n'.\Delta z' + (9).\Delta v' + \Delta T\end{aligned} \tag{67}$$

wo die Coefficienten durch die folgenden Ausdrücke gegeben sind.

$$(1) = \left(\frac{dT}{ndz}\right) - y(I)\frac{\varrho}{a}\sin\varphi + y(I)'\frac{\varrho}{a}\cos\varphi$$
$$(2) = \left(\frac{dT}{dv}\right) - y(II)\frac{\varrho}{a}\sin\varphi + y(II)'\frac{\varrho}{a}\cos\varphi$$
$$(3) = \left(\frac{dT}{d\frac{h_0}{h}}\right) - y\left\{(III) - \frac{2e}{1-e^2}\left(\frac{h}{h_0}\right)^2\right\}\frac{\varrho}{a}\sin\varphi + y(III)'\frac{\varrho}{a}\cos\varphi$$
$$(4) = -y(IV)\frac{\varrho}{a}\sin\varphi + y(IV)'\frac{\varrho}{a}\cos\varphi$$
$$(5) = -\left\{T + y(V) + \frac{2e}{1-e^2}\frac{h}{h_0}\right\}\frac{\varrho}{a}\sin\varphi + \left\{\Psi + y(V)'\right\}\frac{\varrho}{a}\cos\varphi$$
$$(6) = \left(\frac{dT}{dP}\right) - F\left(\frac{dT}{dK}\right)$$
$$(7) = \left(\frac{dT}{dQ}\right)$$
$$(8) = \left(\frac{dT}{n'dz'}\right)$$

Digitized by Google

$$(9) = -3T$$

deren Verwandelung in Zahlen keine Schwierigkeit hat.

187.

Nachdem man den Ausdruck des vor. Art. auf eine Reihe von Störungsgliedern irgend einer Klasse angewandt hat, giebt die Integration ΔW_0, und diese Function muss mit angewandt werden, um $n\Delta z$ und Δv zu erhalten. Hiefür dienen die folgenden, im Vorhergehenden mehrmals, unter andern im Art. 122, enthaltenen Gleichungen,

$$\frac{d\delta z}{dt} = \overline{W} + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 \frac{h_0}{h} - \frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\bar{r}^2}{a^2}$$

$$-2\frac{dv}{ndt} = \frac{d\overline{W}}{ndz} - \frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d.\bar{r}^2}{a^2 ndz}(1+\nu)$$

Nehmen wir hievon die Variation, so ergiebt sich zuerst

$$\frac{d.\Delta z}{dt} = \Delta\overline{W} + \frac{2\nu}{(1+\nu)^3}\frac{h_0}{h}\Delta\nu + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 \Delta\frac{h_0}{h}$$

$$-\frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d.\bar{r}^2}{a^2 ndz} n\Delta z - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\bar{r}^2}{a^2}\Delta y$$

$$-2\frac{d.\Delta v}{ndt} = \Delta\frac{d\overline{W}}{ndz} - \frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d^2.\bar{r}^2}{a^2 n^2 dz^2}(1+\nu)\, n\Delta z - \frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d.\bar{r}^2}{a^2 ndz}\Delta\nu$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d.\bar{r}^2}{a^2 ndz}(1+\nu)\Delta y$$

und aus den Gleichungen

$$\overline{W} = \overline{W}_0 + \left(\frac{d\overline{W}_0}{dy}\right) n\delta z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\overline{W}_0}{dy^2}\right)(n\delta z)^2 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{d^3\overline{W}_0}{dy^3}\right)(n\delta z)^3 + \text{etc.}$$

$$\frac{d\overline{W}}{ndz} = \left(\frac{d\overline{W}_0}{dy}\right) + \left(\frac{d^2\overline{W}_0}{dy^2}\right) n\delta z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3\overline{W}_0}{dy^3}\right)(n\delta z)^2 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{d^4\overline{W}_0}{dy^4}\right)(n\delta z)^3 + \text{etc.}$$

$$\frac{d.\bar{r}^2}{a^2 ndz} = \left(\frac{d.r_0^2}{a^2 dg}\right) + \left(\frac{d^2.r_0^2}{a^2 dg^2}\right) n\delta z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3.r_0^2}{a^2 dg^3}\right)(n\delta z)^2 + \text{etc.}$$

bekommt man

$$\Delta\overline{W} = (\Delta\overline{W_0}) + \left(\frac{d.\Delta W_0}{dy}\right) n\delta z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2.\Delta W_0}{dy^2}\right)(n\delta z)^2 + \text{etc.}$$

$$+\left\{\left(\frac{d\overline{W}_0}{dy}\right) + \left(\frac{d^2\overline{W}_0}{dy^2}\right) n\delta z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3\overline{W}_0}{dy^3}\right)(n\delta z)^2 + \text{etc.}\right\} n\Delta z$$

$$\Delta\frac{d\overline{W}}{ndz} = \left(\frac{d.\Delta W_0}{dy}\right) + \left(\frac{d^2.\Delta W_0}{dy^2}\right) n\delta z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3.\Delta W_0}{dy^3}\right)(n\delta z)^2 + \text{etc.}$$

$$+\left\{\left(\frac{d^2\overline{W}_0}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^3\overline{W}_0}{dy^3}\right) n\delta z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^4\overline{W}_0}{dy^4}\right)(n\delta z)^2 + \text{etc.}\right\} n\Delta z$$

$$\frac{d^2.\bar{r}^2}{a^2 n^2 dz^2} = \left(\frac{d^2.r_0^2}{a^2 dg^2}\right) + \left(\frac{d^3.r_0^2}{a^2 dg^3}\right) n\delta z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^4.r_0^2}{a^2 dg^4}\right)(n\delta z)^2 + \text{etc.}$$

Es ergiebt sich daher schliesslich

Digitized by Google

$$(68)\ \ldots\quad \frac{d\Delta z}{dt} = \left(\overline{\Delta W_0}\right) + \left(\frac{d\overline{\Delta W_0}}{dy}\right) n\delta z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\overline{\Delta W_0}}{dy^2}\right)(n\delta z)^2 + \text{etc.}$$
$$+ (10)\, n\Delta z + (11)\, \Delta\nu + (12)\, \Delta\frac{h_0}{h} + (13)\, \Delta y$$

$$(69)\quad -2\frac{d\Delta\nu}{ndt} = \left(\frac{d\overline{\Delta W_0}}{dy}\right) + \left(\frac{d^2\overline{\Delta W_0}}{dy^2}\right) n\delta z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3\overline{\Delta W_0}}{dy^3}\right)(n\delta z)^2 + \text{etc.}$$
$$+ (14)\, n\Delta z + (15)\, \Delta\nu + (16)\, \Delta y$$

wo

$$(10) = \frac{d\overline{W}}{ndz} - \frac{y}{\sqrt{1-e^2}}\frac{d.\overline{r^2}}{a^2 ndz}$$
$$(11) = \frac{3\nu}{(1-\nu)^2}\frac{h_0}{h}$$
$$(12) = \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2$$
$$(13) = -\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\overline{r^2}}{a^2}$$
$$(14) = \frac{d^2\overline{W}}{n^2dz^2} - \frac{y}{\sqrt{1-e^2}}\frac{d^2.\overline{r^2}}{a^2n^2dz^2}(1+\nu)$$
$$(15) = -\frac{y}{\sqrt{1-e^2}}\frac{d.\overline{r^2}}{a^2 ndz}$$
$$(16) = -\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{d.\overline{r^2}}{a^2 ndz}(1+\nu)$$

wo

$$\frac{d^2\overline{W}}{n^2dz^2} = \left(\frac{d^2W_0}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^3W_0}{dy^3}\right) n\delta z + \text{etc.}$$
$$\frac{d^2.\overline{r^2}}{a^2n^2dz^2} = \left(\frac{d^2.r_0^2}{a^2dy^2}\right) + \left(\frac{d^3.r_0^2}{a^2dy^3}\right) n\delta z + \text{etc.}$$

Ich bemerke hiezu, dass man durch die Gleichung $1+\nu = c^w$

$$\frac{\nu}{(1+\nu)^2} = w - \frac{5}{2}w^2 + \frac{19}{6}w^3 - \frac{65}{24}w^4 + \ldots$$

bekommt.

188.

Es ist jetzt die Variation von $\frac{h_0}{h}$ zu entwickeln, die man auf zwei verschiedene Arten ausdrücken kann, nemlich einestheils durch die störenden Kräfte und andertheils durch die Variationen der Störungen der Länge und des Radius Vectors. Letztere wird in dem Folgenden, gleichwie es im Vorhergehenden der Fall war, zur Prüfung der Berechnung der Störungen dienen. Die Gleichung (18) giebt

$$\frac{d\frac{h_0}{h}}{ndt} = -\overline{\Sigma'} - \overline{\Sigma'}(2\nu + \nu^2)$$

indem hier nur $\Sigma^{(1)}$ in Betracht kommt. Hieraus bekommt man sogleich

Digitized by Google

$$\frac{\Delta\frac{h_0}{h}}{ndt} = (17)n\Delta z + (18)\Delta v + (19)\Delta P + (20)\Delta Q + (21)n'\Delta z' + (22)\Delta v' - \Delta' \Sigma' \quad (70)$$

wo

$$(17) = -\left(\frac{d\bar{\Sigma}}{ndz}\right) - \left(\frac{d\bar{\Sigma}}{ndz}\right)(2v + v^2)$$

$$(18) = -2\bar{\Sigma}(1+v)$$

$$(19) = -\left\{\left(\frac{d\bar{\Sigma}}{dP}\right) - F\left(\frac{d\bar{\Sigma}}{dK}\right)\right\} - \left\{\left(\frac{d\bar{\Sigma}}{dP}\right) - F\left(\frac{d\bar{\Sigma}}{dK}\right)\right\}(2v + v^2)$$

$$(20) = -\left(\frac{d\bar{\Sigma}}{dQ}\right) - \left(\frac{d\bar{\Sigma}}{dQ}\right)(2v + v^2)$$

$$(21) = -\left(\frac{d\bar{\Sigma}}{dg'}\right) - \left(\frac{d\bar{\Sigma}}{dg'}\right)(2v + v^2)$$

$$(22) = 3\Sigma$$

ist. Diese Functionen sind mit Ausnahme des Products, welches im Coefficienten (18) vorkommt, schon im Art. 183 für ΔT angewandt worden. In Betreff des Gliedes $\Delta' \Sigma'$ finden dieselben Bemerkungen statt, die oben in Bezug auf $\Delta' T$ gemacht wurden.

Um den anderen Ausdruck der Variation von $\frac{h_0}{h}$ zu erhalten, wenden wir uns zur Gleichung (6), nachdem sie wie folgt gestellt worden ist,

$$\frac{h_0}{h} = \left\{\frac{dz}{dt} + \frac{\gamma}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\bar{r}^2}{a^2}\right\}(1+v)^2$$

Hieraus folgt

$$\Delta\frac{h_0}{h} = (23)n\Delta z + (24)\frac{d.\Delta z}{dt} + (25)\Delta v + (26)\Delta y \quad \ldots \quad (71)$$

wo die Coefficienten folgende Ausdrücke haben,

$$(23) = \frac{\gamma}{\sqrt{1-e^2}}\frac{d.\bar{r}^2}{a^2 ndz}(1+v)^2$$

$$(24) = (1+v)^2 = 1 + (2v + v^2)$$

$$(25) = 2\frac{h_0}{h(1+v)} = 2 + 2\delta\frac{h_0}{h} - 2\frac{\gamma}{1+\gamma} - 2\frac{\gamma}{1+\gamma}\delta\frac{h_0}{h}$$

$$(26) = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\bar{r}^2}{a^2}(1+v)^2$$

189.

Die Gleichung, welche im § 7 zur Prüfung der Berechnung der Glieder der Längenstörungen angewandt wurde, die das Quadrat eines kleinen Divisors bekommen, kann auch hier angewandt werden, wenn man die Variation davon entwickelt. Statt der a. a. O. angewandten

Digitized by Google

Endgleichung ziehe ich indess vor, hier die folgende des Art. 112 zu benutzen, deren Variation etwas einfacher wird, wie die jener.

$$(72)\quad \Xi = \left\{\tfrac{1}{2}\delta\tfrac{h}{h_0} - \Xi\right\}\delta\tfrac{h}{h_0} + \tfrac{3}{4}(1-e^2)\{T^2 + \Psi^2\} - 3a\Omega + uX$$

wo

$$\frac{dX}{ndt} = 3\left(\frac{da\Omega}{dv'}\right)\frac{dv'}{n'dt} + 3\left(\frac{da\Omega}{dr'}\right)\frac{dr'}{n'dt}$$

und wieder $u = \frac{n'}{n}$ ist. Es wird hier zuerst

$$\Delta\Xi = -\delta\tfrac{h}{h_0}\Delta\Xi + \left\{\Xi - \delta\tfrac{h}{h_0}\right\}\left(\tfrac{h}{h_0}\right)^2\Delta\tfrac{h_0}{h} + \tfrac{3}{4}(1-e^2)T\Delta T + \tfrac{3}{4}(1-e^2)\Psi\Delta\Psi - 3\Delta a\Omega + u\Delta X$$

Die Gleichung

$$\Xi + \tfrac{3}{4}eT = 2\tfrac{h}{h_0} - \tfrac{h_0}{h} - 1$$

giebt aber

$$\Delta\Xi = -\tfrac{3}{4}e\Delta T - \left(1 + 2\left(\tfrac{h}{h_0}\right)^2\right)\Delta\tfrac{h_0}{h}$$

eliminirt man hiemit $\Delta\Xi$ auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung, so bekommt man

$$(73)\quad \Delta\Xi = \left\{\delta\tfrac{h}{h_0} + \Xi\left(\tfrac{h}{h_0}\right)^2 + \left(\tfrac{h}{h_0}\right)^2\delta\tfrac{h}{h_0}\right\}\Delta\tfrac{h_0}{h} + \left\{\tfrac{3}{4}(1-e^2)T + \tfrac{3}{4}e\delta\tfrac{h}{h_0}\right\}\Delta T + \tfrac{3}{4}(1-e^2)\Psi\Delta\Psi - 3\Delta a\Omega + u\Delta X$$

190.

Vollständig betrachtet ist Ω Function der Veränderlichen nz, v, P, Q, K, $n'z'$, v', da wir aber hier die Variation der beiden letztgenannten Functionen nicht brauchen werden, so wird

$$\Delta a\Omega = \left(\frac{da\Omega}{ndz}\right)n\Delta z + \left(\frac{da\Omega}{dv}\right)\Delta v + \left\{\left(\frac{da\Omega}{dP}\right) - F\left(\frac{da\Omega}{dK}\right)\right\}\Delta P + \left(\frac{da\Omega}{dQ}\right)\Delta Q + \Delta a\Omega$$

und durch dieselben Betrachtungen wie oben ergiebt sich

$$\left(\frac{da\Omega}{ndz}\right) = \left(\frac{da\overline{\Omega}}{ndz}\right)(1+\nu)^2$$
$$\left(\frac{da\Omega}{dv}\right) = 2a\overline{\Omega}(1+\nu)$$
$$\left(\frac{da\Omega}{dP}\right) - F\left(\frac{da\Omega}{dK}\right) = \left\{\left(\frac{da\overline{\Omega}}{dP}\right) - F\left(\frac{da\overline{\Omega}}{dK}\right)\right\}(1+\nu)^2$$
$$\left(\frac{da\Omega}{dQ}\right) = \left(\frac{da\overline{\Omega}}{dQ}\right)(1+\nu)^2$$

wo wieder die Functionen von $\overline{\Omega}$ nach dem Ausdruck (20) zu berechnen sind, und zwar

Digitized by Google

$$\left(\frac{da\bar{\Omega}}{ndz}\right)=\left(\frac{da\Omega_0}{dg}\right)+\left(\frac{d^2a\Omega}{dg^2}\right)n\delta z+\ldots$$
$$a\bar{\Omega}=a\Omega_0+\left(\frac{da\Omega_0}{dg}\right)n\delta z+\ldots$$
$$\left(\frac{da\bar{\Omega}}{dP}\right)-F\left(\frac{da\bar{\Omega}}{dK}\right)=\left(\frac{da\Omega_0}{dP}\right)-F\left(\frac{da\Omega_0}{dK}\right)+\frac{d\left\{\left(\frac{da\Omega_0}{dP}\right)-F\left(\frac{da\Omega_0}{dK}\right)\right\}}{dg}n\delta z+\ldots$$
$$\left(\frac{da\bar{\Omega}}{dQ}\right)=\left(\frac{da\Omega_0}{dQ}\right)+\left(\frac{d^2a\Omega_0}{dQdg}\right)n\delta z+\ldots$$

Ausserdem ist noch zu bemerken, dass in Folge der Gleichungen des Art. 90

$$\Delta f\Gamma=(\Delta H_{-1}+\Delta H_1)\cos(n\beta t+\theta)$$
$$\Delta f''\Psi=(\Delta H_{-1}-\Delta H_1)\sin(n\beta t+\theta)$$

wird, wenn abgesehen von den Gliedern, die kein γ enthalten,

$$\Delta W_0=\Delta H_{-1}\cos(-\gamma+n\beta t+\theta)+\Delta H_1\cos(\gamma+n\beta t+\theta)$$

gesetzt wird, und daher bei den Anwendungen die Divisionen mit f und f' erspart werden, wenn man in die obige Gleichung $\Delta f\Gamma$ und $\Delta f''\Psi$ statt $\Delta\Gamma$ und $\Delta\Psi$ einführt. Setzt man nun zur leichteren Uebersicht

$$\Delta\Xi=u.\Delta X+(27).\Delta\frac{h_0}{h}+(28)\Delta f\Gamma+(29).\Delta f''\Psi\quad\ldots\quad(74)$$
$$+(30)n.\Delta z+(31)\Delta\nu+(32)\Delta P+(33)\Delta Q$$
$$-3.\Delta a\Omega$$

so geben die vorstehenden Ausdrücke

$$(27)=\bar{\Xi}-2\bar{\Xi}\partial\frac{h_0}{h}+3\bar{\Xi}\left(\partial\frac{h_0}{h}\right)^2\mp\ldots$$
$$-2\partial\frac{h_0}{h}+4\left(\partial\frac{h_0}{h}\right)^2-7\left(\partial\frac{h_0}{h}\right)^3\pm\ldots$$
$$(28)=\frac{3(1-e^2)}{4f}\Gamma+\frac{3e}{2f}\partial\frac{h}{h_0}$$
$$(29)=\frac{3(1-e^2)}{4f''}\Psi$$
$$(30)=-3\left(\frac{da\bar{\Omega}}{ndz}\right)-3\left(\frac{da\bar{\Omega}}{ndz}\right)(2\nu+\nu^2)$$
$$(31)=-6a\bar{\Omega}-6a\bar{\Omega}\nu$$
$$(32)=-3\left\{\left(\frac{da\bar{\Omega}}{dP}\right)-F\left(\frac{da\bar{\Omega}}{dK}\right)\right\}$$
$$-3\left\{\left(\frac{da\bar{\Omega}}{dP}\right)-F\left(\frac{da\bar{\Omega}}{dK}\right)\right\}(2\nu+\nu^2)$$
$$(33)=-3\left(\frac{da\bar{\Omega}}{dQ}\right)-3\left(\frac{da\bar{\Omega}}{dQ}\right)(2\nu+\nu^2)$$

Digitized by Google

Einige dieser Coefficienten können unmittelbar oder fast unmittelbar aus dem § 7 entnommen werden.

191.

Um die Variation der Gleichung

$$\frac{dX}{ndt} = 3\left(\frac{da\Omega}{dv'}\right)\frac{dv'}{n'dt} + 3\left(\frac{da\Omega}{dr'}\right)\frac{dr'}{ndt}$$

abzuleiten, bemerke ich zuerst, dass hier wo die Variationen von $n'z'$ und v' unberücksichtigt gelassen, und demzufolge von v' und r' nur die elliptischen Werthe substituirt werden,

$$\frac{dX}{ndt} = 3\left(\frac{da\Omega}{dg'}\right)$$

wird. Nimmt man hievon auf dieselbe Weise wie vorhin die Variation und setzt

$$\frac{d\Delta X}{ndt} = (34)\,n\Delta z + (35)\,\Delta\nu + (36)\,\Delta P + (37)\,\Delta Q$$
$$(75)\quad \ldots \qquad + 3\Delta\left(\frac{da\Omega}{dg'}\right)$$

so bekommt man

$$(34) = 3\left(\frac{d^2a\bar{\Omega}}{ndzdg'}\right) + 3\left(\frac{d^2a\bar{\Omega}}{ndzdg'}\right)(2\nu + \nu^2)$$
$$(35) = 6\left(\frac{da\bar{\Omega}}{dg'}\right) + 6\left(\frac{da\bar{\Omega}}{dg'}\right)\nu$$
$$(36) = 3\left\{\left(\frac{d^2a\bar{\Omega}}{dPdg'}\right) - F\left(\frac{d^2a\bar{\Omega}}{dKdg'}\right)\right\}$$
$$+ 3\left\{\left(\frac{d^2a\bar{\Omega}}{dPdg'}\right) - F\left(\frac{d^2a\bar{\Omega}}{dKdg'}\right)\right\}(2\nu + \nu^2)$$
$$(37) = 3\left(\frac{d^2a\bar{\Omega}}{dQdg'}\right) + 3\left(\frac{d^2a\bar{\Omega}}{dQdg'}\right)(2\nu + \nu^2)$$

und zufolge des Ausdrucks (20) wird hier

$$\left(\frac{d^2a\bar{\Omega}}{ndzdg'}\right) = \left(\frac{d^2a\Omega_0}{dgdg'}\right) + \left(\frac{d^3a\Omega_0}{dg^2dg'}\right)ndz + \ldots$$
$$\left(\frac{da\bar{\Omega}}{dg'}\right) = \left(\frac{da\Omega_0}{dg'}\right) + \left(\frac{d^2a\Omega_0}{dgdg'}\right)ndz + \ldots$$
etc. etc.

192.

Wir kommen jetzt zu den Variationen der Differentialgleichungen, von welchen die Breitenstörungen abhängen. Diese Gleichungen sind, in so weit sie hier gebraucht werden, zufolge der Artt. 36 und 44

Digitized by Google

$$\frac{dP}{ndt} = -\alpha Q + \bar{B} + \bar{B}\left\{(1+\nu)^2\frac{h}{h_0} - 1\right\}$$
$$\frac{dQ}{ndt} = \alpha P + \bar{C} + \bar{C}\left\{(1+\nu)^2\frac{h}{h_0} - 1\right\}$$

wo wieder blos $B^{(1)}$ und $C^{(1)}$ anzuwenden sind. Auf dieselbe Art wie vorher bekommt man

$$\frac{d.\Delta P}{ndt} = (38)n\Delta z + (39)\Delta\nu + (40)\Delta\frac{h_2}{h} + (41)\Delta\alpha \quad \ldots\ldots \quad (76)$$
$$+ (42)\Delta P + (43)\Delta Q + (44)n'\Delta z' + (45)\Delta\nu' + \Delta' B$$
$$\frac{d.\Delta Q}{ndt} = (46)n\Delta z + (47)\Delta\nu + (48)\Delta\frac{h_2}{h} + (49)\Delta\alpha \quad \ldots\ldots \quad (77)$$
$$+ (50)\Delta P + (51)\Delta Q + (52)n'\Delta z' + (53)\Delta\nu' + \Delta' C$$

und man findet leicht die Ausdrücke dieser Coefficienten wie folgt,

$$(38) = \left(\frac{d\bar{B}}{ndz}\right) + \left(\frac{d\bar{B}}{ndz}\right)\left\{(1+\nu)^2\frac{h}{h_0} - 1\right\}$$
$$(39) = 2B - 2B\frac{\nu}{1+\nu}$$
$$(40) = -B - B\delta\frac{h}{h_0}$$
$$(41) = -2\sin\tfrac{1}{2}J_0 - \delta Q$$
$$(42) = \left(\frac{d\bar{B}}{dP}\right) - F\left(\frac{d\bar{B}}{dK}\right) + \left\{\left(\frac{d\bar{B}}{dP}\right) - F\left(\frac{d\bar{B}}{dK}\right)\right\}\left\{(1+\nu)^2\frac{h}{h_0} - 1\right\}$$
$$(43) = \left(\frac{d\bar{B}}{dQ}\right) + \left(\frac{d\bar{B}}{dQ}\right)\left\{(1+\nu)^2\frac{h}{h_0} - 1\right\} - \alpha$$
$$(44) = \left(\frac{d\bar{B}}{n'dz'}\right) + \left(\frac{d\bar{B}}{n'dz'}\right)\left\{(1+\nu)^2\frac{h}{h_0} - 1\right\}$$
$$(45) = -3B$$

$$(46) = \left(\frac{d\bar{C}}{ndz}\right) + \left(\frac{d\bar{C}}{ndz}\right)\left\{(1+\nu)^2\frac{h}{h_0} - 1\right\}$$
$$(47) = 2C - 2C\frac{\nu}{1+\nu}$$
$$(48) = -C - C\delta\frac{h}{h_0}$$
$$(49) = \delta P$$
$$(50) = \left(\frac{d\bar{C}}{dP}\right) - F\left(\frac{d\bar{C}}{dK}\right) + \left\{\left(\frac{d\bar{C}}{dP}\right) - F\left(\frac{d\bar{C}}{dK}\right)\right\}\left\{(1+\nu)^2\frac{h}{h_0} - 1\right\} + \alpha$$
$$(51) = \left(\frac{d\bar{C}}{dQ}\right) + \left(\frac{d\bar{C}}{dQ}\right)\left\{(1+\nu)^2\frac{h}{h_0} - 1\right\}$$
$$(52) = \left(\frac{d\bar{C}}{n'dz'}\right) + \left(\frac{d\bar{C}}{n'dz'}\right)\left\{(1+\nu)^2\frac{h}{h_0} - 1\right\}$$
$$(53) = -3C$$

Für die Berechnung der hier erforderlichen Differentialquotienten von $\bar{B}$ und $\bar{C}$ gelten wieder die Erklärungen des Art. 182 für die Differentialquotienten von $\bar{T}$.

Digitized by Google

193.

Der Vollständigkeit wegen muss auch noch die Variation der Function entwickelt werden, die im Art. 54 mit $\delta\delta K$ bezeichnet wurde. Die Variation der Gleichung

$$\delta K = -F\delta P + \delta\delta K$$

des angezogenen Art., wo wieder $F = \frac{\sin\frac{1}{2}J_0}{2\cos^2\frac{1}{2}J_0}$ ist, wird

$$\Delta K = -F\Delta P + \Delta\delta K$$

wenn man die Variation von $\delta\delta K$ mit $\Delta\delta K$ bezeichnet. Um letztere zu erhalten, dienen die Gleichungen (22) und (23), woraus mit Weglassung der Glieder dritter Ordnung, die sich als unmerklich erwiesen haben,

$$\begin{aligned}\tfrac{d\delta\delta K}{ndt} &= \eta - \alpha\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}J_0 + \tfrac{C}{4\cos^2\frac{1}{2}J_0}\delta P \\ &\quad - \left\{\left[\tfrac{4}{4\cos^2\frac{1}{2}J_0} + 2F^2\right]B + \alpha F\right\}\delta Q\end{aligned}$$

ergiebt. Die Variation hievon ist

$$\begin{aligned}\tfrac{d.\Delta\delta K}{ndt} &= \Delta\eta - [\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}J + F\delta Q]\Delta\alpha + \tfrac{\delta P}{4\cos^2\frac{1}{2}J}\Delta C \\ &\quad - \left[\tfrac{4}{4\cos^2\frac{1}{2}J} + 2F^2\right]\delta Q\Delta B + \tfrac{C}{4\cos^2\frac{1}{2}J}\Delta P \\ &\quad - \left\{\left[\tfrac{4}{4\cos^2\frac{1}{2}J} + 2F^2\right]B + \alpha F\right\}\Delta Q\end{aligned}$$

wo der Kürze wegen J statt J_0 geschrieben worden ist. Aber aus dem Vorhergehenden folgt

$$B = \tfrac{dP}{ndt} + \alpha Q$$
$$C = \tfrac{dQ}{ndt} - \alpha P$$

wovon die Variationen

$$\Delta B = \tfrac{d.\Delta P}{ndt} + \alpha\Delta Q + (2\sin\tfrac{1}{2}J + \delta Q)\Delta\alpha$$
$$\Delta C = \tfrac{d.\Delta Q}{ndt} + \alpha\Delta P + \delta P.\Delta\alpha$$

aus welchen, wenn es nöthig wäre, $d.\Delta P$ und $d.\Delta Q$ durch die Gleichungen (76) und (77) eliminirt werden könnten; sie geben aber nur sehr kleine, zu übergehende Glieder. Substituirt man nun, lässt die kleinen Glieder weg, die nichts Merkliches geben können, und setzt

$$(54) = -\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}J_0 - 2F\delta Q$$
$$(55) = \tfrac{C - \alpha\delta P}{4\cos^2\frac{1}{2}J_0}$$
$$(56) = -\tfrac{B + \alpha\delta Q}{4\cos^2\frac{1}{2}J_0} - \alpha F$$

Digitized by Google

so wird mit hinreichender Genauigkeit

$$\frac{d.\Delta\delta K}{ndt} = \Delta\eta + (54)\Delta\alpha + (55)\Delta P + (56)\Delta Q \quad \ldots\ldots (78)$$

womit alle Variationsgleichungen abgeleitet sind.

§ 16. Berechnung der numerischen Werthe der im vor. § abgeleiteten Variationscoefficienten.

194.

Nehmen wir zuerst die Coefficienten von ΔT vor. Hiebei dürfen wir uns die folgende Abkürzung des Ausdrucks (20) erlauben,

$$\left(\frac{dT}{ndz}\right) = \left(\frac{dT_0}{dg}\right) + \left(\frac{d^2T_0}{dg^2}\right) n\delta z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3T_0}{dg^3}\right)(n\delta z)^2 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{d^4T_0}{dg^4}\right)(n\delta z)^3 + R\delta P + Y\delta Q$$

wo

$$R = \left(\frac{d^2T_0}{dPdg}\right) - F\left(\frac{d^2T_0}{dKdg}\right)$$
$$Y = \left(\frac{d^2T_0}{dQdg}\right)$$

gesetzt werden darf. Dieselben Abkürzungen sind auch bei der Berechnung von $\left(\frac{d\bar{G}}{ndz}\right)$, $\left(\frac{d\bar{\Sigma}}{ndz}\right)$ zulässig. Es ergab sich nun

γ, g, g'	$\left(\frac{dT_0}{dg}\right)$ cos	$\left(\frac{d^2T_0}{dg^2}\right) n\delta z$ cos	$\frac{1}{2}\left(\frac{d^3T_0}{dg^3}\right)(n\delta z)^2$ cos	$\frac{1}{6}\left(\frac{d^4T_0}{dg^4}\right)(n\delta z)^3$ cos	$R\delta P$ cos	$Y\delta Q$ cos
1.						
0,0,0	0	−104″869	−0″045	+0″065	+0″176	+0″178
−1,1,0	+1158″410	+96,468	−0,123	−0,107	+0,191	+0,137
0,1,0	−95,504	−247,733	−0,057	+0,120	−0,077	−0,070
−1,2,0	+63,550	+185,281	−0,040	−0,171	+0,040	+0,035
1,0,0	0	+57,391	−0,042	−0,047	+0,034	+0,025
0,2,0	−5,240	−42,566	−0,025	+0,064	+0,040	+0,040
	+3,924	+33,609	+0,011	−0,097	−0,018	−0,019
	0	+8,229	+0,005	−0,006	−0,022	−0,020
0,3,0	−0,324	−5,266	−0,002	+0,019		
	+0,256	+4,291	+0,004	−0,025		
	+0,008	+0,836	+0,01	−0,002		
0,−3,−1	−0,01	−0,24	+0,06			
	0,00	+0,04	−0,01			
	0,00	+0,20	−0,06			
0,−2,−1	−0,13	−1,57	+0,31			
	0	+0,31	−0,04			
	+0,10	+1,22	−0,32			

Digitized by Google

1.						
0, −1, −1	−2″41	−9″29	+0″84	+0″01		
	0	+2,32	−0,08	0,00		
	+1,60	+6,69	−0,98	−0,02		
0, 0, −1	0	−11,83	+0,04	+0,01	+0″02	+0″02
	+29,18	+6,87	+0,38	−0,01	+0,01	0,00
	+29,18	+4,20	−0,45	−0,01	0,00	0,00
0, 1, −1	−2,41	−13,43	−0,84	+0,01		
	+1,60	+10,19	+0,98	−0,02		
	0	+2,67	+0,06	0,00		
0, 2, −1	−0,13	−2,45	−0,37	+0,01		
	+0,10	+1,94	+0,38	−0,01		
	0	+0,47	+0,05	0,00		
0, 3, −1	−0,01	−0,29	−0,07			
	0,00	+0,24	+0,07			
	0,00	+0,04	+0,01			
0, −2, −2		−0,04	+0,02			
		+0,01	0,00			
		+0,03	−0,02			
0, −1, −2	−0,06	−0,33	+0,04			
	0	+0,08	0,00			
	+0,04	+0,23	−0,05			
0, 0, −2	0	−0,51	+0,01			
	+0,74	+0,27	+0,02			
	+0,74	+0,21	−0,03			
0, 1, −2	−0,06	−0,38	−0,05			
	+0,04	+0,30	+0,06			
	0	+0,07	0,00			
0, 2, −2		−0,07	−0,02			
		+0,05	+0,03			
		+0,01	0,00			
0, −1, −3		−0,01				
		0,00				
		+0,01				
0, 0, −3	0	−0,02				
	+0,02	+0,01				
	+0,02	+0,01				
0, 1, −3		−0,01				
		0,00				
		+0,01				
2.						
0, 1, 0		−0,06	+0,01			
		+0,04	−0,01			
		+0,02	0,00			
0, 2, 0		−0,10	+0,06			
		+0,08	−0,06			
		+0,02	−0,01			
0, 3, 0		−0,03	+0,02			
		+0,02	−0,03			
		+0,01	0,00			

Digitized by Google

2.						
0, −1, −1		−0″,02	+0″,04	+0″,01		
		0,00	−0,01	−0,01		
		+0,01	−0,04	0,00		
0, 0, −1	0	−0,01	+0,15	+0,01		
	+0″,12	−0,21	−0,02	−0,01		
	−0,01	+0,05	−0,16	−0,02		
0, 1, −1	+3,63	−5,05	−0,04	+0,02		
	−4,83	+2,64	+0,12	−0,02		
	0	+1,23	−0,11	−0,02		
0, 2, −1	−87,68	−34,31	−0,22	+0,03	−0″,10	+0″,01
	+43,44	+25,48	+0,25	−0,01	+0,05	0,00
	+44,06	+8,49	0,00	−0,01	+0,06	0,00
0, 3, −1	−10,84	−10,02	−0,11	+0,02		
	+6,39	+7,72	+0,12	−0,03		
	+3,22	+2,18	+0,01	0,00		
0, 4, −1	−1,06	−1,56	−0,03	+0,01		
	+0,68	+1,24	+0,03	−0,01		
	+0,23	+0,29	0,00	0,00		
0, −1, −2	−0,13	−0,26	+0,75			
	0	+0,08	−0,10			
	+0,14	+0,18	−0,78			
0, 0, −2	0	−0,56	+3,10			
	−14,52	+0,15	−0,48			
	+4,63	+0,03	−3,43			
0, 1, −2	−432,24	−1,65	+0,20		−0,07	−0,05
	+574,80	+13,13	+2,01		+0,07	+0,06
	0	−11,79	−2,39		+0,01	0,00
0, 2, −2	+10435,46	−3,82	−6,18		+1,10	+1,02
	−5170,46	+9,24	+7,36		−0,55	−0,49
	−5244,08	−5,17	+0,27		−0,55	−0,44
0, 3, −2	+1289,55	−1,32	−4,18		+0,15	+0,14
	−759,85	+1,48	+4,55		−0,09	−0,08
	−383,61	−0,02	+0,54		−0,09	−0,04
0, 4, −2	+125,82	−0,40	−1,02			
	−81,55	+0,34	+1,06			
	−27,62	+0,07	+0,13			
0, 5, −2	+11,24	−0,06	−0,17			
	−7,73	+0,05	+0,17			
	−2,01	+0,01	+0,02			
0, −1, −3	−0,01	−0,03	+0,07			
	0	+0,01	−0,01			
	+0,01	+0,02	−0,07			
0, 0, −3	0	−0,09	+0,27	−0,01		
	−0,85	+0,16	−0,04	+0,01		
	+0,27	+0,01	−0,30	+0,01		
0, 1, −3	−25,41	+2,86	+0,07	−0,03		
	+33,78	−0,01	+0,19	+0,02		
	0	−1,72	−0,25	+0,01		

Digitized by Google

2.						
0,2,−3	+613″37	+33″62	−0″59	−0″03	+0″18	+0″07
	−303,91	−24,19	+0,75	+0,04	−0,08	−0,03
	−308,24	−9,02	+0,01	+0,01	−0,09	−0,03
0,3,−3	+75,80	+11,82	−0,48	−0,02		
	−44,66	−9,01	+0,53	+0,03		
	−22,55	−2,67	+0,06	0,00		
0,4,−3	+7,40	+1,90	−0,12	−0,01		
	−4,79	−1,54	+0,13	+0,01		
	−1,62	−0,35	+0,02	0,00		
0,5,−3	+0,66	+0,23	−0,02			
	−0,46	−0,19	+0,02			
	−0,12	−0,04	0,00			
0,0,−4	0	−0,01	+0,02			
	−0,04	+0,01	0,00			
	+0,01	0,00	−0,02			
0,1,−4	−1,04	+0,20	+0,02			
	+1,38	−0,02	0,00			
	0	−0,10	−0,02			
0,2,−4	+25,01	+2,35	+0,03			
	−12,40	−1,70	−0,02			
	−12,57	−0,62	−0,01			
0,3,−4	+3,09	+0,87				
	−1,83	−0,67				
	−0,92	−0,20				
0,4,−4	+0,30	+0,14				
	−0,19	−0,11				
	−0,07	−0,03				
0,1,−5	−0,04	+0,02				
	+0,05	−0,01				
	0	0,00				
0,2,−5	+0,87	+0,11				
	−0,44	−0,08				
	−0,44	−0,03				
0,3,−5	+0,11	+0,04				
	−0,06	−0,04				
	−0,03	−0,01				
11.						
0,3,−2		−0,12				
		+0,08				
		+0,03				
0,2,−3		+0,27	−0,11			
		−0,33	+0,09			
		−0,05	+0,01			
0,3,−3		−3,22	−0,81			
		+2,31	+0,88			
		+0,82	+0,10			
0,4,−3		−2,68	−0,65			
		+2,02	+0,71			
		+0,64	+0,08			

Digitized by Google

11.						
0,5,−3		−0″,51	−0″,21			
		+0,40	+0,22			
		+0,11	+0,03			
0,1,−4		−0,06	+0,05	−0″,03		
		−0,20	−0,01	0,00		
		−0,03	−0,04	+0,05		
0,2,−4		−6,82	+0,03	−0,06		
		+14,03	+0,08	+0,04		
		+0,43	+0,01	+0,05		
0,3,−4		+223,17	−0,13	−0,10	+0″,03	−0″,03
		−161,45	+0,24	+0,15	−0,02	+0,02
		−56,76	+0,06	+0,03	−0,02	+0,02
0,4,−4		+150,13	−0,15	−0,09	−0,09	+0,09
		−113,19	+0,19	+0,15	+0,05	−0,05
		−35,56	+0,04	+0,01	+0,05	−0,05
0,5,−4		+28,56	−0,06	−0,05		
		−22,43	+0,07	+0,07		
		−5,64	+0,04	0,00		
0,6,−4		+3,89	−0,01			
		−3,14	+0,02			
		−0,66	0,00			
0,2,−5		−0,72	+0,06			
		+1,29	−0,03			
		−0,01	0,00			
0,3,−5		+22,96	+0,76	−0,01		
		−16,49	−0,82	+0,02		
		−5,85	−0,09	0,00		
0,4,−5		+18,53	+0,66	−0,02		
		−13,93	−0,72	+0,02		
		−4,43	−0,08	0,00		
0,5,−5		+3,64	+0,23	−0,01		
		−2,85	−0,25	+0,01		
		−0,73	−0,03	0,00		
0,3,−6		+1,46	+0,09			
		−1,04	−0,10			
		−0,37	−0,04			
0,4,−6		+1,39	+0,09			
		−1,05	−0,10			
		−0,33	−0,01			
0,5,−6		+0,27	+0,03			
		−0,21	−0,03			
		−0,05	0,00			
15.						
0,4,−6		+1,49	+2,38			
		−1,04	−2,56			
		−0,38	−0,30			
0,5,−6		+2,07	+3,00			
		−1,53	−3,28			
		−0,51	−0,38			

Digitized by Google

15.						
0,6,−6		+0″,94	+1″,40			
		−0,69	−1,50			
		−0,21	−0,18			

γ, g, g'	$\left(\frac{dG_0}{dg}\right)$ cos	$\left(\frac{d^2G_0}{dg^2}\right)n\partial z$ cos	$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2G_0}{dg^2}\right)(n\partial z)^2$ cos	$R\partial P$ cos	$Y\partial Q$ cos
1.					
0,0,0	0	−3″,30	0″,00	0″,00	0″,00
−1,1,0	+1158″,41	+18,34	−0,18	+0,30	+0,25
0,1,0	−95,30	−1,85	+0,02	0,00	0,00
−1,2,0	+63,55	+0,53	−0,09	0,00	0,00
1,0,0	0	+39,90	−0,06	+0,02	+0,02
0,2,0	−5,24	−0,05	+0,01	0,00	0,00
	+3,92	+0,01	−0,03	0,00	0,00
	0	+4,02	+0,01	−0,02	−0,02
0,3,0	−0,32	−0,01			
	+0,26	0,00			
	+0,01	+0,36			
0,−3,−1	−0,01	0,00			
	0,00	+0,02			
	0,00	0,00			
0,−2,−1	−0,13	+0,02	+0,01		
	0	+0,16	−0,03		
	+0,10	−0,03	0,00		
0,−1,−1	−2,41	+0,07	+0,01		
	0	+1,73	−0,08		
	+1,60	−0,41	−0,02		
0,0,−1	0	−0,26	+0,02	0,00	0,00
	+29,18	+3,05	−0,05	+0,01	+0,01
	+29,18	−1,00	+0,03	+0,01	+0,01
0,1,−1	−2,41	−0,27	−0,01		
	+1,60	+0,56	−0,01		
	0	+1,79	+0,07		
0,2,−1	−0,13	−0,05	−0,01		
	+0,10	+0,06	0,00		
	0	+0,25	+0,01		
0,3,−1	−0,01	0,00			
	0,00	0,00			
	0,00	+0,01			
0,−2,−2		+0,01			
		0,00			
		−0,02			
0,−1,−2	−0,06	+0,02			
	0	+0,05			
	+0,04	−0,02			

Digitized by Google

1.					
0,0,−2	0	0″00			
	+0″74	+0,13			
	+0,74	−0,02			
0,1,−2	−0,06	0,00			
	+0,04	+0,02			
	0	+0,05			
0,0,−3	0				
	+0,02				
	+0,02				
2.					
0,0,−1	0	−0,06	+0″01		
	+0,01	+0,02	0,00		
	−0,01	−0,05	−0,01		
0,1,−1	−2,43	−0,46	0,00		
	0	+0,25	−0,02		
	0	+0,70	−0,02		
0,2,−1	−0,13	−0,15	+0,02	0″00	0″00
	0	+0,12	−0,02	0,00	0,00
	+29,40	+5,60	0,00	+0,05	+0,01
0,3,−1	0,00	−0,03	+0,03		
	0	+0,02	−0,03		
	+1,61	+1,25	+0,01		
0,4,−1	0	−0,01			
	0	0,00			
	+0,10	+0,14			
0,−1,−2	−0,11	+0,10	+0,02		
	0	+0,05	−0,05		
	+0,05	−0,11	−0,01		
0,0,−2	0	+1,06	−0,01		
	−1,32	+0,18	−0,26		
	+1,32	−1,36	−0,01		
0,1,−2	+288,63	+0,46	0,00	0,00	0,00
	−0,07	+12,86	−0,21	0,00	0,00
	0	−13,17	+0,20	+0,01	−0,01
0,2,−2	+15,83	−1,03	0,00	0,00	0,00
	0,00	+7,50	−0,05	+0,01	+0,01
	−3499,57	−5,67	+0,56	−0,36	−0,28
0,3,−2	+0,98	−0,61	0,00	0,00	
	0	+0,97	−0,01	0,00	
	−191,98	−0,08	+0,32	−0,01	
0,4,−2	+0,06	−0,06	0,00		
	0	+0,09	0,00		
	−11,85	+0,05	+0,07		
0,5,−2	+0,01				
	0				
	−0,77				
0,0,−3	0	+0,13	−0,01		
	−0,08	+0,02	−0,01		
	+0,08	−0,09	0,00		

Digitized by Google

2.					
0,1,−3	+16″97	+0″52	0″00		
	0,00	+0,89	−0,02		
	0	−1,56	+0,05		
0,2,−3	+0,93	+0,09	0,00	0″00	0″00
	0	+0,71	+0,01	0,00	0,00
	−205,70	−6,23	+0,06	−0,05	−0,01
0,3,−3	+0,06	−0,05	+0,01		
	0	+0,08	−0,01		
	−11,28	−1,58	+0,04		
0,4,−3	0,00	0,00	−0,02		
	0,00	+0,01	+0,01		
	−0,70	−0,16	+0,02		
0,5,−3	0,00				
	0,00				
	−0,04				
0,1,−4	+0,69	+0,03			
	0	+0,04			
	0	−0,09			
0,2,−4	+0,04	−0,01			
	0	+0,03			
	−8,39	−0,43			
0,3,−4	0	0,00			
	0	−0,01			
	−0,46	−0,12			
0,4,−4	0	0,00			
	0	+0,01			
	−0,03	−0,02			
0,1,−5	+0,02				
	0				
	0				
0,2,−5	0	+0,01			
	0	0,00			
	−0,29	−0,02			
0,3,−5	0				
	0				
	−0,02				
11.					
0,2,−3		−0,05			
		0,00			
		−0,03			
0,3,−3		−0,05	+0,01		
		+0,02	0,00		
		+0,34	+0,07		
0,4,−3		0,00	0,00		
		0,00	0,00		
		+0,41	+0,05		
0,5,−3		+0,01			
		0,00			
		+0,06			

Digitized by Google

11.					
0,1,−4		−0″,03	0″,00		
		−0,01	−0,01		
		−0,01	+0,02		
0,2,−4		+3,12	−0,01		
		+0,09	+0,05		
		+0,25	+0,08		
0,3,−4		+1,82	−0,02	0″,00	0″,00
		+0,10	+0,08	0,00	0,00
		−37,91	+0,09	−0,01	+0,01
0,4,−4		+0,20	0,00	0,00	0,00
		+0,04	+0,03	0,00	0,00
		−22,36	+0,04	+0,03	−0,03
0,5,−4		0,00	−0,01		
		+0,02	+0,02		
		−2,89	+0,01		
0,6,−4		−0,01			
		0,00			
		−0,29			
0,2,−5		+0,33	+0,01		
		−0,17	+0,01		
		−0,03	0,00		
0,3,−5		+0,23	−0,01		
		+0,01	0,00		
		−3,90	−0,06		
0,4,−5		+0,03	0,00		
		+0,02	+0,02		
		−2,84	−0,05		
0,5,−5		+0,01	−0,01		
		0,00	0,00		
		−0,39	−0,02		
0,3,−6		+0,01			
		0,00			
		−0,23			
0,4,−6		+0,01			
		+0,01			
		−0,21			
0,5,−6		+0,01			
		0,00			
		−0,03			
15.					
0,4,−6		+0,02	+0,01		
		0,00	0,00		
		−0,25	−0,20		
0,5,−6		0,00	0,00		
		0,00	+0,02		
		−0,33	−0,24		
0,6,−6		0,00	0,00		
		0,00	0,00		
		−0,14	−0,10		

Digitized by Google

g, g'	$\left(\frac{d\Sigma_0}{dg}\right)$ cos	$\left(\frac{d^2\Sigma_0}{dg^2}\right) n\partial z$ cos	$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\Sigma_0}{dg^2}\right)(n\partial z)^2$ cos	$K\partial P$ cos	$Y\partial Q$ cos
1.					
0,0		−33″37	−0″02	+0″06	+0″06
1,0		−79,68	−0,03	−0,02	−0,02
2,0		−9,07	−0,02	+0,02	+0,02
3,0		−0,82			
−3,−1		−0,04	+0,01		
−2,−1		−0,33	+0,07		
−1,−1		−2,98	+0,26		
0,−1		−3,83	+0,01		
1,−1		−1,17	−0,27		
2,−1		−0,54	−0,09		
3,−1		−0,04	−0,02		
−2,−2		−0,01			
−1,−2		−0,11	+0,01		
0,−2		−0,18			
1,−2		−0,12	−0,02		
2,−2		−0,01			
2.					
1,0		−0,02			
2,0		−0,03	+0,02		
3,0		−0,01			
−1,−1	0″00	0,00	+0,01		
0,−1	0	+0,04	+0,05		
1,−1	+2,43	−1,46	−0,01		
2,−1	−29,27	−11,30	−0,08	−0,04	
3,−1	−2,44	−2,63	−0,04		
4,−1	−0,18	−0,30			
−1,−2	+0,09	−0,08	+0,15		
0,−2	0	−0,50	+0,97		
1,−2	−288,59	−0,69	+0,06	−0,03	−0,03
2,−2	+3483,74	−0,91	−2,00	+0,36	+0,34
3,−2	+287,00	−0,18	−1,18	+0,03	+0,03
4,−2	+21,00	−0,10	−0,22		
5,−2	+1,50	−0,01	−0,02		
−1,−3	+0,01	−0,01	+0,01		
0,−3	0	−0,09	+0,08		
1,−3	−16,46	+0,71	+0,01		
2,−3	+204,77	+11,11	−0,19	+0,05	+0,01
3,−3	+16,87	+3,27	−0,14		
4,−3	+1,24	+0,38	−0,02		
5,−3	+0,09	+0,03			
1,−4	−0,69	+0,05	+0,01		
2,−4	+8,35	+0,78	+0,01		
3,−4	+0,69	+0,25			
4,−4	+0,05	+0,02			
1,−5	−0,02				
2,−5	+0,29	+0,04			
3,−5	+0,02				

Digitized by Google

14.					
3, −2		−0″04			
4, −2		−0,04			
2, −3		+0,12	−0″03		
3, −3		−1,05	−0,27		
4, −3		−0,83	−0,19		
5, −3		−0,13	−0,05		
1, −4		0,00	+0,01		
2, −4		−3,84	+0,01		
3, −4		+73,81	−0,04		
4, −4		+45,46	−0,05	−0″03	+0″03
5, −4		+6,39	−0,01		
6, −4		+0,68			
2, −5		−0,40	+0,01		
3, −5		+7,57	+0,25		
4, −5		+5,71	+0,20		
5, −5		+0,82	+0,06		
3, −6		+0,49	+0,02		
4, −6		+0,43	+0,02		
5, −6		+0,05			
15.					
3, −6		−0,01	−0,04		
4, −6		+0,49	+0,79		
5, −6		+0,66	+0,93		
6, −6		+0,26	+0,38		
7, −6		+0,04	+0,07		

195.

Die folgende Tafel giebt die Summe der Glieder der Tafeln des vor. Art., und den daraus folgenden Ausdruck von $\left(\frac{d\bar{U}}{ndz}\right)$.

γ, g, g'	$\left(\frac{d\bar{T}}{ndz}\right)$ cos	$\left(\frac{d\bar{G}}{ndz}\right)$ cos	$\left(\frac{d\bar{\Sigma}}{ndz}\right)$ cos	$\left(\frac{d\bar{U}}{ndz}\right)$ cos
1.				
0,0,0	−104″495	−37″30	−33″27	−67″93
−1,1,0	+1254,976	+1177,12		+77,86
0,1,0	−343,321	−97,33	−79,75	−166,24
−1,2,0	+248,695	+63,99		+184,70
1,0,0	+57,361	+39,88		+17,48
0,2,0	−47,687	−5,28	−9,05	−33,36
	+37,410	+3,90		+33,51
	+8,186	+3,99		+4,20
0,3,0	−5,573	−0,33	−0,82	−4,42
	+4,523	+0,26		+4,26
	+0,843	+0,37		+0,47

Digitized by Google

1.				
0, −3, −1	−0″,19	−0″,04	−0″,03	−0″,15
	+0,03	+0,02		+0,01
	+0,14	0,00		+0,14
0, −2, −1	−1,39	−0,10	−0,26	−1,03
	+0,27	+0,13		+0,14
	+1,00	+0,07		+0,97
0, −1, −1	−10,85	−2,33	−2,72	−5,80
	+2,24	+1,65		+0,59
	+7,29	+1,17		+6,12
0, 0, −1	−11,74	−0,24	−3,82	−7,68
	+36,43	+32,20		+4,23
	+32,92	+28,23		+4,69
0, 1, −1	−16,37	−2,69	−4,44	−9,24
	+12,75	+2,15		+10,60
	+2,73	+1,86		+0,87
0, 2, −1	−2,94	−0,19	−0,63	−2,12
	+2,41	+0,16		+2,25
	+0,52	+0,29		+0,23
0, 3, −1	−0,37	−0,01	−0,06	−0,30
	+0,31	0,00		+0,31
	+0,05	+0,01		+0,04
0, −2, −2	−0,02	+0,01	−0,01	−0,02
	+0,01	0,00		+0,01
	+0,01	−0,02		+0,03
0, −1, −2	−0,35	−0,04	−0,10	−0,21
	+0,08	+0,05		+0,03
	+0,22	+0,02		+0,20
0, 0, −2	−0,50	0,00	−0,18	−0,32
	+1,03	+0,87		+0,16
	+0,92	+0,72		+0,20
0, 1, −2	−0,49	−0,06	−0,14	−0,29
	+0,10	+0,06		+0,31
	+0,07	+0,05		+0,02
0, 2, −2	−0,09		−0,01	−0,08
	+0,08			+0,08
	+0,01			+0,01
0, −1, −3	−0,01			−0,01
	0,00			0,00
	+0,01			+0,01
0, 0, −3	−0,02	0,00		−0,02
	+0,03	+0,02		+0,01
	+0,03	+0,02		+0,04
0, 1, −3	−0,01			−0,01
	0,00			0,00
	+0,01			+0,01
2.				
0, 1, 0	−0,05		−0,02	−0,03
	+0,03			+0,03
	+0,02			+0,02

2.				
0,2,0	−0″,04		−0″,01	−0″,03
	+0,02			+0,02
	+0,01			+0,01
0,3,0	−0,01		−0,01	0,00
	−0,01			−0,01
	+0,01			+0,01
0,−1,−1	+0,03		+0,01	+0,02
	−0,02			−0,02
	−0,03			−0,03
0,0,−1	+0,15	−0″,05	+0,09	+0,11
	−0,12	+0,03		−0,15
	−0,17	−0,07		−0,10
0,1,−1	−1,44	−2,89	+0,96	+0,49
	−2,07	+0,23		−2,32
	+1,10	+0,68		+0,42
0,2,−1	−122,27	−0,26	−40,69	−81,32
	+69,18	+0,10		+69,08
	+52,60	+35,06		+17,54
0,3,−1	−20,95	0,00	−5,08	−15,87
	+14,20	−0,01		+14,21
	+5,41	+2,87		+2,54
0,4,−1	−2,64	+0,01	−0,48	−2,15
	+1,94	0,00		+1,94
	+0,52	+0,24		+0,28
0,−1,−2	+0,36	+0,01	+0,16	+0,19
	−0,02	0,00		−0,02
	−0,46	−0,07		−0,39
0,0,−2	+2,54	+1,05	+0,47	+1,02
	−14,85	−1,40		−13,45
	+1,23	−0,05		+1,28
0,1,−2	−433,81	+289,09	−289,28	−433,62
	+590,07	+12,58		+577,49
	−14,17	−12,97		−1,20
0,2,−2	+10127,58	+14,80	+3481,53	+6931,25
	−5154,90	+7,47		−5162,37
	−5249,97	−3505,32		−1744,65
0,3,−2	+1281,34	+0,37	+285,70	+998,27
	−753,99	+0,96		−754,95
	−383,22	−194,75		−191,47
0,4,−2	+124,40	0,00	+20,68	+103,72
	−80,15	+0,09		−80,24
	−27,42	−11,73		−15,69
0,5,−2	+11,01	+0,01	+1,47	+9,53
	−7,51	0,00		−7,51
	−1,98	−0,77		−1,21
0,−1,−3	+0,03		+0,01	+0,02
	0,00			0,00
	−0,01			−0,01

Digitized by Google

2.

0,0,−3	+0″,17	+0″,12	−0″,01	+0″,06
	−0,72	−0,07		−0,65
	−0,01	−0,01		0,00
0,1,−3	−22,51	+17,49	−16,24	−23,76
	+33,98	+0,87		+33,11
	−1,96	−1,51		−0,45
0,2,−3	+646,62	+1,02	+215,75	+429,85
	−327,42	+0,72		−328,14
	−317,36	−211,93		−105,43
0,3,−3	+87,12	+0,02	+20,00	+67,10
	−53,11	+0,07		−53,18
	−25,16	−12,82		−12,34
0,4,−3	+9,17	−0,02	+1,60	+7,59
	−6,16	+0,02		−6,18
	−1,95	−0,84		−1,11
0,5,−3	+0,87	0,00	+0,12	+0,75
	−0,63	0,00		−0,63
	−0,16	−0,04		−0,12
0,0,−4	+0,01			+0,01
	−0,03			−0,03
	−0,01			−0,01
0,1,−4	−0,82	+0,72	−0,63	−0,91
	+1,36	+0,04		+1,32
	−0,12	−0,09		−0,03
0,2,−4	+27,39	+0,03	+9,14	+18,22
	−14,12	+0,03		−14,15
	−13,20	−8,82		−4,38
0,3,−4	+3,96	0,00	+0,94	+3,02
	−2,50	−0,01		−2,49
	−1,12	−0,58		−0,54
0,4,−4	+0,44	0,00	+0,07	+0,37
	−0,30	+0,01		−0,31
	−0,10	−0,05		−0,05
0,1,−5	−0,02	+0,02	−0,02	−0,02
	+0,04	0,00		+0,04
	0,00	0,00		0,00
0,2,−5	+0,98	+0,01	+0,33	+0,64
	−0,52	0,00		−0,52
	−0,47	−0,31		−0,16
0,3,−5	+0,15	0,00	+0,02	+0,13
	−0,10	0,00		−0,10
	−0,04	−0,02		−0,02
11.				
0,3,−2	−0,12		−0,04	−0,08
	+0,08			+0,08
	+0,03			+0,03
0,2,−3	+0,16	−0,05	+0,09	+0,12
	−0,24	0,00		−0,24
	−0,04	−0,03		−0,01

Digitized by Google

11.				
0,3,−3	−4″03	−0″04	−1″32	−2″67
	+3,19	+0,02		+3,17
	+0,92	+0,64		+0,34
0,4,−3	−3,33	0,00	−1,02	−2,34
	+2,73	0,00		+2,73
	+0,72	+0,46		+0,26
0,5,−3	−0,72	+0,01	−0,18	−0,55
	+0,61	0,00		+0,61
	+0,14	+0,06		+0,08
0,1,−4	−0,04	−0,03	+0,01	−0,02
	−0,21	−0,02		−0,19
	−0,02	+0,01		−0,01
0,2,−4	−0,85	+3,11	−3,83	−6,13
	+14,15	+0,14		+14,01
	+0,49	+0,33		+0,16
0,3,−4	+222,94	+1,80	+73,77	+147,37
	−161,06	+0,18		−161,24
	−56,67	−37,82		−18,85
0,4,−4	+149,89	+0,20	+45,11	+104,28
	−112,85	+0,07		−112,92
	−35,51	−22,32		−13,19
0,5,−4	+28,45	−0,01	+6,38	+22,08
	−22,29	+0,04		−22,33
	−5,63	−2,88		−2,75
0,6,−4	+3,88	−0,01	+0,68	+3,21
	−3,12	0,00		−3,12
	−0,66	−0,29		−0,37
0,2,−5	−0,66	+0,34	−0,39	−0,61
	+1,26	−0,16		+1,42
	−0,01	−0,03		+0,02
0,3,−5	+23,71	+0,22	+7,82	+15,67
	−17,29	+0,01		−17,30
	−5,94	−3,96		−1,98
0,4,−5	+19,17	+0,03	+5,91	+13,23
	−14,63	+0,04		−14,67
	−4,51	−2,89		−1,62
0,5,−5	+3,86	0,00	+0,88	+2,98
	−3,09	0,00		−3,09
	−0,76	−0,41		−0,35
0,3,−6	+1,55	+0,01	+0,51	+1,03
	−1,14	0,00		−1,14
	−0,38	−0,23		−0,15
0,4,−6	+1,48	+0,01	+0,45	+1,02
	−1,45	+0,01		−1,46
	−0,34	−0,21		−0,13
0,5,−6	+0,30	+0,01	+0,05	+0,24
	−0,24	0,00		−0,24
	−0,05	−0,03		−0,02

Digitized by Google

15.				
0,4,−6	+3,87	+0,03	+1,28	+2,56
	−3,60	0,00		−3,60
	−0,68	−0,47		−0,21
0,5,−6	+5,07	0,00	+1,59	+3,48
	−4,81	+0,02		−4,83
	−0,89	−0,57		−0,32
0,6,−6	+2,31	0,00	+0,64	+1,67
	−2,19	0,00		−2,19
	−0,39	−0,24		−0,15

Es ergaben sich hierauf die drei Producte

$$(1)_1 = \left(\frac{dU}{ndz}\right)\left\{(1+\nu)^2\,\frac{k^2}{k_0^2} - 1\right\}$$

$$(2)_1 = \left(\frac{d\bar{G}}{ndz}\right)\nu$$

$$(3)_1 = \left(\frac{d\Sigma}{ndz}\right)(2\nu + \nu^2)$$

der Gleichung (60) des Art. 183, und hierauf $\left(\frac{dT}{ndz}\right)$ wie folgt.

γ, g, g'	$\left(\frac{d\bar{T}}{ndz}\right)$ cos	$(1)_1$ cos	$(2)_1$ cos	$(3)_1$ cos	$\left(\frac{dT}{ndz}\right)$ cos
1.					
0,0,0	−104,495	−79,031	−13,16	−22,297	−207,339
−1,1,0	+1254,976	+77,506	+5,323		+1337,805
0,1,0	−343,321	−68,883	−0,566	−34,938	−447,708
−1,2,0	+248,695	+53,366	+0,457		+302,518
1,0,0	+57,364	+13,040	+18,327		+88,698
0,2,0	−47,687	−8,344	−0,044	−3,775	−59,847
	+37,440	+6,426	+0,035		+43,871
	+8,186	+1,463	+1,459		+11,108
0,3,0	−5,573	−0,859	−0,004	−0,315	−6,751
	+4,523	+0,672	+0,004		+5,199
	+0,843	+0,124	+0,098		+1,062
0,−3,−1	−0,19	−0,04		−0,02	−0,25
	+0,03	+0,01			+0,04
	+0,14	+0,03			+0,17
0,−2,−1	−1,39	−0,29	−0,01	−0,13	−1,82
	+0,27	+0,04	+0,05		+0,36
	+1,00	+0,22	+0,01		+1,23
0,−1,−1	−10,85	−2,22	−0,05	−1,14	−14,26
	+2,24	+0,39	+0,72		+3,35
	+7,29	+1,65	+0,14		+9,08
0,0,−1	−11,74	−8,63	−0,13	−2,52	−23,02
	+36,43	+4,27	+0,66		+41,36
	+32,92	+4,22	+0,50		+37,64

Digitized by Google

1.					
0, 1, −1	−16″37	−3″74	−0″06	−1″92	−22″09
	+12,75	+3,06	−0,11		+15,70
	+2,73	+0,61	+0,84		+4,18
0, 2, −1	−2,94	−0,43	+0,01	−0,20	−3,56
	+2,41	+0,35	−0,01		+2,57
	+0,52	+0,07	+0,07		+0,66
0, 3, −1	−0,37	−0,04	0,00	−0,02	−0,43
	+0,31	+0,03	0,00		+0,34
	+0,05	0,00	+0,01		+0,06
0, −2, −2	−0,02	−0,01			−0,03
	+0,01	0,00			+0,01
	+0,01	+0,01			+0,02
0, −1, −2	−0,35	−0,07		−0,04	−0,46
	+0,08	+0,01	+0,02		+0,11
	+0,22	+0,05	+0,01		+0,28
0, 0, −2	−0,50	−0,36		−0,11	−0,97
	+1,03	+0,18	+0,03		+1,24
	+0,92	+0,18	+0,02		+1,12
0, 1, −2	−0,49	−0,10		−0,08	−0,67
	+0,40	+0,09	−0,01		+0,48
	+0,07	+0,01	+0,02		+0,10
0, 2, −2	−0,09	−0,01		−0,01	−0,11
	+0,08	+0,01			+0,09
	+0,01	0,00			+0,01
0, −1, −3	−0,01				−0,01
	0,00				0,00
	+0,01				+0,01
0, 0, −3	−0,02	−0,01			−0,03
	+0,03				+0,03
	+0,03				+0,03
0, 1, −3	−0,01				−0,01
	0,00				0,00
	+0,01				+0,01
2.					
0, 1, 0	−0,05	−0,01		−0,01	−0,07
	+0,03	+0,01			+0,04
	+0,02	−0,01	+0,01		+0,02
0, 2, 0	−0,04	+0,01			−0,03
	+0,02	−0,01			+0,01
	+0,01	0,00	−0,01		0,00
0, 3, 0	−0,01				−0,01
	−0,01				−0,01
	+0,01				+0,01
0, −1, −1	+0,03	+0,01		+0,01	+0,05
	−0,02	−0,01			−0,03
	−0,03	−0,01			−0,04
0, 0, −1	+0,15	+0,13	−0,03	+0,09	+0,34
	−0,12	−0,13	−0,01		−0,26
	−0,17	−0,08			−0,25

Digitized by Google

2.					
0, 1, −1	−1,44	−1,67	+0,04	−0,90	−3,97
	−2,09	+1,37	−0,10		−0,82
	+1,10	+0,30	+0,32		+1,72
0, 2, −1	−122,27	+1,03	+0,04	+0,83	−120,37
	+69,18	−0,71	−0,06		+68,41
	+52,60	−0,32	−0,48		+51,80
0, 3, −1	−20,95	+1,51	+0,04	+0,74	−18,69
	+14,20	−1,14			+13,06
	+5,41	−0,37	−0,34		+4,70
0, 4, −1	−2,64	+0,24		+0,08	−2,32
	+1,94	−0,18			+1,76
	+0,52	−0,05	−0,03		+0,44
0, −1, −2	+0,36	+0,24	+0,04	+0,10	+0,74
	−0,02	−0,03	−0,02		−0,07
	−0,46	−0,25	−0,03		−0,74
0, 0, −2	+2,51	+1,33	+0,55	+0,74	+5,13
	−14,85	+0,43	−0,25		−14,97
	+1,23	−1,74	−0,53		−1,04
0, 1, −2	−433,81	+7,95	−1,50	+5,95	−421,41
	+390,07	−4,96	−6,00		+379,11
	−14,47	−3,73	−6,70		−24,60
0, 2, −2	+10427,58	−22,61	+0,47	−44,47	+10360,97
	−5154,90	+17,84	−4,64		−5141,70
	−5249,97	+4,83	+18,40		−5226,74
0, 3, −2	+1284,34	+3,51	+0,38	−1,74	+1286,49
	−753,99	−2,99	−0,45		−757,43
	−383,22	−0,92	+0,18		−383,96
0, 4, −2	+124,10	+1,07	+0,04	+0,02	+125,23
	−80,15	−0,88	−0,04		−81,07
	−27,42	−0,24	−0,04		−27,67
0, 5, −2	+11,01	+0,16		+0,01	+11,18
	−7,51	−0,13			−7,64
	−1,98	−0,03	−0,01		−2,02
0, −1, −3	+0,03	+0,01			+0,04
	0,00	0,00			0,00
	−0,04	−0,02			−0,06
0, 0, −3	+0,17	+0,06	+0,07	+0,02	+0,32
	−0,72	+0,08	−0,02		−0,66
	−0,01	−0,14	−0,05		−0,20
0, 1, −3	−22,51	+1,84	−0,06	+0,99	−19,74
	+33,98	−1,21	−0,42		+32,35
	−1,96	−0,66	−0,77		−3,39
0, 2, −3	+646,62	−0,02		−2,19	+644,41
	−327,42	+0,10	−0,45		−327,77
	−317,36	−0,07	+0,75		−316,68
0, 3, −3	+87,12	−1,12	+0,03	−0,93	+85,10
	−53,11	+0,78	−0,04		−52,37
	−25,16	+0,31	+0,43		−24,42

Digitized by Google

2.					
0,4,−3	+9″,17	−0″,16		−0″,09	+8″,92
	−6,16	+0,10			−6,06
	−1,95	+0,04	+0″,03		−1,88
0,5,−3	+0,87	−0,02		−0,01	+0,84
	−0,63	+0,01			−0,62
	−0,16				−0,16
0,0,−4	+0,01				+0,01
	−0,03	+0,01			−0,02
	−0,01				−0,01
0,1,−4	−0,82	+0,11		+0,06	−0,65
	+1,36	−0,08	−0,02		+1,26
	−0,12	−0,04	−0,05		−0,21
0,2,−4	+27,39	+0,06		−0,07	+27,38
	−14,12	−0,04	−0,03		−14,19
	−13,20	−0,02	+0,04		−13,21
0,3,−4	+3,96	−0,09		−0,07	+3,80
	−2,50	+0,07			−2,43
	−1,12	+0,02	+0,03		−1,07
0,4,−4	+0,44	−0,01		−0,01	+0,42
	−0,30	+0,01			−0,29
	−0,10	+0,01			−0,09
0,1,−5	−0,02	+0,01			−0,01
	+0,04				+0,04
	0,00				0,00
0,2,−5	+0,98	+0,01			+0,99
	−0,52				−0,52
	−0,47				−0,47
0,3,−5	+0,15	−0,01			+0,14
	−0,10	+0,01			−0,09
	−0,04				−0,04
11.					
0,3,−2	−0,12	+0,04		+0,02	−0,06
	+0,08	−0,03			+0,05
	+0,03	−0,01	−0,01		+0,01
0,2,−3	+0,16	−0,05	+0,02	−0,02	+0,11
	−0,24	+0,09			−0,15
	−0,04	−0,01	−0,01		−0,06
0,3,−3	−4,03	+1,06	+0,03	+0,63	−2,31
	+3,19	−0,81			+2,38
	+0,92	−0,27	−0,30		+0,35
0,4,−3	−3,33	+2,08		+0,66	−0,59
	+2,73	−1,68			+1,05
	+0,72	−0,47	−0,29		−0,04
0,5,−3	−0,72	+0,45		+0,10	−0,17
	+0,64	−0,38			+0,24
	+0,14	−0,08	−0,04		+0,02
0,1,−4	−0,04	−0,13	−0,04	+0,06	−0,15
	−0,21	+0,27	+0,01		+0,07
	−0,02	−0,04	+0,01		−0,02

Digitized by Google

11.					
0,2,−4	−6″85	+5″16	−1″47	+2″40	−1″06
	+14,15	−5,90	−0,40		+8,15
	+0,49	−0,38	+0,46		+0,57
0,3,−4	+222,94	−53,87	−1,45	−33,62	+134,30
	−161,06	+37,31	−0,43		−123,88
	−56,67	+14,81	+17,85		−24,01
0,4,−4	+149,89	−90,30	−0,11	−28,65	+30,83
	−112,85	+67,31	−0,05		−45,59
	−35,51	+22,25	+13,92		+0,66
0,5,−4	+28,45	−16,13	−0,01	−3,50	+8,81
	−22,29	+12,16	−0,01		−10,14
	−5,63	+3,27	+1,36		−1,00
0,6,−4	+3,88	−1,97		−0,31	+1,60
	−3,12	+1,51			−1,61
	−0,66	+0,33	+0,11		−0,22
0,2,−5	−0,66	+0,49	−0,15	+0,21	−0,11
	+1,26	−0,59	−0,01		+0,66
	−0,01	−0,03	+0,05		+0,01
0,3−5	+23,71	−5,30	−0,15	−3,46	+14,80
	−17,29	+3,60	−0,02		−13,71
	−5,94	+1,18	+1,84		−2,62
0,4,−5	+19,17	−11,59	−0,02	−3,75	+3,81
	−14,63	+8,76	−0,01		−5,88
	−4,51	+2,83	+1,81		+0,13
0,5,−5	+3,86	−2,19		−0,49	+1,18
	−3,09	+1,69			−1,40
	−0,76	+0,43	+0,18		−0,15
0,3,−6	+1,55	−0,32	−0,01	−0,21	+1,01
	−1,14	+0,21			−0,93
	−0,38	+0,09	+0,11		−0,18
0,4,−6	+1,18	−0,89		−0,29	+0,30
	−1,15	+0,68			−0,47
	−0,34	+0,22	+0,14		+0,02
0,5,−6	+0,30	−0,17		−0,04	+0,09
	−0,24	+0,14			−0,10
	−0,05	+0,03	+0,01		−0,01
15.					
0,4,−6	+3,87	−1,46	−0,03	−0,82	+1,56
	−3,60	+1,39			−2,21
	−0,68	+0,24	+0,29		−0,15
0,5,−6	+5,07	−3,13	−0,01	−1,19	+0,74
	−4,81	+3,25			−1,56
	−0,89	+0,46	+0,41		−0,02
0,6,−6	+2,31	−1,40		−0,49	+0,42
	−2,19	+1,52			−0,67
	−0,39	+0,16	+0,16		−0,07

Digitized by Google

196.

Das Resultat der Berechnung der Ausdrücke (61), (62), (63), (64) ist in der folgenden Tafel enthalten, und so einfach, dass keine Bemerkungen dazu nöthig sind.

γ, g, g'	D sin	$-D\frac{\nu}{1+\nu}$ sin	$\left(\frac{dT}{d\nu}\right)$ sin	E sin	$E\delta\frac{h}{h_0}$ sin	$\left(\frac{dT}{d\frac{h_0}{h}}\right)$ sin
1.						
−1,1,0	+1143″,213	+20″,069	+1163″,282	−21″,358	−0″,471	−21″,529
0,1,0	−448,075	+55,329	−392,746	+236,782	−1,347	+235,435
−1,2,0	+187,896	−19,479	+168,717	−156,156	+0,449	−155,707
1,0,0	+232,301	−36,093	+196,208	−80,818	+0,866	−79,952
0,2,0	−37,544	+5,792	−31,752	+26,400	−1,842	+24,558
	+20,555	−2,443	+18,112	−19,250	+0,898	−18,352
	+7,557	−2,347	+5,210	−4,882	+0,919	−3,963
0,3,0	−3,170	+0,470	−2,700	+2,506	−0,176	+2,330
	+1,957	−0,230	+1,727	−1,894	+0,099	−1,795
	+0,517	−0,133	+0,384	−0,374	+0,050	−0,324
0,−3,−1	+0,11	−0,01	+0,10	−0,10		−0,10
	−0,02		−0,02	+0,02		+0,02
	−0,07		−0,07	+0,07		+0,07
0,−2,−1	+1,12	−0,20	+0,92	−0,82	+0,04	−0,78
	−0,26	+0,09	−0,17	+0,17	−0,03	+0,14
	−0,56	+0,10	−0,46	+0,54	−0,03	+0,51
0,−1,−1	+14,08	−1,86	+12,22	−7,96	+0,11	−7,85
	−6,87	+1,15	−5,72	+2,84	−0,07	+2,77
	−5,60	+0,70	−4,90	+5,01	−0,07	+4,94
0,0,−1	+1,68	−0,24	+1,44	−1,21	−0,04	−1,25
	+29,84	+0,98	+30,82	−0,75	+0,02	−0,73
	−27,67	−0,64	−28,31	+1,94	+0,04	+1,90
0,1,−1	−22,35	+3,15	−19,20	+13,28	−0,08	+13,20
	+10,03	−0,94	+9,09	−8,97	+0,03	−8,94
	+10,39	−2,13	+8,26	−4,48	+0,06	−4,42
0,2,−1	−2,34	+0,31	−2,03	+1,68	−0,12	+1,80
	+1,35	−0,16	+1,19	−1,30	+0,05	−1,25
	+0,46	−0,10	+0,36	−0,28	+0,06	−0,22
0,3,−1	−0,22	+0,03	−0,19	+0,16	−0,01	+0,15
	+0,14	−0,01	+0,13	−0,14	+0,01	−0,13
	+0,03	−0,01	+0,02	−0,03		−0,03
0,−2,−2	+0,02		+0,02	−0,02		−0,02
	0,00		0,00	0,00		0,00
	−0,01		−0,01	+0,01		+0,01
0,−1,−2	+0,43	−0,07	+0,36	−0,26	+0,02	−0,24
	−0,21	+0,05	−0,16	+0,09	−0,01	+0,08
	−0,16	+0,02	−0,14	+0,16	−0,01	+0,15

Digitized by Google

1.						
0, 0, −2	+0″13	−0″03	+0″10	−0″09		−0″09
	+0,73	+0,05	+0,78	−0,02		−0,02
	−0,72	0,00	−0,72	+0,11		+0,11
0, 1, −2	−0,69	+0,11	−0,58	+0,42		+0,42
	+0,32	−0,04	+0,28	−0,29	+0″04	−0,28
	+0,31	−0,07	+0,24	−0,14	+0,04	−0,13
0, 2, −2	−0,08		−0,08	+0,05		+0,05
	+0,04		+0,04	−0,04		−0,04
	+0,01		+0,01	−0,01		−0,01
0, −1, −3	+0,01		+0,01	−0,01		−0,01
	−0,01		−0,01	+0,01		+0,01
	0,00		0,00	0,00		0,00
0, 0, −3	+0,01		+0,01	+0,01		+0,01
	+0,01		+0,01	0,00		0,00
	−0,02		−0,02	+0,01		+0,01
0, 1, −3	−0,02		−0,02	+0,02		+0,02
	0,00		0,00	0,00		0,00
	+0,01		+0,01	0,00		0,00
2.						
0, 1, 0	−0,08		−0,08	+0,05		+0,05
	+0,02		+0,02	−0,02		−0,02
	+0,03		+0,03	−0,02		−0,02
0, 2, 0	−0,04		−0,04	+0,03		+0,03
	+0,01		+0,01	−0,01		−0,01
	+0,02		+0,02	−0,01		−0,01
0, 3, 0	0,00		0,00	−0,01		−0,01
	−0,01		−0,01	+0,01		+0,01
	0,00		0,00	0,00		0,00
0, −1, −1	−0,03		−0,03	+0,02		+0,02
	+0,01		+0,01	−0,01		−0,01
	+0,02		+0,02	−0,02		−0,02
0, 0, −1	+0,12	−0,07	+0,05	−0,08	−0,01	−0,09
	−0,10	+0,04	−0,06	+0,13		+0,13
	+0,12	+0,04	+0,16	+0,11	+0,01	+0,12
0, 1, −1	+2,81	+1,46	+4,27	−2,86	−0,02	−2,88
	−2,68	−0,41	−3,09	+2,80	−0,01	+2,79
	−1,88	−1,08	−2,96	+1,26	+0,02	+1,28
0, 2, −1	−119,95	−1,21	−121,16	+80,07	+0,31	+80,38
	+45,41	+0,46	+45,87	−45,37	−0,17	−45,54
	+69,41	+0,72	+70,13	−34,56	−0,12	−34,68
0, 3, −1	−13,02	−1,14	−15,13	+9,93	0,00	+9,93
	+6,82	+0,38	+7,20	−6,82	−0,01	−6,83
	+3,56	+0,70	+4,26	−2,07	+0,02	−2,05
0, 4, −1	−1,22	−0,14	−1,33	+1,00		+1,00
	+0,75	+0,05	+0,80	−0,75		−0,75
	+0,24	+0,05	+0,29	−0,16		−0,16
0, −1, −2	−0,35	+0,20	−0,15	+0,10	−0,06	+0,04
	+0,28	−0,05	+0,23	−0,16	+0,02	−0,14
	+0,24	−0,12	+0,12	−0,23	+0,06	−0,17

2.

0, 0, −2	+18″70	+1″99	+20″69	−48″86	−0″09	−48″95
	−27,13	−0,90	−28,03	+26,41	+0,12	+26,23
	−4,60	−1,06	−5,66	+4,15	+0,07	+4,22
0, 1, −2	−1145,74	−8,17	−1153,91	+861,58	+3,74	+865,32
	+579,88	+9,70	+589,58	−572,97	−2,58	−575,55
	+688,99	−0,58	+688,41	−383,86	−1,62	−385,48
0, 2, −2	+10349,62	+66,73	+10416,35	−6905,89	−32,45	−6938,34
	−3426,79	−17,85	−3444,64	+3429,12	+16,10	+3445,22
	−6942,64	−50,07	−6992,68	+3475,72	+16,32	+3492,04
0, 3, −2	+859,34	+1,94	+861,28	−669,55	−4,65	−674,20
	−379,21	−0,99	−380,20	+379,43	+2,42	+381,85
	−289,72	+0,22	−289,50	+193,80	+1,56	+195,36
0, 4, −2	+62,93	−0,09	+62,84	−52,56	−0,46	−53,02
	−32,44	0,00	−32,44	+32,46	+0,26	+32,72
	−14,64	+0,11	−14,53	+10,71	+0,11	+10,82
0, 5, −2	+4,49	−0,01	+4,48	−3,89	−0,04	−3,93
	−2,55	0,00	−2,55	+2,55	+0,01	+2,56
	−0,83	−0,01	−0,84	+0,63	0,00	+0,63
0, −1, −3	−0,03		−0,03	+0,01		+0,01
	+0,02		+0,02	−0,02		−0,02
	+0,03		+0,03	−0,03		−0,03
0, 0, −3	+0,70	+0,21	+0,91	−0,84	−0,01	−0,85
	−1,38	−0,10	−1,48	+1,31	0,00	+1,31
	−0,17	−0,10	−0,27	+0,14	+0,01	+0,15
0, 1, −3	−63,93	−1,29	−65,22	+48,49	+0,30	+48,69
	+33,67	+0,89	+34,56	−33,15	−0,15	−33,30
	+38,62	+0,50	+39,12	−21,44	−0,07	−21,51
0, 2, −3	+643,20	+3,29	+646,49	−429,27	−2,13	−431,40
	−218,25	−0,68	−218,93	+218,47	+1,05	+219,52
	−419,78	−2,58	−422,36	+210,50	+1,04	+211,54
0, 3, −3	+57,90	+1,33	+59,23	−44,83	−0,40	−45,23
	−26,70	−0,47	−27,17	+26,72	+0,23	+26,95
	−18,65	−0,82	−19,47	+12,20	+0,14	+12,34
0, 4, −3	+4,60	+0,13	+4,73	−3,82	−0,04	−3,86
	−2,49	−0,08	−2,57	+2,50	+0,01	+2,51
	−1,02	−0,07	−1,09	+0,73		+0,73
0, 5, −3	+0,36		+0,36	−0,30		−0,30
	−0,21		−0,21	+0,21		+0,21
	−0,08		−0,08	+0,06		+0,06
0, 0, −4	+0,04		+0,04	−0,04		−0,04
	−0,05		−0,05	+0,05		+0,05
	−0,01		−0,01	+0,01		+0,01
0, 1, −4	−2,49	−0,08	−2,57	+1,92	+0,01	+1,93
	+1,36	+0,05	+1,41	−1,33	−0,01	−1,34
	+4,52	+0,04	+4,56	−0,84		−0,84
0, 2, −4	+27,31	+0,12	+27,43	−18,23	−0,09	−18,32
	−9,42	−0,03	−9,45	+9,44	+0,04	+9,48
	−17,46	−0,10	−17,56	+8,77	+0,04	+8,81

2.						
0,3,−4	+2″,62	+0″,11	+2″,73	−2″,02	−0″,01	−2″,03
	−1,25	−0,05	−1,30	+1,25	+0,01	+1,26
	−0,81	−0,07	−0,88	+0,53		+0,53
0,4,−4	+0,22		+0,22	−0,18		−0,18
	−0,12		−0,12	+0,12		+0,12
	−0,06		−0,06	+0,03		+0,03
0,1,−5	−0,08		−0,08	+0,06		+0,06
	+0,04		+0,04	−0,04		−0,04
	+0,05		+0,05	−0,02		−0,02
0,2,−5	+0,97		+0,97	−0,65		−0,65
	−0,34		−0,34	+0,34		+0,34
	−0,61		−0,61	+0,31		+0,31
0,3,−5	+0,10		+0,10	−0,08		−0,08
	−0,05		−0,05	+0,05		+0,05
	−0,03		−0,03	+0,02		+0,02
11.						
0,3,−2	−0,06	−0,03	−0,09	+0,04		+0,04
	+0,04	+0,01	+0,05	−0,04		−0,04
	+0,01	+0,02	+0,03	0,00		0,00
0,2,−3	+0,13	+0,04	+0,17	−0,10	+0,04	−0,06
	−0,15	−0,03	−0,18	+0,15	−0,02	+0,13
	0,00	−0,02	−0,02	−0,02	−0,02	−0,04
0,3,−3	−2,40	−0,93	−3,33	+1,67	−0,10	+1,77
	+1,60	+0,33	+1,93	−1,60	−0,06	−1,66
	+0,51	+0,55	+1,06	−0,17	−0,04	−0,21
0,4,−3	−0,41	−0,98	−1,39	+0,09	−0,34	−0,25
	+0,61	+0,36	+0,97	−0,61	+0,18	−0,43
	−0,30	+0,57	+0,27	+0,44	+0,17	+0,61
0,5,−3	−0,10	−0,15	−0,25	+0,06	−0,05	+0,01
	+0,12	+0,07	+0,19	−0,12	+0,03	−0,09
	−0,01	+0,05	+0,04	+0,03		+0,03
0,1,−4	−0,43	+0,01	−0,42	+0,37	+0,18	+0,55
	0,00	−0,09	−0,09	−0,01	−0,11	−0,12
	+0,23	+0,04	+0,27	−0,23	−0,09	−0,32
0,2,−4	−2,62	−4,47	−7,09	+2,21	−0,84	+1,37
	+8,10	+2,53	+10,63	−8,04	+0,23	−7,81
	−4,20	+2,56	−1,64	+3,52	+0,50	+4,02
0,3,−4	+137,79	+49,35	+187,14	−96,45	−8,11	−104,56
	−82,90	−15,77	−98,67	+82,94	+4,53	+87,47
	−33,70	−33,09	−66,79	+12,62	+3,76	+16,38
0,4,−4	+20,92	+42,62	+63,54	−6,20	+14,87	+8,67
	−26,07	−14,63	−40,70	+26,08	−7,21	+18,87
	+13,54	−27,00	−13,46	−20,43	−7,72	−28,15
0,5,−4	+4,64	+5,26	+9,90	−2,89	+2,03	−0,86
	−4,66	−2,17	−6,83	+4,66	−1,08	+3,58
	+0,58	−2,30	−1,72	−1,25	−0,72	−1,97
0,6,−4	+0,70	+0,48	+1,18	−0,53	+0,19	−0,34
	−0,62	−0,22	−0,84	+0,62	−0,11	+0,51
	−0,01	−0,16	−0,17	−0,04	−0,05	−0,09

Digitized by Google

11.						
0,2,−5	−0″,30	−0″,46	−0″,76	+0″,26	−0″,07	+0″,19
	+0,85	+0,25	+1,10	−0,85	+0,02	−0,83
	−0,40	+0,27	−0,13	+0,33	+0,04	+0,37
0,3,−5	+15,23	+5,06	+20,29	−10,72	−0,99	−11,71
	−9,14	−1,62	−10,76	+9,15	+0,55	+9,70
	−3,85	−3,35	−7,20	+1,57	+0,47	+2,04
0,4,−5	+2,71	+5,59	+8,30	−0,78	+1,91	+1,13
	−3,43	−1,94	−5,37	+3,43	−0,93	+2,50
	+1,72	−3,50	−1,78	−2,62	−0,97	−3,59
0,5,−5	+0,65	+0,72	+1,37	−0,40	+0,28	−0,12
	−0,66	−0,31	−0,97	+0,66	−0,16	+0,50
	+0,07	−0,33	−0,26	−0,16	−0,10	−0,26
0,3,−6	+1,03	+0,32	+1,35	−0,74	−0,07	−0,81
	−0,62	−0,09	−0,71	+0,62	+0,03	+0,65
	−0,27	−0,20	−0,47	+0,12	+0,03	+0,15
0,4,−6	+0,22	+0,43	+0,65	−0,07	+0,14	+0,07
	−0,27	−0,16	−0,43	+0,27	−0,07	+0,20
	+0,13	−0,27	−0,14	−0,20	−0,07	−0,27
0,5,−6	+0,05	+0,05	+0,10	−0,04	+0,01	−0,03
	−0,05	−0,01	−0,06	+0,05		+0,05
	0,00	0,00	0,00	−0,01		−0,01
13.						
0,4,−6	+1,61	+1,17	+2,78	−1,14	−0,12	−1,26
	−1,46	−0,56	−2,02	+1,46	+0,10	+1,56
	−0,18	−0,49	−0,67	0,00	+0,01	+0,01
0,5,−6	+0,59	+1,49	+2,08	−0,21	+0,37	+0,16
	−0,94	−0,72	−1,66	+0,94	−0,25	+0,69
	+0,17	−0,63	−0,46	−0,32	−0,13	−0,45
0,6,−6	+0,30	+0,49	+0,79	−0,19	+0,03	−0,16
	−0,36	−0,26	−0,62	+0,36	−0,08	+0,28
	−0,03	−0,19	−0,22	0,00	+0,05	+0,05

197.

Es ist jetzt die Berechnung der im Art. 185 mit α, β, etc. bezeichneten Functionen vorzunehmen, die nach den folgenden Ausdrücken auszuführen ist, in welchen der Kürze wegen allenthalben f und r statt f_0 und r_0 steht.

$$\alpha = \frac{r}{a}\cos f + \frac{\mathrm{d}.r\cos f}{a\mathrm{d}g}n\delta z + \tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2.r\cos f}{a\mathrm{d}g^2}(n\delta z)^2 + \text{etc. ...}$$

$$\beta = \frac{r}{a}\sin f + \frac{\mathrm{d}.r\sin f}{a\mathrm{d}g}n\delta z + \tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2.r\sin f}{a\mathrm{d}g^2}(n\delta z)^2 + \text{etc. ...}$$

$$\alpha' = \frac{\mathrm{d}.r\cos f}{a\mathrm{d}g} + \frac{\mathrm{d}^2.r\cos f}{a\mathrm{d}g^2}n\delta z + \tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^3.r\cos f}{a\mathrm{d}g^3}(n\delta z)^2 + \text{etc. ...}$$

$$\beta' = \frac{\mathrm{d}.r\sin f}{a\mathrm{d}g} + \frac{\mathrm{d}^2.r\sin f}{a\mathrm{d}g^2}n\delta z + \tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^3.r\sin f}{a\mathrm{d}g^3}(n\delta z)^2 + \text{etc. ...}$$

Digitized by Google

$$\alpha'' = \frac{d^2 . r \cos f}{a d g^2} + \frac{d^3 . r \cos f}{a d g^3} n \delta z + \tfrac{1}{2} \frac{d^4 . r \cos f}{a d g^4} (n \delta z)^2 + \text{etc.} \ldots$$

$$\beta'' = \frac{d^2 . r \sin f}{a d g^2} + \frac{d^3 . r \sin f}{a d g^3} n \delta z + \tfrac{1}{2} \frac{d^4 . r \sin f}{a d g^4} (n \delta z)^2 + \text{etc.} \ldots$$

Man verfährt hier am Einfachsten, wenn man ursprünglich γ statt g in die Functionen $\frac{r}{a} \cos f$ und $\frac{r}{a} \sin f$ setzt, und damit die Producte für α und β rechnet. Wenn dieses geschehen ist, kann man durch einfache Differentiationen nach γ die Glieder der anderen vier Functionen erhalten. Da alle diese Functionen hier mit $\frac{y}{\sqrt{1-e^2}}$ multiplicirt vorkommen, so habe ich diesen Factor sogleich zugefügt. Durch die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\tfrac{r_0}{a} \cos f_0 = & -\tfrac{3}{2} e \\
& + (1 - \tfrac{3}{8} e^2 + \tfrac{5}{192} e^4 \mp \ldots) \cos g \\
& + (\tfrac{1}{2} e - \tfrac{1}{3} e^3 + \tfrac{1}{16} e^5 \mp \ldots) \cos 2g \\
& + (\tfrac{3}{8} e^2 - \tfrac{45}{128} e^4 + \ldots) \cos 3g \\
& + (\tfrac{1}{3} e^3 - \tfrac{2}{5} e^5 + \ldots) \cos 4g \\
& + \tfrac{125}{384} e^4 \cos 5g \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{r_0}{a} \sin f_0 = & (1 - \tfrac{5}{8} e^2 - \tfrac{11}{192} e^4 + \ldots) \sin g \\
& + (\tfrac{1}{2} e - \tfrac{5}{12} e^3 + \tfrac{1}{24} e^5 + \ldots) \sin 2g \\
& + (\tfrac{3}{8} e^2 - \tfrac{51}{128} e^4 + \ldots) \sin 3g \\
& + (\tfrac{1}{3} e^3 - \tfrac{13}{30} e^5 + \ldots) \sin 4g \\
& + \tfrac{125}{384} e^4 \sin 5g \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

und den numerischen Werth von y des Art. 104 ergaben sich auf diese Art die folgenden Coefficienten,

g, g'	$\frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \alpha$ cos	$\frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \alpha'$ sin	$\frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \alpha''$ cos	$\frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \beta$ sin	$\frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \beta'$ cos	$\frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \beta''$ sin
1.						
0,0	−145″,378		+0″,096		−0″,098	
1,0	+1761,899	−1761″,852	−1761,866	+1760″,534	+1760,559	−1760″,501
2,0	+48,200	−96,496	−193,092	+48,174	+96,450	−192,994
3,0	+1,952	−5,911	−17,799	+1,951	+5,910	−17,796
4,0	+0,094	−0,382	−1,538	+0,094	+0,382	−1,538
−3, −1	−0,03	−0,06	+0,16	+0,03	−0,06	−0,16
−2, −1	−0,47	−0,63	+0,95	+0,47	−0,63	−0,95
−1, −1	−2,85	−2,87	+2,93	+2,85	−2,87	−2,93
0, −1	−0,47	−0,80	+0,47	+0,80	−0,47	−0,80
1, −1	+2,82	−2,83	−2,87	+2,81	+2,83	−2,86
2, −1	+0,62	−0,78	−1,09	+0,62	+0,78	−1,09
3, −1	+0,04	−0,08	−0,19	+0,04	+0,08	−0,19

Digitized by Google

1.						
−1, −2	−0″,03	−0″,03	+0″,03	+0″,03	−0″,03	−0″,03
0, −2	−0,01	−0,01	+0,01	+0,01	−0,01	−0,01
1, −2	+0,03	−0,03	−0,03	+0,03	+0,03	−0,03
2, −2	+0,01	−0,01	−0,02	+0,01	+0,01	−0,02
2.						
−1, −1	−0,02	−0,02	+0,01	+0,02	−0,02	−0,01
0, −1	+0,09	+0,09	−0,10	−0,09	+0,09	+0,10
1, −1	+0,09	+0,07	−0,09	−0,07	+0,09	+0,07
2, −1	−0,15	+0,16	+0,15	−0,16	−0,15	+0,16
3, −1	−0,13	+0,14	+0,16	−0,13	−0,14	+0,16
4, −1	−0,01	+0,02	+0,03	−0,01	−0,02	+0,03
−2, −2	−0,05	−0,17	+0,57	+0,05	−0,18	−0,57
−1, −2	−0,90	−2,01	+4,29	+0,90	−1,99	−4,28
0, −2	−19,59	−20,08	+21,11	+19,56	−20,08	−21,08
1, −2	−9,35	−9,01	+9,40	+8,99	−9,36	−9,03
2, −2	+18,82	−19,32	−18,79	+19,31	+18,79	−19,28
3, −2	+10,20	−11,26	−13,33	+10,21	+11,24	−13,34
4, −2	+0,82	−1,16	−2,85	+0,82	+1,15	−2,85
5, −2	+0,06	−0,15	−0,11	+0,06	+0,15	−0,11
−1, −3	−0,04	−0,08	+0,18	+0,04	−0,08	−0,18
0, −3	−0,85	−0,88	+0,95	+0,85	−0,88	−0,95
1, −3	−0,65	−0,63	+0,66	+0,63	−0,65	−0,64
2, −3	+0,86	−0,90	−0,86	+0,90	+0,86	−0,90
3, −3	+0,73	−0,78	−0,88	+0,73	+0,78	−0,88
4, −3	+0,06	−0,11	−0,19	+0,06	+0,11	−0,20
0, −4	−0,03	−0,03	+0,04	+0,03	−0,03	−0,04
1, −4	−0,03	−0,03	+0,03	+0,03	−0,03	−0,03
2, −4	+0,03	−0,03	−0,03	+0,03	+0,03	−0,03
3, −4	+0,03	−0,04	−0,02	+0,03	+0,04	−0,04
11.						
1, −4	−0,02	−0,02	+0,01	+0,02	−0,02	−0,01
2, −4	−0,05	−0,05	+0,05	+0,05	−0,05	−0,05
3, −4	+0,21	−0,25	−0,21	+0,25	+0,21	−0,25
4, −4	+0,27	−0,29	−0,32	+0,27	+0,29	−0,32
5, −4	+0,09	−0,11	−0,15	+0,09	+0,11	−0,15
2, −3	−0,01	−0,01	+0,01	+0,01	−0,01	−0,01
3, −5	+0,01	−0,03	−0,01	+0,03	+0,01	−0,03
4, −5	+0,03	−0,03	−0,04	+0,03	+0,03	−0,04

Es sind jetzt zufolge des Art. 186 die Functionen K, L, M, N zu bilden und mit den vorstehenden Factoren zu multipliciren. Jene können alle, mit Ausnahme des zu berechnenden kleinen Products $\frac{\nu}{1+\nu}\vartheta\frac{h_0}{h}$, durch blose Additionen aus den im Vorhergehenden enthaltenen Zahlenwerthen erhalten werden. Man giebt zu dem Ende den Ausdrücken des Art. 186 am Zweckmässigsten die folgende Form.

Digitized by Google

$$K = -\frac{\nu}{1+\nu} + \vartheta\frac{h_0}{h} - \vartheta\frac{h}{h_0} - \frac{\nu}{1+\nu}\vartheta\frac{h_0}{h}$$

$$L = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\overline{W}_0}{d\gamma}\right) - \tfrac{1}{2}\left\{\frac{d\overline{W}}{ndz} - \left(\frac{d\overline{W}_0}{d\gamma}\right)'\right\} - \tfrac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{1-e^2}}\frac{d\cdot r^2}{a^2 ndz}(1+\nu)$$

$$M = 1 + \overline{W}_0 + \{\overline{W} - \overline{W}_0\} + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2\frac{h_0}{h}$$

$$N = 2 - \frac{\nu}{1+\nu} + \vartheta\left(\frac{h}{h_0}\right)^2$$

Es ergab sich hiemit

g, g'	$\frac{\nu}{1+\nu}\vartheta\frac{h_0}{h}$ cos	K cos	L sin	$M-1$ cos	$N-2$ cos
1.					
0,0	+4"62	−583"83		+1772"13	+3316"03
1,0	−3,22	−192,89	−285"87	−493,61	+38,51
2,0	+0,08	−9,20	−18,02	−11,85	−2,37
3,0	+0,01	−0,46	−1,24	−0,60	−0,15
4,0		−0,02	−0,09	−0,04	−0,02
−3,−1		−0,05	+0,15	−0,09	−0,04
−2,−1	−0,01	−1,22	+2,34	−2,23	−1,02
−1,−1	−0,28	−41,96	+41,22	−78,45	−35,01
0,−1	−0,30	−34,93	+1,73	−59,58	−11,34
1,−1	+0,07	+45,25	+46,60	+102,95	+59,60
2,−1	+0,03	+0,90	+2,13	+2,28	+1,41
3,−1		+0,02	+0,11	+0,07	−0,02
−2,−2			+0,02		
−1,−2	+0,01	−0,56	+0,53	−0,92	−0,34
0,−2	−0,04	−0,80	+0,08	−1,10	−0,18
1,−2	−0,01	+0,71	+0,77	+1,83	+1,19
2,−2		+0,02	+0,04	+0,06	+0,04
0,−3		−0,04		−0,02	+0,02
1,−3		+0,02	+0,01	+0,03	+0,03
2.					
1,0	−0,01	−1,26	−1,28	−2,57	+1,25
2,0		−0,04	−0,09	−0,10	+0,04
−1,−1	+0,01	+0,04	0,00	+0,04	+0,04
0,−1	+0,05	−0,24	+0,06	−0,22	−0,61
1,−1	−0,19	−10,76	−13,08	−26,02	−17,01
2,−1	+0,03	−37,38	−31,16	−44,65	+3,91
3,−1	+0,09	−2,60	−3,36	−3,92	−0,41
4,−1	+0,01	−0,16	−0,31	−0,26	−0,04
−2,−2		+0,02	−0,08	+0,06	+0,02
−1,−2	−0,01	+1,27	−1,41	+2,19	+0,89
0,−2	+1,07	−137,28	−10,05	+7,70	+241,36
1,−2	+12,30	+1424,85	+1792,33	+3870,20	+2765,11
2,−2	+1,33	+3380,22	+2820,81	+4000,86	−335,87
3,−2	+0,52	+135,47	+197,26	+170,97	+1,34
4,−2	+0,05	+6,06	+13,10	+8,00	+0,60
5,−2		+0,30	+0,87	+0,40	+0,06

Digitized by Google

2.					
−4, −3	−0″01	+0″08	−0″10	+0″10	+0″04
0, −3	+0,04	−4,18	−0,65	+0,58	+8,27
1, −3	+0,66	+46,86	+69,78	+156,72	+130,94
2, −3	+0,26	+227,85	+190,83	+277,55	−12,57
3, −3	−0,07	+10,52	+14,76	+14,34	+0,87
4, −3	−0,01	+0,53	+1,08	+0,75	+0,10
5, −3		+0,02	+0,08	+0,04	−0,01
0, −4		−0,09	−0,03	+0,03	+0,27
1, −4	+0,03	+1,15	+2,15	+5,04	+1,83
2, −4	+0,02	+10,58	+8,94	+13,27	−0,07
3, −4	+0,01	+0,52	+0,75	+0,78	+0,08
4, −4	+0,01	+0,02	+0,05	+0,04	+0,01
1, −5		+0,02	+0,06	+0,15	+0,17
2, −5		+0,42	+0,36	+0,54	+0,02
3, −5		+0,02	+0,03	+0,03	0,00
11.					
1, −3	−0,01	+0,01	+0,04	+0,03	+0,02
2, −3	−0,03	−0,22	−0,24	−0,63	−0,30
3, −3	+0,06	−0,98	−0,85	−1,71	−0,26
4, −3	+0,09	−0,39	−0,47	−0,90	−0,32
5, −3	+0,01	−0,04	−0,08	−0,11	−0,04
0, −4	+0,01	−0,04	+0,01	+0,04	+0,06
1, −4	+0,53	−0,21	+0,07	+0,65	+1,24
2, −4	+2,02	+19,64	+20,08	+52,05	+23,51
3, −4	−3,34	+53,57	+49,21	+97,58	+14,06
4, −4	−3,49	+17,60	+21,54	+39,84	+14,30
5, −4	−0,28	+1,68	+2,96	+3,66	+1,25
6, −4	−0,02	+0,14	+0,31	+0,28	+0,08
1, −5	+0,04	−0,01	0,00	+0,03	+0,14
2, −5	+0,25	+1,64	+1,70	+4,43	+2,09
3, −5	−0,33	+6,05	+5,50	+11,00	+1,59
4, −5	−0,46	+2,41	+2,88	+5,51	+1,95
5, −5	−0,05	+0,25	+0,42	+0,55	+0,18

Die Function M hat bis auf das constante Glied unmittelbar aus dem Art. 128 entnommen werden können. Durch Multiplication der vorstehenden Functionen mit den Werthen von $\frac{y}{\sqrt{1-e^2}}\alpha$, $\frac{y}{\sqrt{1-e^2}}\beta$, etc. nach Maassgabe des Art. 186 ergaben sich die folgenden Functionen.

g, g'	$\frac{1}{2}y\,(I)$ sin	$\frac{1}{2}y\,(I)'$ cos	$\frac{1}{2}y\,(II)$ cos	$\frac{1}{2}y\,(II)'$ sin
1.				
0,0		−0″923	+0″418	
1,0	+43704	−4,908	−1775,626	−1776″932
2,0	+0,075	−0,087	−95,936	−95,988
3,0	+0,044	−0,044	−5,827	−5,828
4,0	+0,005	−0,004	−0,377	−0,377

Digitized by Google

1.				
−3, −1	−0,02	−0,02	+0,09	−0,09
−2, −1	−0,02	−0,02	+0,98	−0,98
−1, −1	−0,08	−0,09	+3,09	−3,08
0, −1	+0,78	+0,06	+0,05	−0,02
1, −1	+0,18	−0,15	−2,64	−2,62
2, −1	+0,03	−0,01	−1,21	−1,21
3, −1	−0,02	+0,01	−0,11	−0,11
−1, −2			+0,03	−0,03
0, −2			+0,04	−0,04
1, −2			−0,03	−0,03
2, −2			−0,01	−0,01
2.				
−1, −1			+0,04	−0,01
0, −1	−0,10	−0,10	0,00	0,00
1, −1	−0,25	−0,25	+0,06	−0,09
2, −1	−0,02	−0,01	+0,29	+0,28
3, −1	+0,03	−0,03	+0,37	+0,37
4, −1	+0,01	−0,01	+0,05	+0,05
−2, −2	+0,04	+0,04	+0,11	−0,11
−1, −2	+0,65	+0,65	+1,01	−1,02
0, −2	+16,03	+16,07	+2,78	−2,78
1, −2	+27,19	+26,07	−7,71	+8,03
2, −2	+3,12	−0,27	−36,19	−35,26
3, −2	−2,51	+2,67	−29,33	−29,30
4, −2	−0,68	+0,69	−3,18	−3,18
5, −2	−0,10	+0,10	−0,28	−0,28
−1, −3	+0,02	+0,02	+0,04	−0,04
0, −3	+0,62	+0,62	+0,18	−0,18
1, −3	+1,77	+1,73	−0,49	+0,52
2, −3	+0,21	0,00	−1,62	−1,56
3, −3	−0,16	+0,17	−2,05	−2,05
4, −3	−0,05	+0,05	−0,25	−0,25
0, −4			+0,04	−0,04
1, −4	+0,09	+0,09	−0,02	+0,02
2, −4	+0,04	−0,01	−0,05	−0,05
3, −4	−0,01	+0,01	−0,09	−0,09
11.				
0, −4	−0,01	−0,01	+0,01	−0,01
1, −4	0,00	0,00	−0,04	+0,01
2, −4	+0,08	+0,07	−0,09	+0,09
3, −4	+0,03	−0,01	−0,67	−0,57
4, −4	−0,04	+0,05	−1,01	−1,00
5, −4	−0,03	+0,03	−0,44	−0,44
6, −4	−0,01	+0,01	−0,04	−0,04
2, −5			−0,01	+0,01
3, −5			−0,06	−0,04
4, −5			−0,12	−0,12
5, −5			−0,01	−0,01

g, g'	$\frac{1}{4}y$ (III) cos	$\frac{1}{4}y$ (III)′ sin	y (V) cos	y (V)′ sin
1.				
0,0	−0″,124		+96″,209	
1,0	+3549,404	+3552″,042	−5,327	−16″,113
2,0	+194,702	+194,797	+95,577	+96,155
3,0	+11,932	+11,934	+5,294	+5,268
4,0	+0,780	+0,770	+0,289	+0,289
−3,−1	−0,14	+0,14	−0,05	+0,05
−2,−1	−1,42	+1,42	−0,32	+0,32
−1,−1	−5,84	+5,85	−0,29	−0,04
0,−1	−0,24	+1,20	+0,27	−0,05
1,−1	+5,65	+5,63	+0,35	−0,02
2,−1	+1,83	+1,83	+0,06	+0,06
3,−1	+0,18	−0,18	−0,01	−0,01
−1,−2	−0,06	+0,06		
0,−2	−0,02	+0,02		
1,−2	+0,06	+0,06		
2,−2	+0,03	+0,03		
2.				
−1,−1	−0,02	+0,02		
0,−1	+0,13	−0,13		
1,−1	+0,20	−0,17		
2,−1	−0,38	−0,40		
3,−1	−0,25	−0,25		
4,−1	−0,04	−0,04		
−2,−2	−0,25	+0,25	−0,18	+0,17
−1,−2	−2,34	+2,37	−2,65	+2,68
0,−2	−28,76	+28,75	−1,20	+1,08
1,−2	−19,27	+20,62	+0,95	−0,09
2,−2	+49,75	+50,80	+0,68	−0,21
3,−2	+21,87	+21,92	+1,60	+1,55
4,−2	+2,90	+2,90	+0,76	+0,75
5,−2	+0,29	+0,29	+0,10	+0,10
−1,−3	−0,09	+0,09	−0,12	+0,12
0,−3	−1,23	+1,23	−0,08	+0,09
1,−3	−1,33	+1,38	+0,04	−0,01
2,−3	+2,30	+2,39	+0,03	−0,02
3,−3	+1,56	+1,56	+0,08	−0,03
4,−3	+0,24	+0,24	+0,06	+0,05
0,−4	−0,05	+0,05		
1,−4	−0,07	+0,07		
2,−4	+0,08	+0,08		
3,−4	+0,07	+0,07		

Digitized by Google

11.				
0, −4			+0″02	−0″02
1, −4	−0″08	+0″08	+0,03	−0,03
2, −4	−0,07	+0,11	+0,03	0,00
3, −4	+0,73	+0,67	+0,05	0,00
4, −4	+0,72	+0,70	0,00	0,00
5, −4	+0,28	+0,28	+0,01	+0,01
6, −4	+0,01	+0,01		
1, −5	−0,02	+0,02		
2, −5	−0,01	+0,01		
3, −5	+0,05	+0,07		
4, −5	+0,08	+0,08		

Die Coefficienten von (IV) und $(IV)'$ habe ich hier weggelassen, weil sie wegen der Ausdrücke

$$\frac{y}{\sqrt{1-e^2}}\beta = \tfrac{1}{2}y\,(IV)$$

$$\frac{y}{\sqrt{1-e^2}}\alpha = -\tfrac{1}{2}y\,(IV)'$$

schon in der vorhergehenden Tafel enthalten sind. Wir brauchen noch die folgenden drei Functionen

$$\frac{ye}{1-e^2}\left(\frac{h}{h_0}\right)^2;\quad \Gamma + \frac{2e}{1-e^2}\frac{h}{h_0};\quad \Psi;$$

und diese giebt die folgende Tafel unter den Ueberschriften (VI); (VII); (VIII).

g, g'	(VI) cos	(VII) cos	(VIII) sin
1.			
0,0	+97″916	+22513″25	
1,0	+0,055	−1122,92	−1119″97
2,0	+0,002	−54,70	−54,60
3,0		−3,63	−3,63
4,0		−0,25	−0,25
−3, −1		−0,09	+0,09
−2, −1		−1,49	+1,49
−1, −1		−24,61	+24,52
0, −1		+16,17	−178,88
1, −1		−31,58	−31,29
2, −1		−2,88	−2,87
3, −1		−0,24	−0,24
−1, −2		−0,56	+0,57
0, −2		+0,38	−2,63
1, −2		−0,85	−0,83
2, −2		−0,10	−0,10

Digitized by Google

2.			
0,0		−2″54	+2″54
1,0		−0,02	+0,02
−1,−1		+0,07	−0,07
0,−1		−18,58	+18,72
1,−1		−56,06	+56,02
2,−1	+0″01	+0,50	+1,94
3,−1		−7,70	−7,66
4,−1		−0,87	−0,86
−2,−2		+0,06	−0,06
−1,−2		−2,22	+2,23
0,−2	+0,09	+3507,20	−3495,87
1,−2	+0,31	+6128,39	−6064,43
2,−2	−0,87	−155,12	−260,33
3,−2	−0,03	+595,83	+593,50
4,−2		+48,95	+48,86
5,−2		+3,32	+3,33
6,−2		+0,22	+0,22
−1,−3		−0,07	+0,07
0,−3		+128,64	−128,27
1,−3	+0,02	+405,77	−401,98
2,−3	−0,06	−9,09	−16,54
3,−3		+38,96	+38,78
4,−3		+3,51	+3,54
5,−3		+0,26	+0,26
0,−4		+3,77	−3,77
1,−4		+18,66	−18,50
2,−4		−0,37	−0,73
3,−4		+1,73	+1,72
4,−4		+0,17	+0,17
0,−5		+0,10	−0,10
1,−5		+0,73	−0,73
2,−5		−0,01	−0,03
11.			
2,−3		−0,24	+0,23
3,−3		+0,08	0,00
4,−3		−0,21	−0,21
5,−3		−0,06	−0,06
0,−4		+0,44	−0,44
1,−4		+3,41	−3,36
2,−4		+15,95	−15,92
3,−4	−0,01	−3,70	−0,28
4,−4		+11,10	+11,08
5,−4		+2,76	+2,75
6,−4		+0,41	+0,41
1,−5		+0,36	−0,36
2,−5		+1,86	−1,86
3,−5		−0,32	−0,01
4,−5		+1,25	+1,25
5,−5		+0,37	+0,37

Digitized by Google

198.

Die nun zufolge der Ausdrücke des Art. 186 auszuführenden Multiplicationen mit $\frac{\varrho}{a}\sin\varphi$ und $\frac{\varrho}{a}\cos\varphi$ sind sehr einfach, da hier blos

$$\frac{\varrho}{a}\cos\varphi = -\tfrac{1}{2}e + f\cos\gamma$$
$$\frac{\varrho}{a}\sin\varphi = \qquad f'\sin\gamma$$

zu setzen ist. Seien

$$A = 2k\sin(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega')$$
$$B = 2l\cos(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega')$$

irgend zwei zusammen gehörige Glieder der im Vorhergehenden gegebenen Factoren, dann wird

$$\begin{aligned} A\tfrac{\varrho}{a}\sin\varphi + B\tfrac{\varrho}{a}\cos\varphi = & \quad -3el\cos(\quad ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega') \\ & + (\quad kf'' + lf)\cos(-\gamma + ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega') \\ & + (-kf'' + lf)\cos(\quad \gamma + ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega') \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} B\tfrac{\varrho}{a}\sin\varphi + A\tfrac{\varrho}{a}\cos\varphi = & \quad -3ek\sin(\quad ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega') \\ & + (-lf'' + kf)\sin(-\gamma + ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega') \\ & + (\quad lf'' + kf)\sin(\quad \gamma + ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega') \end{aligned}$$

Je zwei der obigen Factoren $y(I)$, $y(I)'$, etc., die mit einander hier in Betracht kommen, haben die Form wie A und B, und die Multiplicationen sind daher nach den vorstehenden Formeln auszuführen; nach der ersten, wenn das Product eine Reihe von Cosinussen, und nach der zweiten, wenn das Product eine Reihe von Sinussen bildet. Ich bemerke zu diesem Zweck, dass

$$f'' = 1 - 0{,}0018843$$
$$f = 1 - 0{,}0011300$$
$$3e = 0{,}16470$$

ist. Zur Abkürzung ist in der folgenden Tafel

$$(IX) = -y(I)\tfrac{\varrho}{a}\sin\varphi + y(I)'\tfrac{\varrho}{a}\cos\varphi$$
$$(X) = -y(II)\tfrac{\varrho}{a}\sin\varphi + y(II)'\tfrac{\varrho}{a}\cos\varphi$$
$$(XI) = -y\{(III) - 2(VI)\}\tfrac{\varrho}{a}\sin\varphi + y(III)'\tfrac{\varrho}{a}\cos\varphi$$

gesetzt worden.

Digitized by Google

γ, g, g'	(IX) cos	(X) sin	(XI) sin
1.			
0,0,0	+0,152		
−1,1,0	−9,599	−3347,204	+7090,684
0,1,0	+0,808	+292,665	−585,030
−1,2,0	−0,162	−191,635	+388,910
1,0,0	−1,844	−0,834	+195,710
0,2,0	+0,015	+15,810	−32,084
	−0,088	−11,638	+23,830
	−0,207	−2,644	+5,372
0,3,0	+0,007	+0,960	−1,966
	−0,009	−0,752	+1,548
	−0,012	−0,124	+0,244
0,−3,−1	+0,01	+0,01	−0,02
	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00
0,−2,−1	+0,01	+0,16	−0,23
	−0,01	+0,01	+0,01
	−0,05	−0,19	+0,28
0,−1,−1	+0,01	+0,51	−0,96
	−0,72	+0,03	+0,96
	−0,05	−1,97	+2,84
0,0,−1	−0,01	+0,01	−0,20
	−0,32	−5,25	+11,26
	−0,16	−6,16	+11,67
0,1,−1	+0,02	+0,43	−0,93
	−0,04	−2,41	+3,66
	+0,84	−0,07	+1,44
0,2,−1	0,00	+0,20	−0,30
	−0,03	−0,23	+0,36
	+0,03	+0,02	−0,02
0,3,−1	0,00	+0,02	−0,03
	0,00	0,00	0,00
	+0,02	0,00	0,00
0,−1,−2		+0,01	−0,01
		0,00	0,00
		0,00	0,00
0,0,−2		0,00	0,00
		−0,06	+0,12
		−0,06	+0,12
0,1,−2		+0,01	−0,01
		−0,03	+0,06
		−0,02	+0,04
2.			
0,0,−1	+0,02	0,00	+0,02
	−0,01	−0,02	+0,03
	0,00	−0,02	+0,04

Digitized by Google

2.			
0,1,−1	+0″,04	+0″,01	+0″,03
	+0,01	+0,57	−0,79
	−0,19	−0,01	−0,26
0,2,−1	0,00	−0,04	+0,07
	−0,07	+0,74	−0,50
	−0,50	−0,15	−0,37
0,3,−1	0,00	−0,06	+0,04
	−0,01	+0,10	−0,08
	−0,03	−0,01	−0,01
0,−1,−2	−0,10	+0,17	−0,39
	+0,05	−0,01	−0,08
	+0,08	−0,21	+0,50
0,0,−2	−2,64	+0,47	−4,73
	−1,10	+0,32	+1,06
	+1,29	−2,03	+4,71
0,1,−2	−4,30	−1,32	−3,40
	−3,29	−71,35	+101,26
	+32,05	−5,56	+57,52
0,2,−2	+0,05	+5,81	−8,26
	+5,32	−58,54	+43,76
	+53,18	+15,72	+40,14
0,3,−2	−0,14	+1,82	−3,60
	+1,38	−6,36	+5,79
	+2,85	+0,90	+0,22
0,4,−2	−0,12	+0,52	−0,48
	+0,20	−0,56	+0,58
	+0,16	+0,01	+0,04
0,5,−2	−0,01	+0,04	−0,05
	0,00	0,00	0,00
	+0,01	0,00	+0,01
0,0,−3	−0,10	+0,03	−0,20
	−0,04	+0,03	+0,03
	+0,04	−0,08	+0,18
0,1,−3	−0,28	−0,09	−0,23
	−0,21	−3,17	+4,75
	+1,24	−0,37	+2,46
0,2,−3	0,00	+0,26	−0,40
	+0,34	−1,09	+3,12
	+3,50	+1,01	+2,73
0,3,−3	−0,03	+0,34	−0,14
	+0,09	−0,49	+0,42
	+0,21	+0,06	+0,03
0,1,−4	−0,01	0,00	−0,01
	−0,02	−0,10	+0,16
	0,00	−0,02	+0,10
0,2,−4	0,00	+0,01	−0,01
	−0,01	−0,18	+0,14
	+0,17	+0,04	+0,14

Digitized by Google

11.			
0,1,−4	0″,00	0″,00	−0″,04
	−0,04	+0,01	+0,04
	−0,01	−0,02	0,00
0,2,−4	−0,04	−0,01	−0,02
	−0,04	−1,25	+1,41
	0,00	+0,03	+0,16
0,3,−4	0,00	+0,10	−0,11
	+0,10	−2,00	+1,42
	+0,15	+0,17	+0,18
0,4,−4	−0,01	+0,17	−0,12
	+0,07	−0,88	+0,56
	+0,02	+0,10	−0,07
0,5,−4	−0,01	+0,07	−0,05
	+0,02	−0,09	+0,02
	+0,02	+0,01	−0,02
0,3,−5	0,00	+0,01	−0,01
	0,00	−0,23	+0,16
	+0,02	+0,01	+0,02
0,4,−5	0,00	+0,02	−0,01
	+0,01	−0,09	0,00
	0,00	+0,02	+0,02

Die noch übrigen zwei ähnlichen Functionen sollen, um Wiederholungen zu vermeiden, erst weiter unten angesetzt werden.

199.

Es sind jetzt die durch die Gleichungen (65) gegebenen Coefficienten zu berechnen. Man findet leicht zufolge der Gleichung (20), dass mit ausreichender Genauigkeit

$$\left(\frac{d\bar{T}}{d\bar{P}}\right) - F\left(\frac{d\bar{T}}{d\bar{K}}\right) = R + \left(\frac{dR}{dg}\right) n\delta z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2R}{dg^2}\right)(n\delta z)^2 + L\delta P + M\delta Q$$

$$\left(\frac{d\bar{T}}{d\bar{Q}}\right) = Y + \left(\frac{dY}{dg}\right) n\delta z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2Y}{dg^2}\right)(n\delta z)^2 + M\delta P + O\delta Q$$

wird, und ähnliche Ausdrücke für dieselben Differentialquotienten von G, Σ, U erhalten werden, wenn man unter R, Y, L, M, O die Functionen versteht, die im Art. 46 so bezeichnet wurden. Die hier erforderlichen Producte können fast alle unmittelbar aus denen der ersten Abhandlung entnommen werden, weshalb ich sogleich die Resultate ansetze. Zur Abkürzung habe ich die folgenden Ueberschriften gewählt.

$$(T)_1 = \left(\frac{d\bar{T}}{d\bar{P}}\right) - F\left(\frac{d\bar{T}}{d\bar{K}}\right); \quad (T)_2 = \left(\frac{d\bar{T}}{d\bar{Q}}\right)$$

und ebenso für G, Σ, U.

Digitized by Google

γ, g, g'	$(T)_1$ cos	$(G)_1$ cos	$(\Sigma)_1$ cos	$(U)_1$ cos
1.				
0,0,0	+4″84	+0″4	+1″45	+3″2
−1,1,0	−4,70	−1,7		−3,0
0,1,0	+10,48	+0,1	+3,28	+7,4
−1,2,0	−5,24	0,0		−5,3
1,0,0	−4,86	−3,4		−1,5
0,2,0	+1,99	+0,1	+0,50	+1,4
	−0,99	−0,4		−0,9
	−1,07	−0,7		−0,4
0,3,0	+0,19			
	−0,11			
	−0,06			
0,−1,−1	+0,30		+0,12	
	−0,13			
	−0,16			
0,0,−1	+0,44	−0,2	+0,17	+0,4
	−0,63	−0,4		−0,2
	+0,22	0,0		−0,2
0,1,−1	+0,65		+0,18	
	−0,34			
	−0,31			
2.				
0,1,−1	−0,20		−0,22	
	+0,21			
	+0,29			
0,2,−1	+6,42	+0,1	+2,42	+3,9
	−2,26	−0,1		−2,2
	−5,38	−3,6		−1,8
0,3,−1	+0,73		+0,17	
	−0,35			
	−0,34			
0,0,−2	−0,08	+2,4	−1,21	−1,0
	+1,06	−0,1		+1,2
	+0,76	+0,5		+0,3
0,1,−2	+37,97	−25,3	+25,31	+38,0
	−25,21	+0,4		−25,3
	−42,05	−25,2		−16,9
0,2,−2	−456,65	−0,2	−152,47	−304,0
	+150,70	−0,3		+151,0
	+459,36	+306,5		+152,9
0,3,−2	−37,53	+0,1	−8,36	−29,2
	+16,67	0,0		+16,7
	+16,70	+8,3		+8,4
0,4,−2	−2,73	+0,2	−0,47	−2,4
	+1,41	−0,1		+1,5
	+0,80	+0,3		+0,5

2.				
0,1,−3	+2″,20	−1″,5	+1″,52	+2″,3
	−1,55	0,0		−1,5
	−2,48	−1,5		−1,0
0,2,−3	−28,90	+0,1	−9,65	−19,3
	+9,80	0,0		+9,8
	+28,28	+18,8		+9,5
0,3,−3	−2,72	0,0	−0,63	−2,1
	+1,25	0,0		+1,2
	+1,24	+0,7		+0,5
0,2,−4	−1,28	−0,2	−0,41	−0,7
	+0,44	0,0		+0,4
	+1,20	+0,8		+0,4
11.				
0,2,−4	+0,51		+0,31	
	−0,60			
	−0,04			
0,3,−4	−9,70	+0,4	−3,17	−6,9
	+4,65	−0,1		+4,8
	+4,98	+3,2		+1,8
0,4,−4	−5,98	−0,3	−1,87	−3,8
	+3,08	+0,2		+2,9
	+2,75	+2,0		+0,8
0,5,−4	−0,86		−0,18	
	+0,51			
	+0,28			
0,3,−5	−1,06		−0,35	
	+0,51			
	+0,54			
0,4,−5	−0,79		−0,22	
	+0,44			
	+0,36			
3.				
0,1,1	−1,21		−0,71	
	+0,81			
	+1,36			
0,2,1	+10,75	0,0	+3,60	+7,1
	−3,25	0,0		−3,3
	−11,48	−7,8		−3,7
0,3,1	+0,67		+0,12	
	−0,23			
	−0,33			
0,0,0	−0,14	+0,1	+1,19	−1,4
	−1,55	−0,4		−1,2
	−0,13	+0,2		−0,3
0,1,0	−38,54	+25,4	−25,67	−38,2
	+27,40	+1,9		+25,5
	+44,16	+27,1		+17,1

Digitized by Google

3.				
0,2,0	+463″62	+1″4	+454″82	+30″74
	−152,51	+0,5		−153,0
	−465,17	−310,5		−154,7
0,3,0	+38,02	−0,1	+8,44	+29,7
	−16,72	+0,2		−16,9
	−16,98	−8,5		−8,5
0,4,0	+2,76	−0,1	+0,50	+2,4
	−1,43	+0,1		−1,5
	−0,80	−0,3		−0,5
0,1,−1	−0,79		−0,57	
	+0,65			
	+0,98			
0,2,−1	+12,19	0,0	+4,11	+8,1
	−4,32	0,0		−4,3
	−11,71	−7,8		−3,9
0,3,−1	+1,31		+0,34	
	−0,62			
	−0,60			
4.				
0,−1,3	+0,79			
	−0,82			
	−0,30			
0,0,3	−0,46	−0,2	−0,16	−0,1
	+9,17	+9,0		+0,2
	−9,19	−9,1		+0,1
0,1,3	−1,45			
	+0,56			
	+1,08			
0,−2,2	+0,64	+0,3		+0,3
	−0,33	−0,2		−0,1
	−0,27	−0,2		−0,1
0,−1,2	+12,28	+12,3	−0,05	0,0
	−12,57	−12,5		−0,1
	−4,34	−4,4		+0,1
0,0,2	−5,08	−0,1	−1,55	−3,2
	+155,74	+153,7		+2,0
	−150,63	−151,6		+1,0
0,1,2	−23,06	−12,8	−3,36	−6,9
	+9,51	+4,3		+5,2
	+17,60	+16,0		+1,6
0,2,2	−1,39	−0,1	−0,25	−1,0
	+0,84	+0,1		+0,7
	+0,19	0,0		+0,2
0,−1,1	−0,15			
	+0,16			
	+0,09			
0,0,1	−0,09			
	−1,28			
	+1,85			

Digitized by Google

4.				
0,1,1	−0″,10			
	+0,13			
	+0,02			
12.				
0,2,−2	−0,85		−0″,42	
	+0,72			
	+0,39			
0,3,−2	+10,18	−0″,1	+3,17	+6″,9
	−4,85	0,0		−1,8
	−5,32	−3,5		−1,8
0,4,−2	+5,60	−0,1	+1,72	+1,0
	−2,95	0,0		−2,9
	−2,32	−1,5		−0,8
0,5,−2	+0,80		+0,18	
	−0,48			
	−0,24			
0,3,−3	+0,72		+0,24	
	−0,36			
	−0,36			
0,4,−3	+0,49		+0,16	
	−0,27			
	−0,20			
13.				
0,0,−4	+0,20			
	−0,02			
	−0,10			
0,1,−4	−0,43	+0,1	−0,30	−0,5
	−1,45	−1,8		+0,3
	−1,02	−4,2		+0,2
0,2,−4	+6,20	+0,1	+2,02	+1,1
	−2,51	−0,5		−2,0
	−7,32	−5,3		−2,0
0,3,−4	+0,63	+0,1	+0,10	+0,1
	−0,31	−0,1		−0,2
	−0,32	−0,2		−0,1

γ, g, g'	$(T)_2$ sin	$(G)_2$ sin	$(\Sigma)_2$ sin	$(U)_2$ sin
1.				
−1,1,0	−305″,42	−306″,1		+1″,0
0,1,0	+35,72	+25,3	+3″,51	+6,9
−1,2,0	−13,64	−8,5		−5,1
1,0,0	−30,34	−28,6		−1,7
0,2,0	+2,52	+0,6	−0,16	+1,1
	−1,28	−0,1		−0,9
	−0,93	−0,5		−0,1

Digitized by Google

1.				
0,3,0	+0″,22			
	−0,13			
	−0,06			
0,−1,−1	−0,99		−0″,12	
	+0,79			
	+0,31			
0,0,−1	−0,03	0″,0	−0,05	0″,0
	−8,04	−8,0		0,0
	+7,09	+6,9		+0,2
0,1,−1	+1,32		+0,18	
	−0,66			
	−1,05			
2.				
0,1,−1	−0,43		−0,47	
	+0,09			
	+0,15			
0,2,−1	+5,48	+0,3	+1,87	+3,3
	−2,08	−0,1		−2,0
	−1,77	−3,2		−1,6
0,3,−1	+0,67		+0,17	
	−0,33			
	−0,29			
0,0,−2	+0,33	+2,5	−1,15	−1,0
	+1,43	+0,2		+1,2
	+0,01	−0,3		+0,3
0,1,−2	+38,16	−25,1	+25,35	+37,9
	−28,93	−3,6		−25,3
	−45,43	−28,5		−16,9
0,2,−2	−457,37	−0,7	−152,79	−303,9
	+449,82	−1,2		+151,0
	+458,06	+305,2		+152,9
0,3,−2	−37,39	+0,2	−8,32	−29,3
	+16,42	−0,3		+16,7
	+16,72	+8,3		+8,4
0,4,−2	−2,73	+0,2	−0,47	−2,4
	+1,41	−0,1		+1,5
	+0,80	+0,3		+0,5
0,1,−3	+2,14	−1,7	+1,50	+2,3
	−1,75	−0,2		−1,5
	−2,66	−1,6		−1,0
0,2,−3	−28,32	+0,1	−9,44	−19,0
	+9,47	−0,1		+9,6
	+27,54	+18,3		+9,2
0,3,−3	−2,65	0,0	−0,64	−2,1
	+1,23	0,0		+1,2
	+1,18	+0,7		+0,5
0,2,−4	−1,24	0,0	−0,41	−0,8
	+0,42	0,0		+0,4
	+1,18	+0,8		+0,4

Digitized by Google

11.				
0,2,−4	+0″,51		+0″,31	
	−0,62			
	−0,06			
0,3,−4	−9,70	+0″,6	−3,21	−7″,1
	+4,60	−0,5		+5,1
	+4,95	+3,2		+1,8
0,4,−4	−5,98	−0,3	−1,89	−3,8
	+3,08	+0,2		+2,9
	+2,75	+2,0		+0,8
0,5,−4	−0,86		−0,18	
	+0,51			
	+0,28			
0,3,−5	−1,06		−0,35	
	+0,51			
	+0,53			
0,4,−5	−0,79		−0,22	
	+0,41			
	+0,36			
3.				
0,1,1	−1,20		−0,70	
	+0,81			
	+1,36			
0,2,1	+10,75	0,0	+3,58	+7,1
	−3,25	0,0		−3,3
	−11,50	−7,8		−3,7
0,3,1	+0,66		+0,13	
	−0,25			
	−0,33			
0,0,0	−0,15	0,0	+1,18	−1,3
	−1,54	−0,3		−1,2
	−0,12	+0,2		−0,3
0,1,0	−38,52	+25,4	−25,68	−38,2
	+27,45	+2,0		+25,5
	+44,36	+27,3		+17,1
0,2,0	+463,56	+1,3	+154,85	+307,4
	−152,46	+0,5		−153,0
	−465,14	−340,4		−154,7
0,3,0	+37,98	−0,1	+8,44	+29,7
	−16,73	+0,2		−16,9
	−16,97	−8,5		−8,5
0,4,0	+2,76	−0,1	+0,50	+2,4
	−1,43	+0,1		−1,5
	−0,80	−0,3		−0,5
0,1,−1	−0,78		−0,58	
	+0,65			
	+0,98			
0,2,−1	+12,48	−0,1	+4,10	+8,5
	−4,31	0,0		−4,3
	−11,71	−7,8		−3,9

Digitized by Google

3.				
0,3,−1	+1″32		+0″33	
	−0,62			
	−0,60			
4.				
0,−1,3	+0,79			
	−0,82			
	−0,29			
0,0,3	−0,48	−0″2	−0,17	−0″2
	+9,11	+8,9		+0,2
	−9,12	−9,2		+0,1
0,1,3	−1,45			
	+0,56			
	+1,08			
0,−2,2	+0,68	+0,4	+0,10	+0,2
	−0,35	−0,3		−0,1
	−0,29	−0,2		−0,1
0,−1,2	+12,63	+12,4	+0,12	+0,1
	−12,73	−12,6		−0,1
	−4,16	−4,3		+0,1
0,0,2	−5,06	−0,4	−1,55	−3,1
	+155,16	+153,2		+2,0
	−149,91	−150,9		+1,0
0,1,2	−23,00	−12,6	−3,42	−7,0
	+9,49	+4,4		+5,1
	+17,55	+16,0		+1,6
0,2,2	−1,41	−0,1	−0,23	−1,1
	+0,84	+0,1		+0,7
	+0,19	0,0		+0,2
0,−1,1	−0,15			
	+0,16			
	+0,09			
0,0,1	−0,09			
	−1,28			
	+1,85			
0,1,1	−0,12			
	+0,12			
	+0,02			
12.				
0,2,−2	−0,87		−0,12	
	+0,73			
	+0,39			
0,3,−2	+10,16	+0,1	+3,36	+6,7
	−4,84	0,0		−4,8
	−5,31	−3,5		−1,8
0,1,−2	+5,58	−0,1	+1,72	+4,0
	−2,96	−0,1		−2,9
	−2,31	−1,5		−0,8

12.				
0,5,−2	+0″,80		+0″,18	
	−0,48			
	−0,24			
0,3,−3	+0,71		+0,24	
	−0,35			
	−0,35			
0,1,−3	+0,53		+0,16	
	−0,27			
	−0,24			
13.				
0,0,−1	−0,19			
	+0,01			
	+0,10			
0,1,−1	+0,43	−0″,1	+0,30	+0″,5
	+1,45	+1,8		−0,3
	+1,09	+1,3		−0,2
0,2,−1	−6,11	−0,3	−2,12	−1,0
	+2,63	+0,6		+2,0
	+7,36	+5,3		+2,1
0,3,−1	−0,61	−0,1	−0,10	−0,1
	+0,31	+0,1		+0,2
	+0,29	+0,2		+0,1

Ich bemerke hiezu, dass in den beiden vorstehenden Tafeln, die aus älteren Rechnungen stammen, die Functionen $(U)_1$ und $(U)_2$ direct berechnet, und die Functionen $(G)_1$ und $(G)_2$ aus den drei anderen bezüglichen abgeleitet worden sind. Nach der Berechnung der Producte, die die Gleichungen (65) erfordern, erhält man die folgenden Coefficienten.*)

γ, g, g'	$(T)_1$ cos	$(U)_3$ cos	$(G)_1\nu$ cos	$(\Sigma')_1\ (2\nu+\nu^2)$ cos
1.				
0,0,0	+4″,794	+3″,281	+0″,130	+0″,852
−1,1,0	−4,70	−3,24	−1,00	
0,1,0	+10,48	+2,61	+0,08	+1,12
−1,2,0	−5,24	−1,34	+0,04	
1,0,0	−4,86	−1,18	−1,55	
0,2,0	+1,99	+0,21		+0,12
	−0,99	−0,12		
	−1,07	−0,05	−0,08	

*) $(U)_2 = (U)_1 \left\{(1+\nu)^2 \frac{h^2}{h_0^2} - 1\right\}$

Digitized by Google

1.				
0,3,0	+0″,19	+0″,02		
	−0,11	−0,01		
	−0,06			
0,−1,−1	+0,30	+0,06		+0″,04
	−0,13	−0,02	−0″,05	
	−0,16	−0,03		
0,0,−1	+0,44	+0,36	+0,01	+0,11
	−0,63	−0,18	−0,07	
	+0,22	−0,16	−0,05	
0,1,−1	+0,65	+0,14		+0,08
	−0,34	−0,08		
	−0,31	−0,07	−0,09	
2.				
0,1,−1	−0,20	+0,07		+0,04
	+0,21	−0,03		
	+0,29	−0,03	−0,04	
0,2,−1	+6,12	−0,16		−0,05
	−2,26	+0,03		
	−5,38	+0,03	+0,04	
0,3,−1	+0,73	−0,06		−0,03
	−0,35	+0,03		
	−0,34	+0,03	+0,03	
0,0,−2	−0,08	−0,05	−0,01	
	+1,06	−0,01	+0,01	
	+0,76	+0,04		
0,1,−2	+37,97	−0,40	+0,16	−0,43
	−25,21	+0,19	+0,01	
	−42,05	+0,21	+0,23	
0,2,−2	−456,65	+1,03		+1,96
	+150,70	−0,52		
	+459,36	−0,51	−1,98	
0,3,−2	−37,53	−0,20		+0,04
	+16,67	+0,11		
	+16,70	+0,10	+0,02	
0,4,−2	−2,73	−0,04		
	+1,40	+0,02		
	+0,80	+0,02		
0,1,−3	+2,20	−0,08	+0,01	−0,05
	−1,55	+0,04		
	−2,48	+0,04	+0,04	
0,2,−3	−28,90	+0,02		+0,10
	+9,80	−0,01		
	+28,28	−0,01	−0,10	
0,3,−3	−2,72	+0,05		+0,04
	+1,25	−0,02		
	+1,21	−0,02	−0,04	
0,2,−4	−1,28			
	+0,44			
	+1,20			

Digitized by Google

11.				
0,2,−1	+0″,54	−0″,37	+0″,13	−0″,20
	−0,60	+0,24		
	−0,04	+0,17	+0,09	
0,3,−1	−0,70	+2,15	+0,09	+1,38
	+4,65	−1,00		
	+4,98	−1,11	−1,17	
0,4,−1	−5,98	+3,83		+1,20
	+3,08	−1,93		
	+2,75	−1,88	−1,17	
0,5,−1	−0,86	+0,51		+0,11
	+0,51	−0,29		
	+0,28	−0,18	−0,08	
0,3,−5	−1,06	+0,20		+0,15
	+0,51	−0,09		
	+0,54	−0,11	−0,17	
0,4,−5	−0,79	+0,51		+0,15
	+0,41	−0,26		
	+0,36	−0,23	−0,15	
3.				
0,1,1	−1,21	−0,07		−0,04
	+0,81	+0,03	−0,05	
	+1,36	+0,03	+0,09	
0,2,1	+10,75	+0,03		−0,03
	−3,25	−0,01	−0,03	
	−11,48	−0,01	+0,06	
0,3,1	+0,67	+0,06		+0,03
	−0,23	−0,03		
	−0,33	−0,03	−0,03	
0,0,0	−0,14	−0,03	−0,06	+0,01
	−1,55	+0,02	+0,05	
	−0,13	+0,01	+0,04	
0,1,0	−38,54	+0,33	−0,22	+0,40
	+27,40	−0,17	−0,72	
	+11,16	−0,17	+0,54	
0,2,0	+163,62	−1,08	+0,06	−1,99
	−152,54	+0,55	−0,59	
	−165,17	+0,54	+2,51	
0,3,0	+38,02	+0,20	+0,05	−0,03
	−16,72	−0,10	−0,05	
	−16,98	−0,10	−0,03	
0,4,0	+2,76	+0,03		
	−1,13	−0,02		
	−0,80	−0,02		
0,1,−1	−0,79	+0,06		+0,03
	+0,65	−0,03	−0,02	
	+0,98	−0,03	−0,01	
0,2,−1	+12,49	+0,02		−0,03
	−4,32	−0,01	−0,04	
	−11,71	−0,01	+0,07	

Digitized by Google

3.				
0,3,−1	+1″,34	−0″,07		−0″,04
	−0,62	+0,03		
	−0,60	+0,03	+0″,04	
4.				
0,−1,3	+0,79	+0,02		+0,01
	−0,82	−0,01	−0,02	
	−0,30		+0,02	
0,0,3	−0,46	−0,32		−0,10
	+9,17	+0,15	−0,05	
	−9,19	+0,16	+0,16	
0,1,3	−1,45	−0,18		−0,14
	+0,56	+0,09	+0,01	
	+1,08	+0,09	+0,10	
0,−2,2	+0,64	+0,02		+0,02
	−0,33	−0,01		
	−0,27	−0,01		
0,−1,2	+12,28	+0,26	−0,17	+0,13
	−12,57	−0,20	+0,14	
	−4,34	−0,10	−0,05	
0,0,2	−5,08	−3,37	−0,13	−0,87
	+155,74	+1,61	−0,96	
	−150,63	+1,69	+1,98	
0,1,2	−23,06	−2,94	+0,08	−1,56
	+9,51	+1,48		
	+17,60	+1,40	+1,45	
0,2,2	−1,39	−0,22		−0,12
	+0,84	+0,13		
	+0,19	+0,05	+0,08	
0,−1,1	−0,15			
	+0,16		+0,01	
	+0,09		−0,01	
0,0,1	−0,09	−0,06		−0,02
	−1,28	+0,03	+0,02	
	+1,85	+0,03		
0,1,1	−0,10	−0,05		−0,03
	+0,13	+0,03	−0,02	
	+0,02	+0,02	+0,05	
12.				
0,2,−2	−0,85	+0,38	−0,13	+0,23
	+0,72	−0,25		
	+0,39	−0,18	−0,09	
0,3,−2	+10,18	−2,18	−0,09	−1,39
	−4,85	+1,02		
	−5,32	+1,12	+1,47	
0,4,−2	+5,60	−3,88		−1,22
	−2,95	+1,95		
	−2,32	+1,89	+1,18	

12.				
0,5,−2	+0″,80	−0″,53		−0″,11
	−0,48	+0,29		
	−0,24	+0,18	+0″,08	
0,3,−3	+0,72	−0,14		−0,10
	−0,36	+0,07		
	−0,36	+0,07	+0,11	
0,1,−3	+0,19	−0,36		−0,11
	−0,27	+0,18		
	−0,20	+0,17	+0,11	
13.				
0,0,−4	+0,20	+0,05	+0,06	+0,03
	−0,02		−0,06	
	−0,10	−0,03	−0,04	
0,1,−4	−0,43	+0,09	+0,05	+0,03
	−1,45	−0,02	+0,71	
	−1,02	−0,07	−0,78	
0,2,−4	+6,20	+0,03	−0,06	−0,02
	−2,54		+0,58	
	−7,32	−0,01	−0,46	
0,3,−4	+0,63		−0,05	
	−0,31		+0,05	
	−0,32		+0,02	

γ, g, g'	$(T)_2$ sin	$(U)_4$ *) sin	$(G)_2\,\nu$ sin	$(\Sigma)_2(2\nu+\nu^2)$ sin
1.				
−1,1,0	−305″,42	+0″,09	+2″,98	
0,1,0	+35,72	+3,19	−0,22	+1″,67
−1,2,0	−13,64	−1,58	−0,06	
1,0,0	−30,34	−1,60	−1,32	
0,2,0	+2,52	+0,23	+0,01	+0,12
	−1,28	−0,14		
	−0,93	−0,05	−0,08	
0,3,0	+0,22	+0,02		
	−0,13	−0,02		
	−0,06			
0,−1,−1	−0,99	−0,12	+0,01	−0,06
	+0,79	+0,07	+0,02	
	+0,31	+0,05	+0,04	
0,0,−1	−0,03	−0,04	+0,01	−0,01
	−8,01	+0,01	+0,10	
	+7,09	+0,01	−0,07	

*) $(U)_4 = (U)_2\left\{(1+\nu)^2\frac{h^2}{h_0^2}-1\right\}$

1.				
0,4,−4	+1″32	+0″18		+0″09
	−0,66	−0,08	+0″04	
	−1,05	−0,09	−0,12	
2.				
0,4,−4	−0,43	+0,07		+0,04
	+0,09	−0,03	+0,02	
	+0,15	−0,03	−0,07	
0,2,−4	+5,48	−0,06		−0,04
	−2,08	+0,03	+0,02	
	−1,77	+0,03	+0,02	
0,3,−4	+0,67	−0,06		−0,03
	−0,33	+0,03		
	−0,29	+0,03	+0,03	
0,0,−2	+0,33	+0,09	+0,11	+0,06
	+1,43	−0,01	−0,09	
	+0,01	−0,04	−0,08	
0,4,−2	+38,16	−0,22	+0,25	−0,36
	−28,93	+0,15	+1,46	
	−45,43	+0,10	−1,32	
0,2,−2	−457,37	+1,11	−0,13	+1,98
	+149,82	−0,55	+1,16	
	+458,06	−0,56	−2,96	
0,3,−2	−37,39	−0,21	−0,09	+0,04
	+16,42	+0,11	+0,08	
	+16,72	+0,11	+0,06	
0,4,−2	−2,73	−0,05		
	+1,41	+0,03		
	+0,80	+0,02		
0,1,−3	+2,14	−0,07	+0,01	−0,05
	−1,75	+0,04	+0,11	
	−2,66	+0,04	−0,06	
0,2,−3	−28,32	+0,02		+0,10
	+9,47	−0,01	+0,11	
	+27,51	−0,01	−0,21	
0,3,−3	−2,65	+0,06		+0,04
	+1,23	−0,02		
	+1,18	−0,02	−0,04	
0,2,−1	−1,24			
	+0,42			
	+1,18			
11.				
0,2,−4	+0,51	−0,37	+0,12	−0,20
	−0,62	+0,24	+0,03	
	−0,06	+0,17	+0,09	
0,3,−4	−9,70	+2,15	+0,09	+1,37
	+4,60	−1,00	+0,03	
	+4,95	−1,11	−1,46	

11.				
0,4,−4	−5″98	+3″84		+1″20
	+3,08	−1,93	+0″04	
	+2,75	−1,87	−1,17	
0,5,−4	−0,86	+0,51		+0,11
	+0,51	−0,30		
	+0,28	−0,18	−0,08	
0,3,−5	−1,06	+0,20	+0,01	+0,15
	+0,51	−0,09		
	+0,53	−0,11	−0,15	
0,4,−5	−0,79	+0,50		+0,15
	+0,44	−0,25		
	+0,36	−0,23	−0,15	
3.				
0,1,1	−1,20	−0,07		−0,04
	+0,81	+0,03	−0,04	
	+1,36	+0,03	+0,09	
0,2,1	+10,75	+0,03		−0,03
	−3,25	−0,01	−0,03	
	−11,50	−0,01	+0,06	
0,3,1	+0,66	+0,06		+0,03
	−0,25	−0,03		
	−0,33	−0,03	−0,03	
0,0,0	−0,15	−0,03	−0,06	+0,01
	−1,54	+0,02	+0,05	
	−0,12	+0,01	+0,04	
0,1,0	−38,52	+0,33	−0,20	+0,40
	+27,45	−0,17	−0,73	
	+44,36	−0,17	+0,54	
0,2,0	+463,56	−1,08	+0,06	−1,99
	−152,46	+0,55	−0,58	
	−465,14	+0,54	+2,51	
0,3,0	+37,98	+0,20	+0,05	−0,03
	−16,73	−0,10	−0,05	
	−16,97	−0,10	+0,03	
0,4,0	+2,76	+0,03		
	−1,43	−0,02		
	−0,80	−0,02		
0,1,−1	−0,78	+0,06		+0,03
	+0,65	−0,03	−0,02	
	+0,98	−0,03	−0,01	
0,2,−1	+12,48	+0,02		−0,04
	−4,34	−0,01	−0,04	
	−11,71	−0,01	+0,07	
0,3,−1	+1,32	−0,07		−0,04
	−0,62	+0,03		
	−0,60	+0,03	+0,04	

Digitized by Google

4.				
0, −4,3	+0″,79	+0″,02		+0″,01
	−0,82	−0,04	−0″,02	
	−0,29		+0,02	
0,0,3	−0,48	−0,32		−0,10
	+9,11	+0,14	−0,05	
	−9,12	+0,15	+0,16	
0,1,3	−1,45	−0,18		−0,11
	+0,56	+0,09	+0,01	
	+1,08	+0,09	+0,10	
0, −2,2	+0,68	+0,02		+0,02
	−0,35	−0,01		
	−0,29	−0,01		
0, −1,2	+12,63	+0,26	−0,17	+0,13
	−12,73	−0,20	+0,13	
	−4,16	−0,10	−0,05	
0,0,2	−5,06	−3,37	−0,13	−0,86
	+155,16	+1,61	−0,97	
	−149,91	+1,70	+1,96	
0,1,2	−23,00	−2,94	+0,08	−1,56
	+9,49	+1,48		
	+17,55	+1,40	+1,45	
0,2,2	−1,41	−0,22		−0,12
	+0,84	+0,13		
	+0,49	+0,05	+0,08	
0, −1,1	−0,15			
	+0,16		+0,01	
	+0,09		−0,01	
0,0,1	−0,09	−0,06		−0,02
	−1,28	+0,03	+0,02	
	+1,85	+0,03		
0,1,1	−0,12	−0,05		−0,03
	+0,12	+0,03	−0,02	
	+0,02	+0,02	+0,05	
12.				
0,2, −2	−0,87	+0,38	−0,13	+0,23
	+0,73	−0,25	−0,01	
	+0,39	−0,18	−0,10	
0,3, −2	+10,16	−2,18	−0,09	−1,39
	−4,84	+1,02	−0,01	
	−5,31	+1,12	+1,47	
0,4, −2	+5,58	−3,88		−1,22
	−2,96	+1,95		
	−2,31	+1,89	+1,18	
0,5, −2	+0,80	−0,53		−0,11
	−0,48	+0,29		
	−0,24	+0,18	+0,08	
0,3, −3	+0,71	−0,14		−0,10
	−0,35	+0,07		
	−0,35	+0,07	+0,11	

Digitized by Google

12.				
0,4,−3	+0″,53 −0,27 −0,24	−0″,36 +0,18 +0,17	+0″,44	−0″,11
13.				
0,0,−4	−0,49 +0,01 +0,10	−0,05 +0,03	−0,06 +0,05 +0,04	−0,03
0,1,−4	+0,43 +1,45 +1,09	−0,09 +0,02 +0,07	−0,05 −0,72 +0,78	−0,03
0,2,−4	−6,41 +2,63 +7,36	−0,03 +0,04	+0,06 −0,57 +0,47	+0,02
0,3,−4	−0,61 +0,31 +0,29		+0,04 −0,05 −0,02	

Hiemit ist die Berechnung der Coefficienten von ΔP und ΔQ in $d\Delta W_0$ abgemacht, da sie aus der Summe der Glieder der beiden letzten Tafeln bestehen.

200.

Es ist jetzt nur noch Ein Coefficient des Ausdrucks von $d\Delta W_0$ zu berechnen, und zwar der von $n'\Delta z'$, nach der Gleichung (66). Durch den Ausdruck (20), und mit bloser Aufnahme der mit $n\delta z$ multiplicirten Glieder von H und N erhielt ich die folgenden Coefficienten.

γ, g, g'	$\left(\frac{dT_0}{dg}\right)$ cos	$\left(\frac{d^2T_0}{dgdg'}\right)n\delta z$ cos	$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2T_0}{dg^2dg'}\right)n\delta z'^2$ cos	$\frac{1}{6}\left(\frac{d^3T_0}{dg^3dg'}\right)n\delta z'^3$ cos	$H\delta P$ cos	$N\delta Q$ cos
1.						
0,0,0		+100″,20	+0″,04	−0″,06	−0″,09	−0″,09
−1,1,0		−96,77	−0,04	+0,07	+0,13	+0,12
0,1,0		+238,97	+0,05	−0,11	+0,03	+0,04
−1,2,0		−121,95	−0,03	+0,11		−0,01
1,0,0		−113,85	−0,02	+0,02	−0,04	−0,05
0,2,0		+27,24	+0,02	−0,05		
		−16,32	−0,04	+0,05		
		−7,53	−0,01	+0,01		
0,3,0		+2,48		−0,01		
		−1,64		+0,01		
		−0,50				
0,−2,−1	−0″,07	+1,06	−0,22			
	0	−0,29	+0,05			
	+0,03	−0,67	+0,17			

Digitized by Google

1.						
0, −1, −4	−2,44	+9,86	−0,79			
	+2,4054	−4,5106	+0,1940	+0,0021	−0,0001	−0,0014
	+0,80	−5,44	+0,60			
0, 0, −1	0	+14,7740	−0,0364	−0,0136	−0,0127	−0,0135
	−29,1754	−6,9412	−0,1621	+0,0083	−0,0042	−0,0027
	+29,1754	−7,8216	+0,1995	+0,0079	+0,0243	+0,0207
0, 1, −4	+2,44	+19,51	+0,80			
	−0,80	−9,90	−0,62			
	−2,4054	−9,3739	−0,1866	+0,0024	−0,0064	−0,0049
0, 2, −1	+0,07	+2,42	+0,27			
	−0,03	−1,41	−0,21			
	0	−0,70	−0,06			
0, −1, −2	−0,12	+0,36	−0,05			
	+0,12	−0,18	+0,04			
	+0,04	−0,18	+0,04			
0, 0, −2	0	+0,76				
	−1,47	−0,41	−0,02			
	+1,47	−0,45	+0,02			
0, 1, −2	+0,12	+0,92	+0,08			
	−0,04	−0,44	−0,05			
	−0,12	−0,44	−0,02			
0, 0, −3	0					
	−0,05					
	+0,05					
2.						
0, 1, 0		+0,06	−0,02			
		−0,03	+0,01			
		−0,03	+0,01			
0, 2, 0		+0,22	−0,05			
		−0,11	+0,03			
		−0,11	+0,01			
0, 0, −1	0	−0,09	−0,20			
	−0,12	+0,18	+0,05			
	−0,04	−0,06	+0,15			
0, 1, −1	−3,63	+4,37	−0,03	−0,02		
	+2,42	−0,71	−0,05	+0,01		
	+4,04	−2,58	+0,08	+0,01		
0, 2, −1	+43,84	+33,88	+0,24	−0,02	+0,12	
	−14,48	−16,59	−0,18	+0,02	−0,04	
	−44,06	−16,83	−0,04		−0,12	
0, 3, −1	+3,61	+7,86	+0,12	−0,02		
	−1,60	−4,29	−0,09	+0,02		
	−1,61	−3,10	−0,03			
0, 1, −1	+0,26	+0,92	+0,02			
	−0,14	−0,56	−0,02			
	−0,08	−0,24				
0, −1, −2	−0,25	+0,24	−0,47			
	−0,36	−0,08	+0,09			
	+0,14	−0,16	+0,37			

Digitized by Google

2.

0,0,−2	0	+1″50	−3″00			
	+29,04	−0,70	+0,80		−0″02	−0″02
	+9,26	−0,78	+2,16		+0,02	+0,02
0,1,−2	+864,47	+2,49	−0,15		+0,02	+0,01
	−574,80	−1,04	−0,83			+0,01
	−962,10	−1,10	+1,12		−0,03	−0,02
0,2,−2	−10435,47	+3,60	+5,97		+0,01	+0,16
	+3446,97	−1,79	−1,65		−0,03	−0,08
	+10488,15	−1,72	−1,29		+0,02	−0,13
0,3,−2	−859,70	+0,77	+3,58		−0,02	
	+379,93	−0,40	−2,71		+0,01	
	+383,64	−0,29	−0,85		+0,02	
0,4,−2	−62,91	+0,30	+0,65			
	+32,62	−0,18	−0,51			
	+18,41	−0,12	−0,12			
0,5,−2	−1,49		+0,08			
	+2,58		−0,07			
	+1,01		−0,01			
0,0,−3	0	+0,29	−0,26			
	+2,56	−0,20	+0,07			
	+0,81	−0,10	+0,19			
0,1,−3	+76,22	−2,12	−0,01	+0″02		
	−50,67	−0,42	−0,10	−0,01		
	−84,83	+1,43	+0,13	−0,01		
0,2,−3	−920,06	−33,23	+0,75	+0,02	−0,11	+0,01
	+303,91	+16,45	−0,59	−0,02	+0,04	−0,01
	+924,71	+16,59	−0,16		+0,11	−0,01
0,3,−3	−75,80	−9,78	+0,52	+0,02		
	+33,49	+5,23	−0,39	−0,02		
	+33,82	+4,06	−0,13			
0,4,−3	−5,55	−1,16	+0,09			
	+2,87	+0,72	−0,07			
	+1,62	+0,32	−0,02			
0,1,−4	+4,14	−0,25	+0,01			
	−2,75	+0,01	−0,01			
	−4,62	+0,16	−0,01			
0,2,−4	−50,03	−3,33				
	+16,52	+1,64				
	+50,28	+1,64				
0,3,−4	−4,12	−0,99	+0,01			
	+1,82	+0,51	−0,01			
	+1,84	+0,42				
0,2,−5	−2,18	−0,13				
	+0,73	+0,10				
	+2,19	+0,10				

11.						
0,2,−3		−0″,30 +0,23 +0,10	+0″,10 −0,04 −0,03			
0,3,−3		+2,27 −1,06 −1,18	+0,79 −0,57 −0,20			
0,4,−3		+1,92 −0,98 −0,90	+0,57 −0,43 −0,13			
0,1,−4		+0,02 +0,40 −0,14				
0,2,−4		+11,46 −13,34 −1,10	+0,03 −0,02 −0,01	+0″,03 −0,02		
0,3,−4		−221,06 +105,76 +113,42	+0,17 −0,10 −0,04	+0,09 −0,09 −0,01	−0″,04 +0,01 +0,04	+0″,04 −0,01 −0,04
0,4,−4		−136,22 +69,96 +62,74	+0,15 −0,11 −0,04	+0,08 −0,09 −0,01	+0,09 −0,03 −0,09	−0,09 +0,03 +0,09
0,5,−4		−19,16 +11,16 +6,10	+0,04 −0,03 −0,01	+0,03 −0,04		
0,6,−4		−2,02 +1,28 +0,48				
0,2,−5		+1,58 −1,82 −0,15	−0,06 +0,01 +0,02			
0,3,−5		−29,20 +13,82 +15,01	−0,74 +0,53 +0,19	+0,01 −0,02		
0,4,−5		−21,13 +10,80 +9,72	−0,59 +0,15 +0,14	+0,01 −0,01	+0,02 −0,01 −0,02	−0,02 +0,01 +0,02
0,5,−5		−3,02 +1,76 +0,98	−0,17 +0,13 +0,04			
0,3,−6		−2,28 +1,12 +1,19	−0,11 +0,08 +0,03			
0,4,−6		−1,89 +0,97 +0,91	−0,10 +0,07 +0,02			

Digitized by Google

γ, g, g'	$\left(\frac{dG_0}{dg'}\right)$ cos	$\left(\frac{d^2G_0}{dgdg'}\right) n\partial z$ cos	$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2G_0}{dg^2dg}\right)(n\partial z)^2$ cos	$H\partial P$ cos	$N\partial Q$ cos
1.					
0, 0, 0		+6″,44			
−1, 1, 0		−36,59	−0″,01	+0″,06	+0″,06
0, 1, 0		+3,32			+0,01
−1, 2, 0		−1,00			+0,01
1, 0, 0		−78,13	−0,01	−0,02	−0,03
0, 2, 0		+0,10			
		−0,02			
		−3,61		−0,01	−0,01
0, 3, 0		0,00			
		0,00			
		−0,19			
0, −2, −1	−0″,07	+0,01			
	0	−0,13	+0,03		
	+0,03				
0, −1, −1	−2,41	+0,25	+0,01		
	+2,41	−3,19	+0,13		
	+0,80	−0,07	−0,01		
0, 0, −1	0	+0,79			
	−29,18	−2,49	+0,08	−0,01	−0,01
	+29,18	−2,84	−0,07	+0,03	+0,02
0, 1, −1	+2,41	+0,24	−0,01		
	−0,80	−0,08	+0,01		
	−2,41	−6,38	−0,14		
0, 2, −1	+0,07	+0,01			
	−0,03	−0,01			
	0	−0,35	−0,03		
0, −1, −2	−0,12	+0,02			
	+0,12	−0,11	+0,01		
	+0,04				
0, 0, −2	0	+0,03			
	−1,47	−0,17	+0,01		
	+1,47	−0,19	−0,01		
0, 1, −2	+0,12	+0,01			
	−0,04				
	−0,12	−0,20	−0,01		
2.					
0, 0, −1	−0,20	+0,13			
	−0,01	−0,04	+0,03		
	−0,01				
0, 1, −1	+2,42	+0,92			
	0	+0,27	+0,02		
	+2,43	−1,57	−0,02		
0, 2, −1	+0,07	+0,13			
	0	+0,15	+0,01		
	−29,50	−11,13	−0,04	−0,08	−0,08

Digitized by Google

2.					
0,3,−1	0				
	0	+0″,01			
	−0″,81	−1,86	−0″,02		
0,−1,−2	−0,21	−0,01			
	−0,22	−0,04	+0,04		
	+0,05				
0,0,−2	+47,64	+0,02	+0,03		
	+2,65	−0,54	+0,45	−0″,02	−0″,02
	+2,64	+0,08	−0,01	−0,02	−0,02
0,1,−2	−577,26	+0,13	+0,05		
	+0,07	−0,61	+0,41	+0,01	+0,01
	−577,26	−0,15	−0,40	−0,03	
0,2,−2	−15,84	+0,07	+0,01		
	0	−0,17	+0,11	−0,03	−0,03
	+6999,14	−1,03	−1,08	+0,02	−0,08
0,3,−2	−0,65	+0,01			
	0	−0,01	+0,01		
	+191,99	−0,17	−0,52	+0,02	
0,4,−2	−0,03				
	0				
	+7,90	−0,08	−0,06		
0,5,−2	0				
	0				
	+0,39				
0,0,−3	+4,20	−0,08			
	+0,23	−0,04	+0,04		
	+0,23	+0,01			
0,1,−3	−50,90	−0,91	+0,01		
	+0,01	−0,38	+0,05		
	−50,90	+0,91	−0,05		
0,2,−3	−1,40	−0,17			
	0	−0,20	+0,02		
	+617,09	+11,03	−0,13	+0,08	
0,3,−3	−0,06				
	−0,01	−0,01			
	+16,93	+2,51	−0,08		
0,4,−3	0,00				
	−0,01				
	+0,70				
0,1,−4	−2,77	−0,09			
	+0,01	−0,02			
	−2,76	+0,11			
0,2,−4	−0,07	−0,02			
	0	−0,01			
	+33,55	+1,10	+0,01		
0,3,−4	0				
	0				
	+0,92	+0,26			

Digitized by Google

2.					
0,2,−5	−0″01				
	0				
	+1,46				
11.					
0,3,−3		+0″05	+0″01		
		0,00			
		−0,78	−0,13		
0,4,−3		0			
		0			
		−0,59	−0,09		
0,2,−4		−6,25			
		0			
		−0,70			
0,3,−4		−3,35			
		−0,01			
		+75,67	−0,03	+0″03	−0″03
0,4,−4		−0,27			
		0			
		+40,49	−0,02	−0,06	+0,06
0,5,−4		−0,01			
		0			
		+3,27			
0,2,−5		−0,83	−0,01		
		0			
		−0,11	+0,01		
0,3,−5		−0,53	−0,01		
		0			
		+10,04	+0,12		
0,4,−5		−0,04			
		0			
		+6,39	+0,10	−0,01	+0,01
0,3,−6		−0,04			
		0			
		+0,78	+0,02		
0,4,−6		0			
		0			
		+0,58	+0,01		

$g,\ g'$	$\left(\frac{d\Sigma_2}{dg'}\right)$ cos	$\left(\frac{d^2\Sigma_2}{dgdg'}\right) n\delta z$ cos	$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\Sigma_2}{dg^2dg'}\right)(n\delta z)^2$ cos	$H\delta P$ cos	$N\delta Q$ cos
1.					
0,0		+30″28	+0″01	−0″04	−0″03
1,0		+76,82	+0,03		
2,0		+5,70	+0,01		
3,0		+0,36			

Digitized by Google

1.					
−2, −1		+0″,21	−0″,05		
−1, −1		+3,09	−0,26		
0, −1		+4,5431	−0,0119	−0″,0044	−0″,0045
1, −1		+6,30	+0,26		
2, −1		+0,50	+0,07		
−1, −2		+0,11	−0,01		
0, −2		+0,26			
1, −2		+0,29	+0,02		
2.					
1,0		+0,02			
2,0		+0,07	−0,02		
0, −1	+0″,11	−0,13	−0,07		
1, −1	−2,42	+1,02	−0,01		
2, −1	+14,63	+11,18	+0,06	+0,04	
3, −1	+0,80	+2,16	+0,05		
4, −1	+0,04	+0,16			
−1, −2	+0,17	−0,04	−0,10		
0, −2	−26,45	+0,46	−0,93		
1, −2	+577,19	+0,62	−0,07		−0,01
2, −2	−3483,74	+1,18	+1,94		+0,05
3, −2	−191,33	+0,21	+1,05		
4, −2	−10,50	+0,08	+0,14		
5, −2	−0,60				
0, −3	−2,33	+0,14	−0,08		
1, −3	+50,89	−0,26	−0,03		
2, −3	−307,15	−11,00	+0,25	−0,04	
3, −3	−16,87	−2,80	+0,13		
4, −3	−0,93	−0,22	+0,01		
1, −4	+2,77	−0,03			
2, −4	−16,70	−1,11			
3, −4	−0,92	−0,26			
2, −5	−0,73	−0,04			
11.					
2, −3		−0,13	+0,03		
3, −3		+0,73	+0,26		
4, −3		+0,50	+0,10		
2, −4		+6,96	+0,01		
3, −4		−72,36	+0,06		
4, −4		−42,32	+0,04	+0,03	−0,03
5, −4		−4,46	+0,01		
6, −4		−0,38			
2, −5		+0,92	−0,01		
3, −5		−9,51	−0,25		
4, −5		−6,65	−0,18		
5, −5		−0,71	−0,04		
3, −6		−0,78	−0,03		
4, −6		−0,54	−0,02		

Digitized by Google

γ, g, g'	$\left(\frac{d\bar{T}}{n^2 dz^2}\right)$ cos	$\left(\frac{d\bar{G}}{n^2 dz^2}\right)$ cos	$\left(\frac{d\bar{\Sigma}}{n^2 dz^2}\right)$ cos	$\left(\frac{d\bar{U}}{n^2 dz^2}\right)$ cos
1.				
0, 0, 0	+100″,00	+6″,44	+30″,22	+63″,34
−1, 1, 0	−96,49	−36,48		−60,01
0, 1, 0	+238,98	+3,33	+76,85	+158,80
−1, 2, 0	−121,88	−0,99		−120,89
1, 0, 0	−113,94	−78,19		−35,75
0, 2, 0	+27,21	+0,10	+5,71	+21,40
	−16,31	−0,02		−16,29
	−7,53	−3,63		−3,90
0, 3, 0	+2,47		+0,36	+2,11
	−1,63			−1,63
	−0,50	−0,19		−0,31
0, −2, −1	+0,77	−0,06	+0,16	+0,67
	−0,24	−0,10		−0,14
	−0,47	+0,03		−0,50
0, −1, −1	+6,66	−2,15	+2,83	+5,98
	−1,9106	−0,65		−1,26
	−3,74	+0,72		−4,46
0, 0, −1	+14,6978	+0,79	+4,5223	+9,39
	−36,2473	−31,61		−4,64
	+22,0032	+26,32		−4,32
0, 1, −1	+22,72	+2,64	+6,56	+13,52
	−11,32	−0,87		−10,45
	−11,9748	−8,93		−3,04
0, 2, −1	+2,76	+0,08	+0,57	+2,11
	−1,65	−0,04		−1,61
	−0,76	−0,38		−0,38
0, −1, −2	+0,19	−0,10	+0,10	+0,19
	−0,05	+0,02		−0,07
	−0,10	+0,04		−0,14
0, 0, −2	+0,76	+0,03	+0,26	+0,47
	−1,90	−1,63		−0,27
	+1,04	+1,27		−0,23
0, 1, −2	+1,12	+0,13	+0,31	+0,68
	−0,53	−0,04		−0,49
	−0,58	−0,33		−0,25
0, 0, −3	0	0	0	0
	−0,05	−0,05		0
	+0,05	+0,05		0
2.				
0, 1, 0	+0,04		+0,02	
	−0,02			
	−0,02			
0, 2, 0	+0,17		+0,05	
	−0,08			
	−0,10			

Digitized by Google

2.				
0,0,−1	−0″,29	−0″,07	−0″,09	−0″,13
	+0,11	−0,02		+0,13
	+0,05	−0,01		+0,06
0,1,−1	+0,69	+3,34	−1,11	−1,24
	+1,67	+0,29		+1,38
	+1,35	+0,84		+0,71
0,2,−1	+78,03	+0,20	+25,91	+51,92
	−34,27	+0,16		−31,43
	−61,05	−40,66		−20,39
0,3,−1	+11,57		+3,01	+8,56
	−5,96	+0,01		−5,97
	−4,74	−2,69		−2,05
0,4,−1	+1,20		+0,20	+1,00
	−0,72			−0,72
	−0,32	−0,03		−0,29
0,−1,−2	−0,48	−0,22	+0,03	−0,23
	−0,35	−0,22		−0,13
	+0,35	+0,05		+0,30
0,0,−2	−1,50	+17,66	−26,92	−22,24
	+29,10	+2,52		+26,58
	+10,68	+2,67		+8,01
0,1,−2	+866,54	−577,08	+577,73	+865,89
	−576,66	−0,11		−576,55
	−962,13	−577,84		−384,29
0,2,−2	−10425,73	−15,76	−3480,57	−6929,40
	+3440,42	−0,12		+3440,54
	+10485,03	+6996,97		+3488,06
0,3,−2	−855,37	−0,64	−190,07	−664,66
	+376,83			+376,83
	+382,49	+191,32		+191,17
0,4,−2	−64,96	−0,03	−10,38	−54,55
	+31,93			+31,93
	+18,17	+7,76		+10,41
0,5,−2	−4,41		−0,60	−3,81
	+2,51			+2,51
	+1,00	+0,39		+0,61
0,0,−3	+0,03	+4,12	−2,27	−1,82
	+2,43	+0,23		+2,20
	+0,90	+0,24		+0,66
0,1,−3	+74,11	−51,80	+50,60	+75,31
	−51,20	−0,32		−50,88
	−83,28	−50,04		−33,24
0,2,−3	−952,62	−1,57	−317,94	−633,11
	+319,48	−0,18		+319,66
	+941,24	+628,07		+313,17
0,3,−3	−85,04	−0,06	−19,54	−65,44
	+38,31	−0,02		+38,33
	+37,75	+19,36		+18,39

2.				
0,4,−3	−6″,62		−1″,14	−5″,48
	+3,52	−0″,01		+3,53
	+1,92	+0,70		+1,22
0,1,−4	+3,90	−2,86	+2,74	+4,02
	−2,75	−0,01		−2,74
	−1,47	−2,65		−1,82
0,2,−4	−53,36	−0,09	−17,81	−35,46
	+18,46	−0,01		+18,17
	+51,92	+34,66		+17,26
0,3,−4	−5,10		−1,18	−3,92
	+2,32			+2,32
	+2,26	+1,18		+1,08
0,2,−5	−2,31		−0,77	−1,54
	+0,83			+0,83
	+2,29	+0,59		+1,70
11.				
0,2,−3	−0,20		−0,10	
	+0,19			
	+0,07			
0,3,−3	+3,06	+0,06	+0,99	+2,01
	−1,63			−1,63
	−1,38	−0,91		−0,47
0,4,−3	+2,19		+0,60	+1,89
	−1,41			−1,41
	−1,03	−0,68		−0,35
0,1,−4	+0,02			
	+0,10			
	−0,14			
0,2,−4	+11,52	−6,25	+6,97	+10,80
	−13,38			−13,38
	−1,11	−0,70		−0,41
0,3,−4	−220,80	−3,35	−72,30	−145,15
	+105,57	−0,01		+105,58
	+113,37	+75,64		+37,73
0,4,−4	−135,99	−0,27	−42,28	−93,44
	+69,76			+69,76
	+62,69	+40,47		+22,22
0,5,−4	−19,09	−0,01	−4,45	−14,63
	+11,09			+11,09
	+6,09	+3,27		+2,82
0,6,−4	−2,02		−0,38	
	+1,28			
	+0,18			
0,2,−5	+1,52	−0,84	+0,91	+1,45
	−1,81			−1,81
	−0,13	−0,10		−0,03
0,3,−5	−29,93	−0,54	−9,76	−19,63
	+14,43			+14,43
	+15,20	+10,16		+5,04

Digitized by Google

11.				
0,4,−5	−21,71	−0,04	−6,83	−14,84
	+11,24			+11,24
	+9,86	+6,49		+3,37
0,5,−5	−3,19		−0,75	
	+1,89			
	+1,02			
0,3,−6	−2,39	−0,04	−0,81	−1,54
	+1,20			+1,20
	+1,22	+0,80		+0,42
0,4,−6	−1,99		−0,56	−1,43
	+1,04			+1,04
	+0,93	+0,59		+0,34

In den Ueberschriften der folgenden Tafel ist um Platz zu gewinnen

$$\left(\frac{d\bar{U}}{n'dz'}\right)\left\{(1+\nu)^2\,\frac{h^2}{h_0^2}-1\right\} = (XII)$$

$$\left(\frac{d\bar{G}}{n'dz'}\right)\nu \qquad = (XIII)$$

$$\left(\frac{d\bar{\Sigma}}{n'dz'}\right)(2\nu+\nu^2) \qquad = (XIV)$$

gesetzt worden.

$\gamma,\ g,\ g'$	$\left(\frac{d\bar{T}}{n'dz'}\right)$ cos	(XII) cos	(XIII) cos	(XIV) cos
1.				
0,0,0	+100,00	+75,33	+2,93	+19,44
−1,1,0	−96,49	−74,47	−22,74	
0,1,0	+238,98	+60,04	+2,00	+32,36
−1,2,0	−124,88	−30,80	+0,94	
1,0,0	−113,94	−27,10	−35,39	
0,2,0	+27,21	+4,94	−0,08	+2,88
	−16,31	−2,92	+0,03	
	−7,53	−1,17	−1,88	
0,3,0	+2,47	+0,35		+0,17
	−1,63	−0,22		
	−0,50	−0,06	−0,08	
0,−2,−1	+0,77	+0,22		+0,09
	−0,24	−0,07	−0,08	
	−0,47	−0,13		
0,−1,−1	+6,66	+1,84	+0,15	+1,05
	−1,9106	−0,7545	−1,3464	
	−3,74	−0,92	+0,07	
0,0,−1	+14,6978	+10,8386	+0,3521	+2,9243
	−36,2473	−5,4749	−1,3358	
	+22,0032	−5,2596	−1,9936	

Digitized by Google

1.				
0,1,−1	+22″72	+5″12	+0″44	+2″79
	−11,32	−2,68	+0,07	
	−11,9748	−2,3000	−2,9221	
0,2,−1	+2,76	+0,38		+0,24
	−1,65	−0,24		
	−0,76	−0,07	−0,16	
0,−1,−2	+0,19	+0,06		+0,03
	−0,05	−0,02	−0,05	
	−0,10	−0,03		
0,0,−2	+0,76	+0,53		+0,17
	−1,90	−0,27	−0,09	
	+1,04	−0,24	−0,11	
0,1,−2	+1,12	+0,24		+0,14
	−0,53	−0,13		
	−0,58	−0,10	−0,13	
0,0,−3	0			
	−0,05			
	+0,05			
2.				
0,1,0	+0,04	−0,03		
	−0,02	+0,01		
	−0,02	+0,01		
0,2,0	+0,17	−0,02		
	−0,08	+0,01		
	−0,10	+0,01		
0,0,−1	−0,29	−0,27	+0,06	−0,19
	+0,11	+0,14	+0,02	
	+0,05	+0,17	+0,05	
0,1,−1	+0,69	+1,75	−0,06	+0,89
	+1,67	−0,91	−0,13	
	+1,55	−0,77	−0,76	
0,2,−1	+78,03	−0,94	−0,03	−0,61
	−31,27	+0,13	−0,10	
	−61,05	+0,51	+0,71	
0,3,−1	+11,57	−1,19		−0,71
	−5,96	+0,71		
	−4,71	+0,71	+0,67	
0,1,−1	+1,20	−0,17		−0,06
	−0,72	+0,09		
	−0,32	+0,06	+0,01	
0,−1,−2	−0,18	−0,11		−0,06
	−0,35	0,00	+0,02	
	+0,35	+0,10		
0,0,−2	−1,50	−0,80	−0,11	−0,27
	+29,10	−0,12	+0,17	
	+10,68	+0,82	−0,03	
0,1,−2	+866,51	−9,33	+3,71	−9,62
	−576,66	+1,28	+0,18	
	−962,13	+5,37	+5,11	

Digitized by Google

2.				
0,2,−2	−10425,73	+23,44	−0,05	+44,64
	+3440,42	−11,83	+0,07	
	+10485,03	−11,52	−45,40	
0,3,−2	−55,37	−4,59	−0,04	+0,52
	+376,83	+2,43		
	+382,49	+2,15	+0,51	
0,4,−2	−61,96	−0,89		−0,41
	+31,93	+0,51		
	+18,17	+0,30	+0,08	
0,5,−2	−4,41	−0,09		
	+2,51	+0,07		
	+1,00	+0,02		
0,0,−3	+0,03	+0,07	−0,08	+0,08
	+2,43	−0,12		
	+0,90	−0,01	−0,03	
0,1,−3	+74,11	−2,05	+0,31	−4,54
	−51,20	+0,93	+0,15	
	−83,28	+1,11	+0,94	
0,2,−3	−952,62	+1,17	+0,07	+3,33
	+319,18	−0,40	+0,12	
	+941,24	−0,39	−3,67	
0,3,−3	−85,04	+1,00	−0,04	+0,92
	+38,31	−0,45		
	+37,75	−0,53	−0,83	
0,4,−3	−6,62	+0,08		+0,14
	+3,52	−0,05		
	+1,92	−0,03	−0,04	
0,1,−4	+3,90	−0,18	+0,02	−0,09
	−2,75	+0,08		
	−4,47	+0,08	+0,08	
0,2,−4	−53,36	−0,01		+0,19
	+18,16	+0,01		
	+11,92	+0,01	−0,19	
0,3,−4	−5,10	+0,14		+0,10
	+2,32	−0,07		
	+2,26	−0,07	−0,10	
0,2,−5	−2,31			
	+0,83			
	+2,29			
11.				
0,2,−3	−0,20	+0,02	−0,04	+0,11
	+0,49	−0,02		
	+0,07			
0,3,−3	+3,06	−0,75	−0,02	−0,40
	−1,63	+0,39		
	−1,38	+0,33	+0,42	
0,4,−3	+2,49	−1,62		−0,48
	−1,41	+0,89		
	−1,03	+0,72	+0,42	

Digitized by Google

11.				
0,1,−4	+0″02	+0″40	−0″17	+0″14
	+0,40	−0,36	−0,01	
	−0,14	−0,17	+0,04	
0,2,−4	+11,52	−8,63	+2,76	−4,83
	−13,38	+5,39	−0,01	
	−1,11	+3,89	+2,04	
0,3,−4	−220,80	+48,76	+2,21	+31,16
	+105,57	−22,55		
	+113,37	−25,08	−33,50	
0,4,−4	−135,99	+87,22	+0,16	+27,56
	+69,76	−43,67		
	+62,69	−42,67	−26,73	
0,5,−4	−19,09	+11,74		+2,68
	+11,09	−6,43		
	+6,09	−4,09	−1,93	
0,6,−4	−2,02	+1,11		+0,20
	+1,28	−0,65		
	+0,18	−0,30	−0,12	
0,2,−5	+1,52	−1,07	+0,36	−0,62
	−1,81	+0,66		
	−0,13	+0,46	+0,25	
0,3,−5	−29,93	+6,12	+0,35	+3,99
	+14,33	−2,80		
	+15,20	−3,13	−4,40	
0,4,−5	−21,71	+13,85	+0,01	+4,51
	+11,24	−7,02	+0,01	
	+9,86	−6,74	−4,29	
0,5,−5	−3,19	+1,98		+0,53
	+1,89	−1,09		
	+1,02	−0,66	−0,32	
0,3,−6	−2,39	+0,44		+0,32
	+1,20	−0,21		
	+1,22	−0,23	−0,36	
0,4,−6	−1,99	+1,24		+0,38
	+1,04	−0,64		
	+0,93	−0,60	−0,38	

201.

Jetzt sind alle Coefficienten des Ausdrucks für $d.\mathcal{J}W_0$ des Art. 186 so vorbereitet, dass nur die Schlussrechnungen auszuführen sind. Zufolge der nach und nach eingeführten Bezeichnungen ist

$$(I) = \left(\frac{dT}{ndz}\right) + (IX)$$

Das erste dieser beiden Glieder giebt die letzte Tafel des Art. 195, und das zweite giebt der Art. 198. Ferner

Digitized by Google

$$(2) = \left(\frac{dT}{dv}\right) + (X)$$

Das erste Glied ist in der ersten Tafel des Art. 196, und das zweite im Art. 198 enthalten. Ferner

$$(3) = \left(\frac{dT}{d\frac{h_0}{h}}\right) + (XI)$$

und diese Glieder sind auch in den Artt. 196 und 198 enthalten.

$$(4) = -\,y\,(IV)\,\frac{\varrho}{a}\sin\varphi + y\,(IV)'\,\frac{\varrho}{a}\cos\varphi$$

wo

$$\tfrac{1}{2}y\,(IV) = \frac{y}{\sqrt{1-e^2}}\beta;\ \ \tfrac{1}{2}y\,(IV)' = -\,\frac{y}{\sqrt{1-e^2}}\alpha$$

aus dem Art. 197 zu entnehmen sind.

$$(5) = -\,\{(VII) + y\,(V)\}\,\frac{\varrho}{a}\sin\varphi + \{(VIII) + y\,(V)'\}\,\frac{\varrho}{a}\cos\varphi$$

für welchen Ausdruck die vier Grössen $y\,(V)$, $y\,(V')$, (VII), (VIII) im Art. 197 zu finden sind. Ferner ist zufolge der im Laufe der Rechnung eingeführten Bezeichnungen

$$(6) = (T)_1 + (U)_1\left\{(1+\nu)^2\,\frac{h^2}{h_0^2} - 1\right\} + (G)_1\,\nu + (\Sigma)_1\,(2\nu+\nu^2)$$

$$(7) = (T)_2 + (U)_2\left\{(1+\nu)^2\,\frac{h^2}{h_0^2} - 1\right\} + (G)_2\,\nu + (\Sigma)_2\,(2\nu+\nu^2)$$

und diese Grössen findet man in den beiden letzten Tafeln des Art. 199 neben einander gestellt. Ferner ist zufolge der Bezeichnung im Art. 200

$$(8) = \left(\frac{dT}{n'dz}\right) + (XII) + (XIII) + (XIV)$$

und dort findet man diese Grössen zusammen gestellt. Der Coefficient (9) endlich ergab sich aus dem Ausdruck von T des Art. 76 durch Multiplication mit -3.

Um Alles hieher gehörige beisammen zu haben, soll hier noch der Ausdruck für $d\Delta W_0$ wiederholt werden. Dieser ist

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta W_0}{ndt} = {} & (1)\,n\Delta z + (2)\,\Delta\nu + (3)\,\Delta\tfrac{h_0}{h} + (4)\,\tfrac{d\Delta\nu}{ndt} + (5)\,\Delta y \\ & + (6)\,\Delta P + (7)\,\Delta Q \\ & + (8)\,n'\Delta z' + (9)\,\Delta\nu' + \Delta T\end{aligned}$$

und diese Coefficienten sind in den jetzt folgenden Tafeln zusammen gestellt.

Digitized by Google

γ, g, g'	(1) cos	(2) sin	(3) sin	(4) cos	(5) sin
1.					
0,0,0	−207,″187			−23,″944	
−1,1,0	+1328,206	−2383,″922	+7069,″155	−3517,125	−1130,″16
0,1,0	−146,900	−100,081	−349,595	+290,189	+93,56
−1,2,0	+302,356	−22,948	+233,203	−96,229	+41,15
1,0,0	+86,854	+195,374	+115,758	+290,426	−22374,80
0,2,0	−59,832	−15,942	−7,526	+7,939	−3,4
	+43,783	+6,474	+5,478	−3,897	+1,6
	+10,901	+2,566	+1,409	−2,691	−1,3
0,3,0	−6,744	−1,740	+0,364	+0,321	−0,1
	+5,190	+0,975	−0,247	−0,188	0,0
	+1,050	+0,260	−0,080	−0,063	−0,1
0,−3,−1	−0,24	+0,11	−0,12		
	+0,04	−0,02	+0,02		
	+0,17	−0,07	+0,07		
0,−2,−1	−1,81	+1,08	−1,01	−0,08	
	+0,35	−0,16	+0,15	0,00	
	+1,18	−0,65	+0,79	+0,06	
0,−1,−1	−14,25	+12,73	−8,81	−0,17	−2
	+2,63	−5,69	+3,73	−0,63	−81
	+9,03	−6,87	+7,78	+0,94	+2
0,0,−1	−23,03	+1,43	−1,15	−0,03	+15
	+11,04	+25,57	+10,53	−5,62	−31
	+37,48	−34,17	+13,57	+5,68	+25
0,1,−1	−22,07	−18,77	+12,27	+0,17	+3
	+15,66	+6,68	−5,28	−1,24	−3
	+5,02	+8,19	−2,98	+0,97	−98
0,2,−1	−3,56	−1,83	+1,50	+0,10	
	+2,72	+0,96	−0,89	−0,08	
	+0,69	+0,38	−0,24	0,00	
0,3,−1	−0,43	−0,17	+0,12	+0,01	
	+0,31	+0,13	−0,13	0,00	
	+0,08	+0,02	−0,03	0,00	
0,−2,−2	−0,03	+0,02	−0,02		
	+0,01	0,00	0,00		
	+0,02	−0,01	+0,01		
0,−1,−2	−0,16	+0,37	−0,25		
	+0,11	−0,16	+0,08		
	+0,28	−0,14	+0,15		
0,0,−2	−0,97	+0,10	−0,09	0,00	
	+1,24	+0,72	+0,10	−0,06	
	+1,12	−0,78	+0,23	−0,06	
0,1,−2	−0,67	−0,57	+0,11	0,00	
	+0,18	+0,25	−0,22	−0,02	
	+0,10	+0,22	−0,09	+0,02	

Digitized by Google

1.					
0,2,−2	−0″,11	−0″,08	+0″,05		
	+0,09	+0,04	−0,04		
	+0,01	+0,01	−0,01		
0,−1,−3	−0,01	+0,01	−0,01		
	0,00	−0,01	+0,01		
	+0,01	0,00	0,00		
0,0,−3	−0,03	+0,01	+0,01		
	+0,03	+0,01	0,00		
	+0,03	−0,02	+0,01		
0,1,−3	−0,01	−0,02	+0,02		
	0,00	0,00	0,00		
	+0,01	+0,01	0,00		
2.					
0,1,0	−0,07	−0,08	+0,05		
	+0,02	+0,02	−0,02		
	+0,02	+0,03	−0,02		
0,2,0	−0,03	−0,04	+0,03		
	+0,01	+0,01	−0,01		
	0,00	+0,02	−0,01		
0,3,0	−0,01	0,00	−0,01		
	−0,01	−0,01	+0,01		
	+0,01	0,00	0,00		
0,−1,−1	+0,05	−0,03	+0,02		
	−0,03	+0,01	−0,01		
	−0,04	+0,02	−0,02		
0,0,−1	+0,36	+0,05	−0,07	+0″,04	
	−0,27	−0,08	+0,16	−0,02	
	−0,25	+0,14	+0,16	+0,04	
0,1,−1	−3,93	+4,28	−2,85	+0,01	−5″
	−0,81	−2,52	+2,00	+0,30	+1
	+1,53	−2,97	+1,02	−0,48	+19
0,2,−1	−120,37	−121,20	+80,45	−0,02	0
	+68,34	+46,61	−46,04	+0,26	−8
	+51,30	+69,98	−35,05	−0,16	+56
0,3,−1	−18,69	−14,19	+9,97	−0,02	
	+13,05	+7,30	−6,91	+0,02	
	+4,67	+4,25	−2,06	−0,02	
0,4,−1	−2,32	−1,33	+1,00		
	+1,76	+0,80	−0,75		
	+0,44	+0,29	−0,16		
0,−1,−2	+0,64	+0,02	−0,35	−0,15	0
	−0,02	+0,22	−0,22	+0,05	+1
	−0,66	−0,09	+0,33	+0,10	0
0,0,−2	+2,52	+21,16	−23,68	−3,22	+288
	−16,07	−27,74	+27,29	+0,36	+30
	+0,25	−7,69	+8,93	+1,80	+5
0,1,−2	−425,74	−1455,23	+864,92	−1,54	+499
	+575,82	+518,23	−474,29	−38,06	−207
	+7,45	+682,85	−327,96	+39,09	−3495

2.					
0, 2, −2	+10361″02	+10422″16	−6946″60	+3″09	+21″
	−5136,38	−3503,18	+3488,98	−20,38	+595
	−5173,56	−6976,96	+3532,18	+18,32	−6088
0, 3, −2	+1286,05	+866,10	−677,80	+1,68	−49
	−756,05	−386,56	+387,64	−1,64	+50
	−381,11	−288,60	+195,58	+0,48	−53
0, 4, −2	+125,41	+63,36	−53,50	+0,14	−4
	−80,87	−33,00	+33,30	−0,12	+3
	−27,51	−14,52	+10,86	0,00	−1
0, 5, −2	+11,17	+4,52	−3,98		
	−7,64	−2,55	+2,56		
	−2,04	−0,84	+0,64		
0, −1, −3	+0,04	−0,03	+0,01		
	0,00	+0,02	−0,02		
	−0,06	+0,03	−0,03		
0, 0, −3	+0,22	+0,94	−1,05	−0,14	+11
	−0,70	−1,45	+1,34	+0,02	+2
	−0,16	−0,35	+0,33	+0,08	0
0, 1, −3	−20,02	−65,31	+48,46	−0,11	+33
	+32,14	+31,39	−28,55	−1,76	−13
	−2,15	+38,75	−19,05	+1,70	−128
0, 2, −3	+644,41	+646,75	−431,80	+0,14	+1
	−327,43	−223,02	+222,64	−1,46	+39
	−313,18	−424,35	+214,27	+1,28	−403
0, 3, −3	+85,07	+59,57	−45,37	+0,12	−3
	−52,28	−27,66	+27,37	−0,12	+4
	−24,21	−19,41	+12,37	+0,04	−4
0, 4, −3	+8,92	+4,73	−3,86		
	−6,06	−2,57	+2,51		
	−1,88	−1,09	+0,73		
0, 5, −3	+0,84	+0,36	−0,30		
	−0,62	−0,24	+0,21		
	−0,16	−0,08	+0,06		
0, 0, −4	+0,01	+0,04	−0,04		
	−0,02	−0,05	+0,05		
	−0,01	−0,01	+0,01		
0, 1, −4	−0,66	−2,57	+1,92	0,00	+2
	+1,21	+1,31	−1,18	−0,06	−1
	−0,21	+1,54	−0,74	+0,06	−4
0, 2, −4	+27,38	+27,44	−18,33	0,00	0
	−14,20	−9,63	+9,62	−0,08	+2
	−13,04	−17,52	+8,95	+0,06	−19
0, 3, −4	+3,80	+2,73	−2,03		
	−2,43	−1,30	+1,26		
	−1,07	−0,88	+0,53		
0, 4, −4	+0,42	+0,22	−0,18		
	−0,29	−0,12	+0,12		
	−0,09	−0,06	+0,03		

2.					
0,4,−5	−0″,04	−0″,08	+0″,06		
	+0,04	+0,04	−0,04		
	0,00	+0,05	−0,02		
0,2,−5	+0,99	+0,97	−0,65		
	−0,52	−0,34	+0,34		
	−0,47	−0,64	+0,31		
0,3,−5	+0,14	+0,10	−0,08		
	−0,09	−0,05	+0,05		
	−0,04	−0,03	+0,02		
11.					
0,3,−2	−0,06	−0,09	+0″,04		
	+0,05	+0,05	−0,04		
	+0,01	+0,03	0,00		
0,2,−3	+0,11	+0,17	−0,06		
	−0,15	−0,18	+0,13		
	−0,06	−0,02	−0,04		
0,3,−3	−2,31	−3,33	+1,77		
	+2,38	+1,93	−1,66		
	+0,35	+1,06	−0,21		
0,4,−3	−0,59	−1,39	−0,25		
	+1,05	+0,98	−0,43		
	−0,04	+0,27	+0,61		
0,5,−3	−0,17	−0,25	+0,04		
	+0,24	+0,19	−0,09		
	+0,02	+0,04	+0,03		
0,1,−4	−0,16	−0,52	+0,54		
	+0,05	−0,08	−0,08		
	−0,12	+0,25	−0,32		
0,2,−4	−1,07	−7,10	+1,35	−0″,04	+1″
	+8,11	+9,38	−6,10	−0,46	−2
	+0,57	−1,61	+4,18	+0,04	−3
0,3,−4	+134,30	+187,24	−104,67	+0,03	0
	−123,78	−100,67	+88,89	−0,54	+11
	−23,86	−66,62	+16,56	+0,10	−16
0,4,−4	+30,82	+63,71	+8,55	+0,04	−1
	−45,52	−41,58	+19,43	−0,18	+3
	+0,68	−13,36	−28,22	+0,02	+2
0,5,−4	+8,80	+9,97	−0,91		
	−10,12	−6,92	+3,60		
	−0,98	−1,71	−1,95		
0,6,−4	+1,60	+1,19	−0,34		
	−1,61	−0,84	+0,51		
	−0,22	−0,17	−0,09		
0,2,−5	−0,11	−0,76	+0,19		
	+0,66	+1,10	−0,83		
	+0,01	−0,13	+0,37		
0,3,−5	+14,80	+20,30	−11,72	0,00	0
	−13,71	−10,99	+9,86	−0,06	+1
	−2,60	−7,19	+2,06	+0,02	−2

Digitized by Google

44.					
0,4,−5	+3″,81	+8″,32	+1″,12		
	−3,87	−5,46	+2,50		
	+0,13	−1,76	−3,57		
0,5,−5	+1,18	+1,37	−0,12		
	−1,40	−0,97	+0,50		
	−0,15	−0,26	−0,26		
0,3,−6	+1,01	+1,35	−0,81		
	−0,93	−0,74	+0,65		
	−0,18	−0,47	+0,15		
0,4,−6	+0,30	+0,65	+0,07		
	−0,47	−0,43	+0,20		
	+0,02	−0,14	−0,27		
0,5,−6	+0,09	+0,10	−0,03		
	−0,10	−0,06	+0,05		
	−0,01	0,00	−0,01		
45.					
0,4,−6	+1,56	+2,78	−1,26		
	−2,21	−2,02	+1,56		
	−0,15	−0,67	+0,01		
0,5,−6	+0,74	+2,08	+0,16		
	−1,56	−1,66	+0,69		
	−0,02	−0,46	−0,45		
0,6,−6	+0,12	+0,79	−0,16		
	−0,67	−0,62	+0,28		
	−0,07	−0,22	+0,05		
3.					
0,2,1	+1,06	+1,06	−0,71		
	−0,53	−0,35	+0,35		
	−0,53	−0,71	+0,36		
0,1,0	−1,75	−4,67	+3,50		
	+2,32	+2,32	−2,32		
	0	+2,72	−1,56		
0,2,0	+12,20	+12,17	−28,05		
	−20,91	−13,94	+13,94		
	−21,21	−28,27	+14,11		
0,3,0	+5,22	+3,48	−2,70		
	−3,07	−1,54	+1,54		
	−1,55	−0,77	+0,78		
0,2,−1	+1,06	+1,06	−0,71		
	−0,53	−0,35	+0,35		
	−0,53	−0,71	+0,36		
4.					
0,0,3	0	0			
	+0,42	+0,42			
	+0,42	−0,42			
0,−1,2	−0,58	+0,58			
	0	−0,58			
	+0,39	−0,19			

Digitized by Google

4.					
0,0,2	0	0			
	+7″07	+7″07			
	+7,07	−7,07			
0,1,2	−0,58	−0,58			
	+0,39	+0,19			
	0	+0,58			
6.					
0,0,−1	0	−0,35	+0″41		
	−0,20	−0,26	−0,29		
	−0,32	+0,73	−0,18		
0,1,−1	+3,21	+9,62	−4,26		
	+2,10	+1,04	+2,12		
	0	−11,76	+2,14		
0,2,−1	−0,35	−0,35	−0,06		
	+0,26	+0,14	+0,06		
	+0,26	+0,56	−0,06		
0,1,−2	+0,16	+0,16	−0,22		
	+0,11	−0,06	+0,11		
	0	−0,05	+0,11		
7.					
0,3,−2	−0,80	−0,80	+0,36		
	+0,35	+0,26	−0,18		
	+0,56	+0,63	−0,18		
0,2,−3	−5,30	−8,83	+4,41		
	+3,95	+3,95	−2,64		
	+2,84	+6,65	−2,07		
0,3,−3	+47,67	+47,62	−21,07		
	−20,89	−15,67	+10,45		
	−32,05	−37,36	+10,64		
0,4,−3	+7,00	+5,25	−2,62		
	−3,62	−2,17	+1,45		
	−3,08	−2,49	+0,88		
0,3,−4	+4,00	+4,00	−1,77		
	−1,76	−1,32	+0,88		
	−2,69	−3,14	+0,89		

Von der Abtheilung 3 an kommen die Angaben sowohl dieser wie der folgenden analogen Tafeln nur in einzelnen Fällen in Betracht, und haben nur äusserst geringe Wirkung. Ich durfte mich daher begnügen, in diesen Abtheilungen genäherte Werthe der Coefficienten anzusetzen, nemlich

$$(1) = \left(\frac{dT_0}{dg}\right)$$

$$(2) = 2T_0 - G_0 \text{ für die Abth. 3 und 4}$$
$$= 3T_0 - G_0 \text{ für die Abth. 6 u. f.}$$

$$(3) = -2(T_0 - G_0 - \Sigma_0), \quad (4) = 0, \quad (5) = 0$$

Digitized by Google

γ, g, g'	(6) cos	(7) sin
1.		
0,0,0	+9″057	
−1,1,0	−8,94	−302″35
0,1,0	+14,59	+10,36
−1,2,0	−6,54	−15,28
1,0,0	−7,59	−27,42
0,2,0	+2,32	+2,88
	−1,11	−1,42
	−1,20	−1,06
0,3,0	+0,21	+0,24
	−0,12	−0,15
	−0,06	−0,06
0,−1,−1	+0,40	−1,16
	−0,20	+0,88
	−0,19	+0,40
0,0,−1	+0,92	−0,07
	−0,88	−7,90
	+0,01	+7,03
0,1,−1	+0,87	+1,59
	−0,42	−0,70
	−0,47	−1,26
2.		
0,1,−1	−0,09	−0,02
	+0,18	+0,08
	+0,22	+0,05
0,2,−1	+5,91	+5,38
	−2,23	−2,03
	−5,31	−4,72
0,3,−1	+0,64	+0,58
	−0,32	−0,30
	−0,28	−0,23
0,0,−2	−0,14	+0,59
	+1,06	+1,33
	+0,80	−0,14
0,1,−2	+37,30	+37,83
	−25,01	−27,32
	−11,58	−46,65
0,2,−2	−453,66	−454,41
	+150,18	+150,43
	+456,87	+454,54
0,3,−2	−37,69	−37,65
	+16,78	+16,64
	+16,82	+16,89
0,4,−2	−2,77	−2,78
	+1,42	+1,44
	+0,82	+0,82

γ, g, g'	(6) cos	(7) sin
0,1,−3	+2″08	+2″03
	−1,54	−1,60
	−2,40	−2,68
0,2,−3	−28,78	−28,20
	+9,79	+9,57
	+28,17	+27,32
0,3,−3	−2,63	−2,55
	+1,23	+1,21
	+1,15	+1,12
0,2,−4	−1,28	−1,24
	+0,44	+0,42
	+1,20	+1,18
11.		
0,2,−4	+0,07	+0,06
	−0,36	−0,35
	+0,22	+0,20
0,3,−4	−6,08	−6,09
	+3,65	+3,63
	+2,40	+2,38
0,4,−4	−0,95	−0,94
	+1,15	+1,16
	−0,30	−0,29
0,5,−4	−0,24	−0,24
	+0,26	+0,21
	+0,02	+0,02
0,3,−5	−0,74	−0,70
	+0,42	+0,42
	+0,26	+0,27
0,4,−5	−0,13	−0,14
	+0,15	+0,16
	−0,02	−0,02
3.		
0,1,1	−1,32	−1,31
	+0,79	+0,80
	+1,18	+1,18
0,2,1	+10,75	+10,75
	−3,29	−3,29
	−11,13	−11,15
0,3,1	+0,76	+0,75
	−0,26	−0,28
	−0,39	−0,39
0,0,0	−0,22	−0,23
	−1,18	−1,17
	−0,08	−0,07

Digitized by Google

3.		
0,1,0	−38″03	−37″99
	+26,51	+26,55
	+44,53	+44,73
0,2,0	+460,61	+460,55
	−452,55	−452,49
	−462,42	−462,09
0,3,0	+38,24	+38,20
	−16,87	−16,88
	−17,44	−17,04
0,4,0	+2,79	+2,79
	−1,45	−1,45
	−0,82	−0,82
0,1,−1	−0,70	−0,69
	+0,60	+0,60
	+0,94	+0,94
0,2,−1	+12,48	+12,46
	−4,37	−4,36
	−11,65	−11,65
0,3,−1	+1,20	+1,21
	−0,59	−0,59
	−0,53	−0,53
4.		
0,−1,3	+0,82	+0,82
	−0,85	−0,85
	−0,28	−0,27
0,0,3	−0,88	−0,90
	+9,27	+9,20
	−8,87	−8,81
0,1,3	−1,74	−1,74
	+0,66	+0,66
	+1,27	+1,27
0,−2,2	+0,68	+0,72
	−0,34	−0,36
	−0,28	−0,30
0,−1,2	+12,50	+12,85
	−12,63	−12,80
	−4,49	−4,31
0,0,2	−9,45	−9,42
	+156,39	+155,80
	−146,96	−146,25
0,1,2	−27,48	−27,42
	+10,99	+10,97
	+20,45	+20,40

5.		
0,2,2	−1″73	−1″75
	+0,97	+0,97
	+0,32	+0,32
0,−1,1	−0,15	−0,15
	+0,47	+0,47
	+0,08	+0,08
0,0,1	−0,47	−0,47
	−4,23	−4,23
	+1,88	+1,88
0,1,1	−0,18	−0,20
	+0,14	+0,13
	+0,09	+0,09
12.		
0,2,−2	−0,37	−0,39
	+0,47	+0,47
	+0,12	+0,11
0,3,−2	+6,52	+6,50
	−3,83	−3,83
	−2,73	−2,72
0,1,−2	+0,50	+0,48
	−1,00	−1,04
	+0,75	+0,76
0,5,−2	+0,16	+0,16
	−0,19	−0,19
	+0,02	+0,02
0,3,−3	+0,48	+0,47
	−0,29	−0,28
	−0,18	−0,17
0,1,−3	+0,02	+0,06
	−0,09	−0,09
	+0,08	+0,04
13.		
0,0,−1	+0,34	−0,33
	−0,08	+0,06
	−0,17	+0,17
0,1,−1	−0,26	+0,26
	−0,76	+0,74
	−1,87	+1,94
0,2,−1	+6,15	−6,36
	−1,93	+2,06
	−7,79	+7,84
0,3,−1	+0,58	−0,57
	−0,26	+0,26
	−0,30	+0,27

Digitized by Google

γ, g, g'	(8) cos	(9) sin
1.		
0, 0, 0	+197,70	
−1, 1, 0	−193,67	−3397,61
0, 1, 0	+333,35	+811,19
−1, 2, 0	−151,74	−329,45
1, 0, 0	−176,43	−575,67
0, 2, 0	+34,95	+60,25
	−19,20	−32,79
	−10,58	−15,35
0, 3, 0	+2,99	+4,92
	−1,85	−3,03
	−0,64	−0,99
0, −2, −1	+1,08	−1,76
	−0,39	+0,50
	−0,60	+0,87
0, −1, −1	+9,70	−24,32
	−4,0115	+16,3486
	−4,59	+9,32
0, 0, −1	+28,8128	−2,2984
	−13,0380	−88,3923
	+14,7500	+80,0835
0, 1, −1	+30,77	+37,16
	−13,93	−16,66
	−17,1969	−21,4712
0, 2, −1	+3,38	+3,65
	−1,89	−2,10
	−0,99	−0,96
0, −1, −2	+0,28	−0,73
	−0,12	+0,18
	−0,13	+0,27
0, 0, −2	+1,46	−0,19
	−2,26	−2,18
	+0,69	+1,99
0, 1, −2	+1,50	+1,12
	−0,66	−0,53
	−0,81	−0,71
0, 0, −3	0	−0,02
	−0,03	−0,05
	+0,05	+0,05
2.		
0, 1, 0	+0,01	+0,11
	−0,01	−0,03
	−0,03	−0,06
0, 2, 0	+0,15	+0,06
	−0,07	−0,02
	−0,09	−0,05

γ, g, g'	(8) cos	(9) sin
2.		
0, 0, −1	−0,69	−0,25
	+0,27	+0,11
	+0,27	−0,23
0, 1, −1	+3,27	+0,11
	+0,63	+3,84
	+0,02	+3,74
0, 2, −1	+76,43	+180,11
	−30,94	−68,15
	−59,83	−156,40
0, 3, −1	+9,37	+19,56
	−5,22	−10,23
	−3,36	−7,45
0, 4, −1	+0,97	+1,84
	−0,63	−1,13
	−0,22	−0,47
0, −1, −2	−0,65	+0,46
	−0,33	−0,60
	+0,15	−0,41
0, 0, −2	−3,01	+9,70
	+29,15	+42,23
	+14,47	+7,58
0, 1, −2	+851,33	+1289,75
	−572,20	−880,20
	−951,62	−1491,18
0, 2, −2	−10357,99	−15535,43
	+3428,66	+5136,67
	+10428,11	+15614,25
0, 3, −2	−859,45	−1289,21
	+379,26	+568,46
	+385,45	+578,46
0, 4, −2	−62,96	−94,40
	+32,44	+48,64
	+18,55	+27,86
0, 5, −2	−4,50	−6,73
	+2,58	+3,83
	+1,02	+1,52
0, 0, −3	+0,10	+1,06
	+2,31	+2,16
	+0,86	+0,26
0, 1, −3	+70,86	+70,01
	−50,12	−51,27
	−84,26	−83,70
0, 2, −3	−948,05	−965,54
	+319,20	+327,05
	+937,18	+943,57

Digitized by Google

2.		
0,3,−3	−83,13	−86,85
	+37,86	+40,01
	+36,39	+37,65
0,4,−3	−6,40	−6,90
	+3,47	+3,74
	+1,85	+1,97
0,1,−4	+3,65	+2,67
	−2,67	−2,07
	−4,31	−3,31
0,2,−4	−53,48	−40,90
	+18,47	+14,12
	+51,71	+39,23
0,3,−4	−4,86	−3,94
	+2,25	+1,87
	+2,09	+1,67
0,2,−5	−2,31	−1,16
	+0,83	+0,51
	+2,29	+1,38
11.		
0,2,−3	−0,11	−0,17
	+0,17	+0,22
	+0,07	+0,02
0,3,−3	+1,89	+3,61
	−1,24	−2,40
	−0,63	−1,28
0,4,−3	+0,39	+0,62
	−0,52	−0,92
	+0,11	+0,26
0,1,−4	+0,39	+0,56
	+0,03	0,00
	−0,27	−0,36
0,2,−4	+0,82	+1,33
	−8,00	−12,22
	+5,82	+7,31
0,3,−4	−138,37	−207,52
	+83,02	+124,28
	+54,79	+82,19
0,4,−4	−21,05	−31,48
	+26,09	+39,08
	−6,71	−10,01
0,5,−4	−4,67	−6,98
	+4,66	+6,99
	+0,07	+0,14
0,6,−4	−0,71	−1,05
	+0,63	+0,93
	+0,06	+0,11
0,2,−5	+0,19	+0,17
	−1,15	−1,29
	+0,58	+0,71

11.		
0,3,−5	−19,47	−22,96
	+11,53	+13,70
	+7,67	+9,18
0,4,−5	−3,34	−4,08
	+4,23	+5,15
	−1,17	−1,23
0,5,−5	−0,68	−0,98
	+0,80	+0,99
	+0,04	+0,03
0,3,−6	−1,63	−1,56
	+0,99	+0,93
	+0,63	+0,63
0,4,−6	−0,37	−0,32
	+0,40	+0,41
	−0,05	−0,09
3.		
0,4,1	−0,04	+0,13
	+0,03	−0,09
	+0,05	−0,15
0,2,1	+0,53	−1,60
	−0,18	+0,53
	−0,53	+1,60
0,1,0		+5,24
		−3,49
		−5,84
0,2,0		−63,34
		+20,91
		+63,63
0,3,0		−5,22
		+2,30
		+2,33
0,1,−1	+0,04	+0,13
	−0,03	−0,09
	−0,05	−0,15
0,2,−1	−0,53	−0,16
	+0,18	+0,53
	+0,53	+1,60
0,3,−1	−0,04	−0,13
	+0,02	+0,06
	+0,02	+0,06
4.		
0,−1,3	+0,10	−0,10
	−0,10	+0,10
	−0,03	+0,03
0,0,3	0	0
	+1,25	−1,25
	−1,25	+1,25

4.			6.		
0,1,3	−0,10	+0,10	0,0,−2	0	0
	+0,03	−0,03		+0,02	+0,04
	+0,10	−0,10		−0,03	−0,06
0,−1,2	+1,17	−1,75	0,1,−2	−0,36	−0,73
	−1,17	+1,75		−0,11	−0,21
	−0,39	+0,58		+0,54	+1,08
0,0,2	0	0	0,2,−2	+0,02	+0,04
	+14,14	−21,21		−0,01	−0,02
	−14,14	+21,21		−0,03	−0,05
0,1,2	−1,17	+1,75	7.		
	+0,39	−0,58	0,2,−2	−0,09	−0,18
	+1,17	−1,75		+0,04	+0,09
0,−1,1	−0,01	+0,02		+0,09	+0,19
	+0,01	−0,01	0,3,−2	+0,53	+1,07
	0,00	−0,01		−0,18	−0,35
0,0,1	0	0		−0,54	−1,08
	−0,06	+0,18	0,1,−2	+0,06	+0,12
	+0,06	−0,18		−0,02	−0,05
0,1,1	+0,01	−0,02		−0,03	−0,07
	0,00	+0,01	0,2,−3	+7,95	+10,60
	−0,01	+0,02		−3,95	−5,27
6.				−8,42	−11,23
0,0,0		0	0,3,−	−47,67	−63,56
		+0,01		+15,67	+20,89
		−0,02		+48,08	+64,10
0,1,0		−0,22	0,1,−3	−5,25	−7,00
		−0,07		+2,17	+2,90
		+0,36		+3,08	+4,11
0,2,0		+0,01	0,2,−4	+0,89	+0,89
		0,00		−0,44	−0,44
		−0,02		−0,94	−0,94
0,0,−1	0	0	0,3,−4	−5,34	−5,34
	+0,20	+0,81		+1,76	+1,76
	−0,32	−1,29		+5,38	+5,38
0,1,−1	−3,21	−12,84	0,1,−4	−0,59	−0,59
	−1,05	−4,20		+0,24	+0,24
	+5,34	+21,37		+0,34	+0,34
0,2,−1	+0,17	+0,70			
	−0,09	−0,35			
	−0,26	−1,01			

Aus demselben Grunde wie oben, sind hier von der Abtheilung 3 an nur genäherte Werthe der Coefficienten angesetzt, nemlich

$$(8) = \left(\frac{dT_0}{dg}\right);\ (9) = -3T_0,\ \text{bez.} = -\tfrac{1}{2}T_0$$

Digitized by Google

202.

Wir kommen jetzt zur Berechnung der Coefficienten von $d\Delta z$, die im Art. 187 entwickelt wurden, und

$$\frac{d\Delta z}{dt} = (\Delta W_0) + \left(\frac{d\Delta W_0}{dy}\right) n\partial z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\Delta W_0}{dy^2}\right)(n\partial z)^2 + \ldots$$
$$+ (10) n\Delta z + (11)\Delta v + (12)\Delta\frac{h_0}{h} + (13)\Delta y$$

gaben. Die Zusammensetzung dieser Coefficienten und ihre Berechnung sind so einfach, dass ich sogleich das Resultat ansetzen kann.

g, g'	(10) sin	(11) cos	(12) cos	(13) cos
1.				
0,0		−2815",71	+25",44	{−206264",8 / −1246,9}
1,0	+185",79	+86,91	+15,61	+22670,7
2,0	+25,42	+6,53	+1,06	+309,4
3,0	+2,05	+0,36	+0,06	+8,3
−3,−1	−0,30	+0,10		
−2,−1	−1,76	+2,11	+0,03	−5
−1,−1	−83,05	+76,50	+0,03	−37
0,−1	−3,69	+41,98	+1,13	−2
1,−1	−93,84	−111,88	+1,76	+36
2,−1	−4,38	−2,64	+0,07	+7
3,−1	−0,22	−0,10		
−2,−2	−0,05	−0,04		
−1,−2	−1,05	+0,81	+0,02	
0,−2	−0,16	+0,87	+0,03	
1,−2	−1,54	−2,09	+0,05	
2,−2	−0,08	−0,11	+0,01	
−1,−3	−0,02	+0,02		
0,−3	0,00	0,00		
1,−3	−0,03	−0,05		
2.				
1,0	+2,57	+2,60	−0,02	
2,0	+0,18	+0,11		
−1,−1	−0,01	−0,11	+0,03	
0,−1	−0,11	−1,31	+0,35	+1
1,−1	+26,19	+27,53	−0,02	+1
2,−1	+62,35	+36,68	−0,75	−2
3,−1	+6,73	+4,15	−0,32	−1
4,−1	+0,61	+0,29	−0,02	
−1,−2	+2,56	−1,91	−0,05	−5
0,−2	+14,81	−101,60	+0,06	−250
1,−2	−3587,33	−4282,98	+27,60	−121
2,−2	−5644,92	−3140,56	+19,80	+243
3,−2	−396,03	−139,38	+0,40	+125
4,−2	−26,33	−6,73	−0,01	+7
5,−2	−1,76	−0,34		

Digitized by Google

2.				
−1, −3	+0,19	−0,03	−0,02	
0, −3	+1,07	−2,46	−0,40	−10″
1, −3	−139,76	−179,34	+0,67	−8
2, −3	−381,83	−223,43	+1,79	+10
3, −3	−29,62	−13,38	+0,44	+8
4, −3	−2,47	−0,75	+0,03	
5, −3	−0,16	−0,03		
0, −4	+0,06	−0,07	−0,02	
1, −4	−4,30	−5,97		
2, −4	−17,87	−10,89	+0,09	
3, −4	−1,49	−0,79	+0,04	
4, −4	−0,11	−0,03		
1, −5	−0,12	−0,18		
2, −5	−0,71	−0,46		
3, −5	−0,06	−0,02		
11.				
3, −2	+0,05	+0,08	−0,01	
2, −3	+0,46	+1,09	−0,15	
3, −3	+1,70	+2,65	−0,29	
4, −3	+0,95	+1,36	−0,16	
5, −3	+0,16	+0,16	−0,02	
1, −4	−0,14	−2,31	+0,54	
2, −4	−10,16	−86,89	+11,34	−1
3, −4	−99,45	−138,77	+16,02	+3
4, −4	−43,07	−37,76	+6,53	+3
5, −4	−5,93	−5,13	+0,56	+1
6, −4	−0,62	−0,39	+0,04	
2, −5	−3,40	−7,39	+0,96	
3, −5	−11,01	−15,65	+1,81	
4, −5	−3,77	−8,04	+0,92	
5, −5	−0,84	−0,80	+0,09	
3, −6	−0,76	−1,09	+0,13	
4, −6	−0,47	−0,64	+0,07	
5, −6	−0,07	−0,06	+0,01	
15.				
4, −6	−1,59	−3,78	+0,52	
5, −6	−1,34	−2,97	+0,39	
6, −6	−0,47	−0,91	+0,11	
3.				
2,1	−0,41	−0,18		
1,0	+86,74	+84,80		
2,0	−13,01	−5,69		
3,0	−0,99	−0,35		
2, −1	−0,47	−0,20		
4.				
0,3	+0,25	+0,76		

Digitized by Google

4.				
−1,2	−8,70	+9,24		
0,2	+2,66	+12,23		
1,2	+6,11	+5,29		
6.				
1,0	−17,50	−17,43		
0,−1	−0,12	+1,05		
1,−1	+107,52	+112,68		
2,−1	+6,14	+3,05		
1,−2	+0,20	+0,54		
7.				
3,−2	+0,13	−0,10		
2,−3	+3,49	+3,22		
3,−3	−7,18	−1,58		
4,−3	−0,68	−0,08		
3,−4	−0,66	−0,17		

Von der Abtheilung 3 an sind hier wieder nur die genäherten Werthe der Coefficienten aufgenommen worden, nemlich

$$(10) = \left(\frac{d.rW_0}{dy}\right)$$
$$(11) = 2\nu$$

und eben so wird es in den folgenden Tafeln geschehen, welches ich hier ein für alle Mal anmerke.

203.

Um den Coefficienten (14) des Art. 187 zu erhalten, dienen die folgenden Hülfsgrössen.

g, g'	$\left(\frac{d^2W_0}{dy^2}\right)$ cos	$\left(\frac{d^2W_0}{dy^2}\right)nd\zeta$ cos	$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2W_0}{dy^2}\right)(nd\zeta)^2$ cos	$\left(\frac{d^2W}{n^2dz^2}\right)$ cos
1.				
0,0	+1129,02	+70,94	−0,20	+1199,76
1,0	+489,15	+94,66	−0,24	+583,57
2,0	+54,28	+17,31	−0,08	+71,51
3,0	+5,11	+2,35	−0,02	+7,44
−3,−1	+0,88	+0,05	−0,02	+0,91
−2,−1	+9,51	+0,58	−0,09	+10,00
−1,−1	+86,43	+2,62	−0,15	+88,90
0,−1	+56,69	+6,41	−0,04	+63,06
1,−1	−91,48	+6,40	+0,14	−84,94
2,−1	−9,81	+1,36	+0,07	−8,38
3,−1	−0,89	+0,20	+0,02	−0,67

Digitized by Google

1.				
−2, −2	+0″,14	−0″,03		+0″,11
−1, −2	+1,27	−0,03	−0″,01	+1,23
0, −2	+1,44	+0,15	−0,01	+1,58
1, −2	−1,34	+0,04	+0,01	−1,29
2, −2	−0,14	−0,03		−0,17
−1, −3	+0,02	−0,02		0,00
0, −3	+0,03			+0,03
1, −3	−0,02	−0,02		−0,04
2.				
1,0	+2,54	+0,06		+2,60
2,0	+0,30	+0,01	−0,01	+0,30
−1, −1	−0,09	+0,24	−0,01	+0,14
0, −1	−0,41	+2,18	−0,05	+2,02
1, −1	+18,84	+7,91	−0,03	+26,69
2, −1	+65,71	+11,93		+77,64
3, −1	+8,47	+4,20	+0,03	+12,70
4, −1	+0,85	+0,78	+0,01	+1,64
−1, −2	−2,44	−1,09	−0,21	−3,74
0, −2	−2,70	−5,50	−0,45	−8,65
1, −2	−3400,40	−1,45	+0,28	−3401,57
2, −2	−7053,03	+6,19	+1,28	−7045,26
3, −2	−854,17	+4,11	+0,91	−849,15
4, −2	−82,68	+0,90	+0,30	−81,48
5, −2	−7,35	+0,13	+0,06	−7,16
−1, −3	−0,10	−0,27	−0,02	−0,39
0, −3	−0,18	−1,96	−0,02	−2,16
1, −3	−122,94	−7,37	+0,05	−130,23
2, −3	−455,50	−11,91	+0,17	−467,24
3, −3	−55,99	−1,57	+0,11	−60,45
4, −3	−5,46	−0,86	+0,03	−6,29
5, −3	−0,48	−0,10		−0,58
0, −4	−0,01	−0,06		−0,07
1, −4	−3,55	−0,37		−3,92
2, −4	−20,66	−0,82	−0,01	−21,49
3, −4	−2,56	−0,37		−2,93
4, −4	−0,25	−0,07		−0,32
1, −5	−0,09	−0,01		−0,10
2, −5	−0,81	−0,04		−0,85
3, −5	−0,10	−0,03		−0,13
11.				
2, −3	−0,01	+0,37	+0,09	+0,45
3, −3	+0,45	+1,29	+0,21	+1,95
4, −3	+0,06	+0,88	+0,15	+1,09
5, −3	+0,01	+0,21	+0,05	+0,27
1, −4	−0,39	+0,36	+0,05	+0,02
2, −4	−3,17	−37,43	+0,18	−40,42
3, −4	−27,63	−85,47	+0,22	−112,88
4, −4	−3,36	−48,93	+0,12	−52,17
5, −4	−0,45	−11,04	+0,03	−11,46
6, −4	−0,06	−1,68		−1,74

Digitized by Google

11.				
2, −5	−0,34	−3,03	−0,04	−3,41
3, −5	−3,18	−9,24	−0,18	−12,57
4, −5	−0,43	−6,38	−0,14	−6,95
5, −5	−0,07	−1,46	−0,05	−1,58
3, −6	−0,23	−0,63	−0,02	−0,88
4, −6	−0,03	−0,49	−0,02	−0,54
5, −6	−0,01	−0,09		−0,10
15.				
4, −6	−0,21	−0,81	−0,68	−1,73
5, −6	−0,09	−0,66	−0,69	−1,44
6, −6	−0,04	−0,17	−0,34	−0,55

In den Ueberschriften der folgenden Tafel sind die folgenden Abkürzungen angewandt

$$(1\mathfrak{k})_1 = -\frac{y}{\sqrt{1-e^2}}\frac{d^2.r_0^2}{a^2dg^2},\quad (1\mathfrak{k})_2 = -\frac{y}{\sqrt{1-e^2}}\frac{d^2.r_0^2}{a^2dg^2}\,n\delta z$$

$$(1\mathfrak{k})_3 = -\frac{y}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{d^2.r_0^2}{a^2dg^2}(n\delta z)^2,\quad (1\mathfrak{k})_4 = (1\mathfrak{k})_1 + (1\mathfrak{k})_2 + (1\mathfrak{k})_3$$

$$(1\mathfrak{k})_5 = (1\mathfrak{k})_4 + (1\mathfrak{k})_4\,\nu = -\frac{y}{\sqrt{1-e^2}}\frac{d^2.\bar{r}^2}{a^2n^2dz^2}(1+\nu)$$

g, g'	$(1\mathfrak{k})_1$ cos	$(1\mathfrak{k})_2$ cos	$(1\mathfrak{k})_3$ cos	$(1\mathfrak{k})_4$ cos	$(1\mathfrak{k})_4\,\nu$ cos	$(1\mathfrak{k})_5$ cos
1.						
0,0			+0,04	+0,04	−0,04	−0,03
1,0	−193,63		+0,03	−193,60	+1,25	−192,35
2,0	−10,62		+0,02	−10,60	+0,03	−10,57
3,0	−0,66			−0,66		−0,66
−2, −1		+0,07		+0,07	−0,02	+0,05
−1, −1		+0,31		+0,31	−0,01	+0,30
0, −1		+0,02		+0,02		+0,02
1, −1		−0,31		−0,31	−0,01	−0,32
2, −1		−0,08		−0,08	+0,02	−0,06
2.						
0, −1		−0,01		−0,01	−0,01	−0,02
1, −1		−0,01		−0,01	−0,01	−0,02
2, −1		+0,01		+0,01	−0,01	0,00
3, −1		+0,01		+0,01	−0,01	0,00
−1, −2		+0,22		+0,22	+0,07	+0,29
0, −2		+2,22		+2,22	+1,00	+3,22
1, −2		+1,03		+1,03	+0,72	+1,75
2, −2		−2,07		−2,07	+1,01	−1,06
3, −2		−1,24		−1,24	+0,77	−0,47
4, −2		−0,16		−0,16	+0,07	−0,09

Digitized by Google

2.					
0, −3	+0″10		+0″10	+0″04	+0″14
1, −3	+0,07		+0,07	+0,05	+0,12
2, −3	−0,09		−0,09	+0,04	−0,05
3, −3	−0,08		−0,08	+0,05	−0,03
4, −3	−0,01		−0,01		−0,01
11.					
1, −4	+0,01	−0″01	0,00		0.00
2, −4	+0,02	−0,01	+0,01	−0,01	0,00
3, −4	−0,01	−0,01	−0,02	+0,02	0,00
4, −4	−0,02	−0,01	−0,03	+0,03	0,00
5, −4	−0,01		−0,01		−0,01

204.

Wir erhalten nun durch das Vorhergehende die numerischen Coefficienten der Gleichung

$$-2\frac{d.\delta v}{ndt} = \left(\frac{d.TW_0}{dy}\right) + \left(\frac{d^2.TW_0}{dy^2}\right) n\delta z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3.TW_0}{dy^3}\right) (n\delta z)^2 + \ldots$$
$$+ (14)\, n.\delta z + (15).\delta v + (16).\delta y$$

des Art. 187 wie folgt.

g, g'	(14) cos	(15) sin	(16) sin
1.			
0,0	+1199″73		
1,0	+391,22	−193″60	−22523″2
2,0	+60,94	−5,30	−621,7
3,0	+6,78	−0,22	−25,8
−3, −1	+0,91		
−2, −1	+10,05	−0,05	−4
−1, −1	+89,20	−0,31	−34
0, −1	+63,08	−0,09	−15
1, −1	−85,26	−0,31	−36
2, −1	−8,44	−0,07	−5
3, −1	−0,67		
−2, −2	+0,11		
−1, −2	+1,23		
0, −2	+1,58		
1, −2	−1,29		
2, −2	−0,17		
−1, −3	0,00		
0, −3	+0,03		
1, −3	−0,04		

Digitized by Google

2.			
1,0	+2″,60		
2,0	+0,30		
−1,−1	+0,14		
0,−1	+2,00		
1,−1	+26,67		
2,−1	+77,64		
3,−1	+12,70		
4,−1	+1,64		
−1,−2	−3,45	−0″,10	−17″
0,−2	−5,43	−2,15	−367
1,−2	−3399,82	−0,99	−196
2,−2	−7046,32	−2,13	−137
3,−2	−849,62	−1,12	−45
4,−2	−81,57	−0,09	−4
5,−2	−7,16		
−1,−3	−0,39		
0,−3	−2,02	−0,09	−15
1,−3	−130,11	−0,07	−13
2,−3	−467,29	−0,10	−6
3,−3	−60,48	−0,08	−3
4,−3	−6,30	−0,01	
5,−3	−0,58		
0,−4	−0,07		
1,−4	−3,92		
2,−4	−21,49		
3,−4	−2,93		
4,−4	−0,32		
1,−5	−0,10		
2,−5	−0,85		
3,−5	−0,13		
11.			
2,−3	+0,45		
3,−3	+1,95		
4,−3	+1,09		
5,−3	+0,27		
1,−4	+0,02		
2,−4	−40,42	−0,01	
3,−4	−142,88	−0,03	−1
4,−4	−52,17	−0,03	−1
5,−4	−11,47	−0,01	
6,−4	−1,74		
2,−5	−3,41		
3,−5	−12,57		
4,−5	−6,95		
5,−5	−1,58		
3,−6	−0,88		
4,−6	−0,54		
5,−6	−0,10		

Digitized by Google

15.			
4, −6	−1″73		
5, −6	−1,44		
6, −6	−0,55		
3.			
2,1	−0,47		
1,0	+87,20		
2,0	−12,26		
3,0	−1,78		
2, −1	−0,60		
4.			
0,3	+0,86		
−1,2	+7,69		
0,2	+13,57		
1,2	+6,96		
6.			
1,0	−17,44		
0, −1	−0,40		
1, −1	+106,36		
2, −1	+12,28		
1, −2	+0,48		
7.			
3, −2	+0,41		
2, −3	+4,31		
3, −3	−9,12		
4, −3	−1,34		
3, −4	−0,85		

205.

Die Coefficienten der Gleichung

$$\frac{d\frac{h_0}{h}}{ndt} = (17)\,n\Delta z + (18)\,\Delta v + (19)\,\Delta P + (20)\,\Delta Q + (21)\,n'\Delta z' + (22)\,\Delta v' - \Delta'\Sigma$$

des Art. 188 findet man leicht wie folgt.

g, g'	(17) cos	(18) sin	(19) cos	(20) sin	(21) cos	(22) sin
1.						
0,0	+55″57		−2″29		−49″66	
1,0	+114,69	+99″79	−4,70	−5″18	−109,21	−177″87
2,0	+12,83	+7,44	−0,62	−0,58	−8,59	−12,78
3,0	+1,14	+0,46			−0,53	−0,83

Digitized by Google

1.						
−3, −1	+0″05					
−2, −1	+0,39	−0″20			−0″25	+0″37
−1, −1	+3,86	−3,36	−0″16	+0″18	−3,88	+5,99
0, −1	+6,34	−0,53	−0,28	+0,06	−7,4466	+0,9447
1, −1	+6,36	+5,59	−0,26	−0,27	−9,35	−10,00
2, −1	+0,83	+0,49			−0,84	−0,86
3, −1	+0,08	+0,03				
−2, −2	+0,01					
−1, −2	+0,14	−0,11			−0,13	+0,20
0, −2	+0,29	−0,05			−0,43	+0,07
1, −2	+0,22	+0,18			−0,45	−0,32
2, −2	+0,02	+0,01				
2.						
1,0	+0,03	+0,01				
2,0	+0,01	+0,01				
−1, −1	−0,02					
0, −1	−0,18	+0,05			+0,28	−0,02
1, −1	−0,06	−3,32	+0,18	+0,13	+0,52	+4,23
2, −1	+39,86	+40,16	−2,07	−1,83	−25,30	−59,63
3, −1	+4,34	+3,45	−0,14	−0,14	−2,30	−4,63
4, −1	+0,40	+0,25			−0,14	−0,34
−1, −2	−0,26	+0,24			+0,03	−0,42
0, −2	−1,21	−25,66	+1,21	+1,09	+27,19	+37,51
1, −2	+283,33	+574,16	−24,88	−24,99	−568,14	−855,42
2, −2	−3437,06	−3458,81	+150,54	+150,81	+3435,93	+5154,66
3, −2	−283,96	−189,85	+8,32	+8,28	+189,55	+284,49
4, −2	−20,70	−10,29	+0,47	+0,47	+10,49	+15,56
5, −2	−1,48	−0,58			+0,60	+0,89
−1, −3	−0,01	+0,02				
0, −3	−0,01	−1,36			+2,19	+1,93
1, −3	+15,25	+33,18	−1,47	−1,45	−49,09	−49,04
2, −3	−213,56	−214,53	+9,55	+9,34	+314,61	+320,47
3, −3	−19,07	−13,47	+0,59	−0,60	+18,62	+19,59
4, −3	−1,51	−0,81			+1,00	+1,19
5, −3	−0,11	−0,05				
0, −4		−0,06				
1, −4	+0,57	+1,33			−2,83	−1,94
2, −4	−9,07	−9,08	+0,44	+0,41	+17,62	+13,58
3, −4	−0,87	−0,63			+1,08	+0,94
4, −4	−0,06	−0,04				
1, −5	+0,02	+0,05				
2, −5	−0,33	−0,32			+0,77	+0,48
3, −5	−0,02	−0,02				
11.						
3, −2	+0,02	+0,03				
2, −3	−0,07	−0,10			−0,01	+0,10
3, −3	+0,69	+1,00			−0,59	−1,07
4, −3	+0,36	+0,52			−0,12	−0,48
5, −3	+0,08	+0,09				

Digitized by Google

11.						
1, −4	−0″07	+0″05				
2, −4	+1,73	+1,56	−0″11	−0″11	−2″14	−3″23
3, −4	−40,15	−56,42	+1,79	+1,84	+40,84	+61,16
4, −4	−16,76	−28,37	+0,67	+0,69	+14,72	+22,03
5, −4	−2,88	−3,08	+0,07	+0,07	+1,77	+2,65
6, −4	−0,37	−0,27			+0,18	+0,26
2, −5	+0,18	+0,48			−0,29	−0,34
3, −5	−4,36	−6,01	+0,20	+0,20	+5,77	+6,66
4, −5	−2,16	−3,74	+0,07	+0,07	+2,32	+2,89
5, −5	−0,39	−0,45			+0,22	+0,37
3, −6	−0,30	−0,38			+0,49	+0,44
4, −6	−0,16	−0,30			+0,18	+0,22
5, −6	−0,01	−0,04				
15.						
4, −6	−0,46	−0,81				
5, −6	−0,40	−0,87				
6, −6	−0,15	−0,30				
3.						
1,1			+0,75	+0,74		
2,1	−0,35	−0,35	−3,57	−3,55	−0,18	+0,53
3,1			−0,15	−0,16		
0,0			−1,20	−1,19		+0,16
1,0	+1,17	−2,35	+25,27	+25,28		−3,50
2,0	−14,09	−14,09	−152,83	−152,86		+21,14
3,0	−1,16	−0,77	−8,41	−8,41		+1,16
4,0			−0,50	−0,50		
1, −1			+0,54	+0,55		
2, −1	−0,35	−0,35	−4,08	−4,06	+0,18	+0,53
3, −1			−0,30	−0,29		
4.						
0,3			+0,26	+0,27		
−1,2			−0,08	−0,25		
0,2			+2,42	+2,41		
1,2			+4,92	+4,98		
2,2			+0,37	+0,35		
12.						
2, −2			+0,19	+0,19		
3, −2			−1,78	−1,97		
4, −2			−0,50	−0,50		
5, −2			−0,07	−0,07		
3, −3			−0,14	−0,14		
4, −3			−0,05	−0,05		
13.						
1, −4			+0,27	−0,27		
2, −4			−2,00	+2,10		
3, −4			−0,10	+0,10		

Digitized by Google

6.						
0, −1	0	+0,44			−0,15	−0,44
1, −1	−1,07	−3,22			+1,07	+3,22
2, −1	+0,06	+0,09			−0,03	−0,09
7.						
2, −3	+2,65	+3,98			−3,98	−3,98
3, −3	−15,91	−15,91			+15,91	+15,91
4, −3	−1,76	−1,32			+1,32	+1,32
3, −4	−1,34	−1,34			+1,78	+1,34

206.

Mit wenig Mühe ergeben sich ferner die Coefficienten der Gleichung

$$\Delta^{h_0}_{h} = \frac{d.\Delta z}{dt} + 2\Delta v + \Delta y$$
$$+ (23)n\Delta z + (24)\frac{d.\Delta z}{dt} + (25)\Delta v + (26)\Delta y$$

des Art. 188 wie folgt.

g, g'	(23) sin	(24) cos	(25) cos	(26) cos
1.				
0,0		−2648,04	+779,93	−1427,6
1,0	+194,11	+202,06	−268,47	−22177,5
2,0	+5,40	+13,74	−15,03	−303,3
3,0	+0,23	+0,74	−0,74	−8,5
−3, −1		+0,09	−0,09	
−2, −1	+0,04	+2,32	−2,33	+3
−1, −1	+0,29	+77,29	−80,25	+111
0, −1	+0,18	+50,49	−54,91	+53
1, −1	+0,33	−99,87	+97,65	−139
2, −1	+0,02	−2,20	+2,03	−1
3, −1		−0,08	+0,05	
−2, −2		+0,03	−0,01	
−1, −2		+0,93	−0,99	+1
0, −2		+1,08	−1,27	+1
1, −2		−1,76	+1,68	−2
2, −2		−0,04	+0,06	
0, −3		+0,02	−0,01	
1, −3		−0,01	+0,01	
2.				
1,0		+2,16	−2,51	+2
2,0		+0,08	−0,09	

Digitized by Google

2.				
−1, −4		−0″,01	+0″,08	−1″
0, −4	−0″,02	+2,39	−0,68	+25
1, −4	−0,02	+27,81	−24,55	+34
2, −4	−0,01	+34,34	−54,15	+1
3, −4		+4,97	−4,14	
4, −4		+0,14	−0,27	
−1, −2	+0,20	−2,29	+2,36	+12
0, −2	+4,09	−103,56	−85,77	+370
1, −2	+2,34	−4116,02	+3513,66	−3854
2, −2	+0,23	−3005,56	+4901,77	−3030
3, −2	−0,36	−137,73	+203,63	−94
4, −2	−0,01	−6,84	+9,35	−2
5, −2		−0,37	+0,48	
−1, −3		−0,18	+0,14	
0, −3	+0,17	−3,25	−2,13	+5
1, −3	+0,17	−176,22	+135,43	−155
2, −3	+0,01	−211,53	+335,36	−194
3, −3	−0,02	−10,20	+16,26	−8
4, −3		−0,55	+0,86	−8
5, −3			+0,04	
0, −4		−0,25		
1, −4		−3,98	+1,13	−6
2, −4		−10,33	+15,82	−10
3, −4		−0,51	+0,86	−1
4, −4			+0,04	
1, −5		−0,19	+0,12	
2, −5		−0,43	+0,64	
3, −5			+0,03	
11.				
3, −2		+0,01	−0,05	
2, −3		+0,11	−0,47	
3, −3		+0,34	−1,46	
4, −3		+0,10	−0,79	
5, −3		+0,02	−0,09	
1, −4	−0,02	+0,33	+0,04	−1
2, −4	−0,03	−12,27	+10,16	−13
3, −4	−0,01	−20,61	+89,07	−22
4, −4		−3,25	+35,26	−4
5, −4		−0,71	+3,30	−1
6, −4		−0,07	+0,26	
2, −5		−1,12	+3,39	−1
3, −5		−2,11	+10,04	−2
4, −5		−0,70	+4,82	−1
5, −5		−0,10	+0,49	
3, −6		−0,17	+0,69	
4, −6		−0,06	+0,39	
5, −6			+0,03	
15.				
4, −6		−0,17	+1,48	
5, −6		−0,10	+1,17	
6, −6			+0,34	

Digitized by Google

207.

Es kommt jetzt die Reihe an die Berechnung der Coefficienten des Ausdrucks (74) für $\Delta\Xi$. Hiebei ist zu bemerken, dass die Coefficienten von Ξ diejenigen des Ausdrucks für W_0 des Art. 106 sind, welche dem Index $\gamma = 0$ angehören. Setzt man zur Abkürzung

$$(27)_1 = -2\Xi\partial\frac{h_0}{h}$$

$$(27)_2 = \quad 3\Xi\left(\partial\frac{h_0}{h}\right)^2$$

$$(27)_3 = -2\partial\frac{h_0}{h} + 4\left(\partial\frac{h_0}{h}\right)^2 - 7\left(\partial\frac{h_0}{h}\right)^3$$

dann wird zufolge des Art. 190

$$(27) = \Xi + (27)_1 + (27)_2 + (27)_3$$

und man bekommt für diese Functionen die folgenden Werthe.

$g.\ g'$	Ξ cos	$(27)_1$ cos	$(27)_2$ cos	$(27)_3$ cos
1.				
0,0	+2939″99	+40″89	+0″48	+1961″65
1,0	+269,61	−1,10	−0,07	+116,01
2,0	+10,02	−1,26	−0,04	+2,47
3,0	+0,55	−0,08		+0,12
−2,−1	+0,28	−0,04		+0,07
−1,−1	+7,52	−0,15		+3,53
0,−1	+14,82	+1,65	+0,03	+9,54
1,−1	+13,37	−0,09		+7,06
2,−1	+0,63	−0,11		+0,18
3,−1	+0,04			+0,02
−1,−2	+0,21			+0,10
0,−2	+0,43	+0,06		+0,34
1,−2	+0,44	−0,02		+0,24
2,−2	+0,02			+0,04
−1,−3	+0,01			
0,−3	+0,02			+0,03
1,−3	+0,01			+0,01
2.				
−1,−1	−0,01	+0,01		
0,−1	+1,20	+0,04		−0,20
1,−1	+0,08	−0,08		−3,07
2,−1	+30,92	+0,48	−0,01	+20,79
3,−1	+2,22	−0,01		+1,05
4,−1	+0,16			+0,06

Digitized by Google

2.				
−1, −2	−0″14	+0″14		−0″13
0, −2	−5,79	+3,42	+0″06	+190,74
1, −2	+491,42	+12,32	+0,19	+669,87
2, −2	−2775,04	−51,80	−0,69	−1876,15
3, −2	−149,78	−4,34	−0,02	−68,49
4, −2	−8,13	−0,27	+0,01	−2,81
5, −2	−0,46			−0,12
0, −3	−1,29	+0,13		+6,30
1, −3	+29,16	+0,71	+0,01	+42,09
2, −3	−179,74	−3,43	−0,03	−121,50
3, −3	−10,36	−0,40		−4,90
4, −3	−0,61			−0,24
5, −3	−0,04			−0,01
0, −4	−0,05			+0,18
1, −4	+1 23	+0,04		+1,84
2, −4	−7,97	−0,15		−5,38
3, −4	−0,48			−0,23
4, −4	−0,03			−0,02
1, −5	+0,05			+0,07
2, −5	−0,30			−0,20
3, −5	−0,02			−0,01
11.				
3, −2	+0,01			+0,01
2, −3	−0,03	+0,01		−0,02
3, −3	+0,43	+0,09		+0,35
4, −3	+0,05	−0,28		−0,10
5, −3	+0,01	−0,03		−0,01
1, −4	+0,25	+0,21	+0,01	+0,77
2, −4	+0,25	−0,45	−0,02	+0,63
3, −4	−25,31	−7,17	−0,16	−21,29
4, −4	−2,82	+11,99	+0,25	+4,17
5, −4	−0,49	+1,09	+0,03	+0,22
6, −4	−0,06	+0,08		+0,01
2, −5	+0,03	−0,01		+0,10
3, −5	−2,88	−0,89	−0,01	−2,17
4, −5	−0,37	+1,54	+0,03	+0,51
5, −5	−0,07	+0,15		+0,03
3, −6	−0,20	−0,05		−0,17
4, −6	−0,03	+0,13		+0,04
5, −6	−0,01			
15.				
4, −6	−0,23	−0,07	−0,01	−0,20
5, −6	−0,06	+0,21	+0,01	+0,08
6, −6	−0,03	+0,05	−0,01	−0,01
3.				
2,1	−0,22			−0,15

Digitized by Google

3.				
1,0	+1,20			+1,86
2,0	−9,48			−6,29
3,0	−0,46			−0,21
2,−1	−0,25			−0,16
4.				
0,3	+0,01			−0,04
−1,2	−3,09			−2,18
0,2	−0,46			−1,06
1,2	+1,00			+0,37
6.				
0,−1	+1,23			−6,64
1,−1	+8,04			−5,26
2,−1	−0,07			+0,06
1,−2	−0,26			+0,17
7.				
2,−3	+1,62			+1,52
3,−3	−4,99			−3,33
4,−3	−0,39			−0,20
3,−4	−0,47			−0,31

Die Coefficienten (28) und (29) sind so einfach zu erhalten, dass es unnöthig wird, dafür Zwischengrössen anzugeben. Wenn man die Bezeichnung des Art. 197 wieder aufnimmt, so wird

$$(28) = \frac{3(1-e^2)}{4f}\left\{(VII) - \frac{2e}{1-e^2}\right\}$$

$$(29) = \frac{3(1-e^2)}{4f''}(VIII)$$

In Betreff der Glieder, aus welchen die Coefficienten (30) und (31) bestehen, ist zu bemerken, dass $-3\left(\frac{da\overline{\Omega}}{nds}\right)$ dem Theil von $\overline{T}$ gleich ist, welcher vom Index $\gamma = 0$ abhängt, und daher unmittelbar aus dem Art. 75 entnommen werden kann. Dieses hat seinen Grund darin, dass der entsprechende Theil von $T_0 = -3\left(\frac{da\Omega_0}{dg}\right)$ ist, und die Veränderliche ν hier noch nicht berücksichtigt ist. Das Glied $-6a\overline{\Omega}$ des Coefficienten (31) braucht auch nicht besonders berechnet zu werden, da die Entwickelung von $-3a\overline{\Omega}$ schon im § 7, Art. 116 vorkommt, und hier benutzt werden kann. Es sind also um die Ausdrücke der Coefficienten (30) und (31) zu erhalten, nur die Producte der eben genannten Functionen mit $2\nu + \nu^2$ und bez. ν zu berechnen. Diese giebt die folgende Tafel, in deren Ueberschriften um Platz zu gewinnen

Digitized by Google

$$(30)_1 = -3\left(\frac{da\bar{\Omega}}{ndz}\right)$$
$$(30)_2 = -3\left(\frac{da\bar{\Omega}}{ndz}\right)(2\nu + \nu^2)$$
$$(31)_1 = -6a\bar{\Omega}\bar{\zeta}$$
$$(31)_2 = -6a\bar{\Omega}\bar{\zeta}\nu$$

gesetzt worden ist.

g, g'	$(30)_1$ sin	$(30)_2$ sin	$(31)_1$ cos	$(31)_2$ cos
1.				
0,0			−1704″08	+26″04
1,0	−216″44	−53″84	+306,10	+22,31
2,0	−16,16	−5,57	+11,09	+2,14
3,0	−1,35	−0,46	+0,64	+0,13
−3,−1	+0,04		+0,01	
−2,−1	+0,43	+0,22	+0,24	+0,07
−1,−1	+6,37	+1,79	+8,32	+0,39
0,−1	+0,46	+0,24	−82,91	+2,07
1,−1	−9,32	−3,07	+11,51	+1,72
2,−1	−1,03	−0,28	+0,77	+0,09
3,−1	−0,10	−0,02	+0,05	
−2,−2	+0,01			
−1,−2	+0,19	+0,06	+0,24	+0,02
0,−2	+0,04	+0,02	−1,99	+0,08
1,−2	−0,28	−0,11	+0,32	+0,03
2,−2	−0,03	−0,01	+0,02	
−1,−3	+0,01		+0,01	
0,−3	0,00		−0,04	
1,−3	−0,01		+0,01	
2.				
1,0	−0,02	−0,01	+0,02	
2,0	−0,02		+0,02	
−1,−1	−0,01		−0,01	
0,−1	+0,03		+0,06	−0,14
1,−1	+1,41	−1,44	−5,79	+1,04
2,−1	−60,93	+1,25	+60,74	−0,43
3,−1	−7,64	+1,12	+5,70	−0,56
4,−1	−0,73	+0,11	+0,42	−0,04
−1,−2	−0,03	−0,21	+0,18	−0,08
0,−2	−1,51	−2,12	−42,47	−0,58
1,−2	−434,10	+5,99	+864,57	+9,85
2,−2	+5213,22	−66,36	−5212,64	+45,62
3,−2	+427,34	−1,89	−283,79	+0,37
4,−2	+30,95	+0,06	−15,33	−0,06
5,−2	+2,19	+0,02	−0,86	

2.				
−1, −3	−0,01		+0,01	
0, −3	−0,16	−0,20	−2,40	+0,03
1, −3	−24,44	+1,07	+50,33	+0,26
2, −3	+323,09	−3,27	−322,87	+2,80
3, −3	+29,90	−1,24	−20,75	+0,66
4, −3	+2,38	−0,13	−1,25	+0,05
5, −3	+0,18		−0,08	
0, −4	−0,01		−0,09	
1, −4	−0,96	+0,08	+2,03	
2, −4	+13,68	−0,13	−13,67	+0,12
3, −4	+1,39	−0,11	−1,00	+0,06
4, −4	+0,12		−0,06	
1, −5	−0,03		+0,07	
2, −5	+0,49		−0,49	
3, −5	+0,05		−0,04	
11.				
3, −2	−0,06		+0,05	−0,02
2, −3	+0,12	−0,02	−0,20	+0,02
3, −3	−2,00	+0,94	+1,95	−0,46
4, −3	−1,53	+1,00	+1,44	−0,48
5, −3	−0,26		+0,20	−0,06
1, −4	0,00	+0,10	−0,05	+0,10
2, −4	−5,76	+3,16	+10,42	−3,52
3, −4	+110,43	−50,79	−108,23	+23,88
4, −4	+67,97	−42,86	−63,25	+20,79
5, −4	+9,53	−5,25	−6,63	+2,02
6, −4	+1,01	−0,48	−0,55	+0,15
2, −5	−0,57	+0,29	+1,06	−0,33
3, −5	+11,71	−5,18	−11,42	+2,41
4, −5	+8,83	−5,61	−8,32	+2,74
5, −5	+1,33	−0,73	−0,94	+0,30
3, −6	+0,76	−0,34	−0,74	+0,15
4, −6	+0,69	−0,42	−0,65	+0,21
5, −6	+0,10	−0,05	−0,07	
15.				
4, −6	+1,91	−1,22	−1,85	+0,68
5, −6	+2,38	−1,75	−2,23	+0,96
6, −6	+0,95	−0,72	−0,82	+0,37

Setzt man nun ferner, um in den Ueberschriften Platz zu gewinnen,

$$(32)_1 = -3\left\{\left(\frac{da\bar{\Omega}}{dP}\right) - F\left(\frac{da\bar{\Omega}}{dK}\right)\right\}$$

$$(32)_2 = -3\left\{\left(\frac{da\bar{\Omega}}{dP}\right) - F\left(\frac{da\bar{\Omega}}{dK}\right)\right\}(2\nu + \nu^2)$$

$$(33)_1 = -3\left(\frac{da\bar{\Omega}}{dQ}\right)$$

$$(33)_2 = -3\left(\frac{da\bar{\Omega}}{dQ}\right)(2\nu + \nu^2)$$

Digitized by Google

so wird

$$(32) = (32)_1 + (32)_2$$
$$(33) = (33)_1 + (33)_2$$

Die einzelnen Glieder dieser Ausdrücke giebt die folgende Tafel.

g, g'	$(32)_1$ sin	$(32)_2$ sin	$(33)_1$ cos	$(33)_2$ cos
1.				
0,0			+228″,45	−1″,24
1,0	+5″,31	+2″,55	−29,93	−1,84
2,0	+0,75	+0,18	−1,04	−0,16
3,0	+0,03		−0,13	
−2,−1	−0,02	−0,01	−0,03	
−1,−1	−0,23	−0,10	−0,77	+0,04
0,−1	−0,72	−0,01	+11,26	−0,22
1,−1	+0,25	+0,15	−0,97	−0,21
2,−1	+0,02	+0,01	−0,03	
0,−2	−0,01		+0,29	
2.				
0,−1	+0,01	−0,01	−0,01	+0,02
1,−1	−0,29	+0,05	+0,25	−0,13
2,−1	+3,08	−0,07	−2,76	+0,02
3,−1	+0,27	−0,05	−0,25	+0,05
0,−2	−2,12	+0,09	+1,73	+0,16
1,−2	+37,92	−0,58	−37,28	−3,84
2,−2	−228,30	+2,95	+227,11	−6,03
3,−2	−12,51	+0,03	+12,32	0,00
4,−2	−0,71	−0,03	+0,70	+0,03
0,−3	−0,10	+0,01	+0,09	+0,01
1,−3	+2,29	−0,08	−2,20	−0,20
2,−3	−14,41	+0,16	+14,03	−0,13
3,−3	−0,97	+0,06	+0,93	−0,04
2,−4	−0,60		+0,60	−0,01
11.				
3,−3	+0,09	−0,05	−0,09	+0,05
4,−3	+0,06	−0,04	−0,06	+0,04
2,−4	+0,47	−0,32	−0,47	+0,29
3,−4	−4,90	+2,06	+4,88	−2,08
4,−4	−2,52	+1,80	+2,52	−1,79
5,−4	−0,30	+0,17	+0,30	−0,17
3,−5	−0,53	+0,20	+0,53	−0,20
4,−5	−0,37	+0,24	+0,37	−0,23

3.				
0,1	+0,04	+0,02	−0,04	−0,02
1,1	−1,09	−0,16	+1,09	+0,16
2,1	+5,35	−0,12	−5,38	+0,12
3,1	+0,21	+0,05	−0,21	−0,05
0,0	+1,53	+0,03	−1,54	−0,03
1,0	−38,04	−1,64	+38,06	+1,73
2,0	+230,79	−4,54	−231,27	+4,55
3,0	+12,55	−0,03	−12,56	+0,03
4,0	+0,71	+0,03	−0,71	−0,03
0,−1	+0,04		−0,04	
1,−1	−0,88	−0,02	+0,90	+0,03
2,−1	+6,19	−0,13	−6,19	+0,13
3,−1	+0,50	−0,05	−0,50	+0,05
4.				
0,1	+0,57		−0,59	
−1,3	−0,77	−0,01	+0,77	+0,01
0,3	+13,66	−0,28	−13,62	+0,28
1,3	−1,05	−0,10	+1,08	+0,10
−2,2	−0,34		+0,34	
−1,2	−12,19	+0,54	+12,33	−0,43
0,2	+229,10	−4,22	−228,58	+4,25
1,2	−17,65	−2,05	+17,62	+2,06
2,2	−0,49	−0,19	+0,48	+0,19
−1,1	+0,15	+0,05	−0,15	−0,05
0,1	−2,38	+0,05	+2,38	−0,04
1,1	−0,05	−0,10	+0,01	+0,10
5.				
1,2	−0,10		+0,11	
2,2	+0,46		−0,45	
3,2	+0,03		−0,03	
12.				
2,−2	−0,66	+0,31	+0,64	−0,30
3,−2	+5,03	−2,14	−5,02	+2,15
4,−2	+2,57	−1,82	−2,58	+1,84
13.				
0,−1	−0,16	−0,11	−0,17	−0,11
1,−1	−0,87	+2,17	−0,84	+2,17
2,−1	+3,66	+1,18	+3,80	+1,50
3,−1	+0,28	−0,01	+0,24	−0,01

208.

Nach diesen Vorbereitungen ergeben sich die folgenden Coefficienten der Gleichung

$$\Delta\Xi = n\Delta X + (27)\Delta^{h}_{k} + (28)\Delta\Upsilon + (29)\Delta\Psi + (30)n\Delta z + (31)\Delta v + (32)\Delta P + (33)\Delta Q - 3a\Delta'\Omega$$

Digitized by Google

g, g'	(27) cos	(28) cos	(29) sin	(30) sin	(31) cos
1.					
0,0	+1943″04	−152″28			−1678″07
1,0	+384,45	−840,61	−839″03	−270″25	+328,41
2,0	+44,19	−40,94	−40,91	−24,73	+43,23
3,0	+0,59	−2,71	−2,72	−1,81	+0,77
−3,−1		−0,07	+0,07	+0,04	+0,01
−2,−1	+0,31	−1,12	+1,12	+0,65	+0,31
−1,−1	+10,90	−18,12	+18,36	+8,16	+8,71
0,−1	+23,04	+12,11	−134,00	+0,70	−80,84
1,−1	+20,34	−23,64	−23,11	−12,39	+13,23
2,−1	+0,70	−2,14	−2,14	−1,31	+0,86
3,−1	+0,06	−0,18	−0,18	−0,12	+0,05
−2,−2		−0,03	+0,03	+0,01	
−1,−2	+0,31	−0,43	+0,43	+0,25	+0,26
0,−2	+0,83	+0,28	−1,97	+0,06	−1,91
1,−2	+0,66	−0,64	−0,62	−0,39	+0,35
2,−2	+0,03	−0,07	−0,07	−0,04	+0,02
−1,−3				+0,01	+0,01
0,−3	+0,05			0,00	−0,04
1,−3	+0,02			−0,01	+0,01
2.					
0,0		−1,90	+1,90		
1,0		−0,01	+0,01	−0,03	+0,02
2,0				−0,02	+0,02
−1,−1		+0,05	−0,05	−0,01	−0,01
0,−1	+1,04	−13,92	+14,03	+0,03	−0,08
1,−1	−3,06	−41,96	+41,97	−0,03	−4,75
2,−1	+52,18	+0,38	+1,45	−59,68	+60,34
3,−1	+3,26	−5,78	−5,74	−6,49	+5,14
4,−1	+0,22	−0,65	−0,64	−0,62	+0,38
−1,−2	−0,13	−1,67	+1,67	−0,24	+0,10
0,−2	+188,13	+2625,43	−2618,95	−3,63	−43,05
1,−2	+1173,80	+4587,62	−4543,19	−428,41	+874,42
2,−2	−4703,68	−116,12	−195,03	+5146,86	−5167,02
3,−2	−222,63	+446,03	+444,62	+425,45	−283,42
4,−2	−11,20	+36,64	+36,60	+31,01	−13,39
5,−2	−0,58	+2,47	+2,49	+2,21	−0,86
−1,−3	−0,02	−0,05	+0,05	−0,01	+0,01
0,−3	+5,14	+96,31	−96,10	−0,36	−2,37
1,−3	+71,97	+303,75	−301,15	−23,37	+50,59
2,−3	−304,70	−6,81	−12,39	+319,82	−320,07
3,−3	−15,66	+29,16	+29,05	+28,66	−20,09
4,−3	−0,82	+2,63	+2,63	+2,25	−1,20
5,−3	−0,05	+0,19	+0,19	+0,18	−0,08
0,−4	+0,12	+2,82	−2,82	−0,01	−0,09
1,−4	+3,11	+13,98	−13,86	−0,88	+2,03
2,−4	−13,50	−0,28	−0,54	+13,55	−13,55
3,−4	−0,71	+1,29	+1,29	+1,28	−0,94
4,−4	−0,05	+0,13	+0,13	+0,12	−0,06

Digitized by Google

2.					
1,—5	+0″,12	+0″,55	−0″,55	−0″,03	+0″,07
2,—5	−0,50	−0,01	−0,02	+0,49	−0,49
3,—5	−0,03			+0,05	−0,04
11.					
3,—2	+0,02			−0,06	+0,03
2,—3	−0,05	−0,18	+0,17	+0,10	−0,18
3,—3	+0,88	+0,05	0,00	−1,06	+1,49
4,—3	−0,33	−0,16	−0,16	−0,53	+0,96
5,—3	−0,03	−0,05	−0,04	−0,26	+0,14
1,—4	+1,24	+2,54	−2,52	+0,10	+0,05
2,—4	+0,41	+11,94	−11,93	−2,60	+6,90
3,—4	−53,94	−2,75	−0,20	+59,64	−84,35
4,—4	+13,60	+8 31	+8,30	+25,11	−42,46
5,—4	+0,85	+2,07	+2,06	+4,28	−4,61
6,—4	+0,03	+0,30	+0,30	+0,53	−0,40
2,—5	+0,13	+1,39	−1,39	−0,28	+0,73
3,—5	−6,25	−0,33	0,00	+6,53	−9,04
4,—5	+1,72	+0,94	+0,93	+3,22	−5,58
5,—5	+0,11	+0,28	+0,28	+0,60	−0,64
3,—6	−0,40			+0,42	−0,59
4,—6	+0,14			+0,27	−0,44
5,—6	−0,01			+0,05	−0,07
15.					
4,—6	−0,50			+0,69	−1,17
5,—6	+0,26			+0,63	−1,27
6,—6	−0,02			+0,23	−0,45
3.					
2,1	−0,37			+0,53	−0,53
0,0		−65,70	+65,21		
1,0	+3,06	+15,03	−14,81	−1,75	+3,50
2,0	−15,77	−0,55	−0,55	+21,10	−21,00
3,0	−0,67	+1,49	+1,49	+1,74	−1,16
2,—1	−0,41			+0,53	−0,53
4.					
0,3	−0,03			0	−1,25
−2,2		+0,49	−0,49		
−1,2	−3,57	−6,34	+6,10	+0,58	+1,17
0,2	−1,52	−10,30	−1,40	0	−21,33
1,2	+1,37	−1,07	−1,09	−0,58	+1,17
2,2		−0,15	−0,15		
6.					
0,0		−12,81	+13,32		
0,—1	−5,35	+79,25	−80,65	0	+1,32
1,—1	+2,78	−0,09	−0,49	+3,21	−9,63
2,—1	−0,01	−0,12	−0,14	−0,17	+0,26
0,—2		+0,23	−0,25		
1,—2	−0,09			+0,16	−0,49

Digitized by Google

7.					
1, −3		−2,92	+2,90		
2, −3	+3,14	+6,53	−6,30	−2,65	+3,98
3, −3	−8,32	−0,38	−0,61	+15,89	−15,89
4, −3	−0,59	+0,80	+0,79	+1,75	−1,31
2, −4		+0,60	−0,58		
3, −4	−0,78			+1,34	−1,34

g, g′	(32) sin	(33) cos	g, g′	(32) sin	(33) cos
1.			3.		
0,0		+224,21	2,1	+5,23	−5,26
1,0	+7,86	−31,77	3,1	+0,26	−0,26
2,0	+0,93	−1,20	0,0	+1,56	−1,57
3,0	+0,03	−0,13	1,0	−39,68	+39,79
−2, −1	−0,03	−0,03	2,0	+226,25	−226,72
−1, −1	−0,33	−0,73	3,0	+12,52	−12,53
0, −1	−0,73	+11,04	4,0	+0,74	−0,74
1, −1	+0,40	−1,18	0, −1	+0,04	−0,04
2, −1	+0,03	−0,03	1, −1	−0,90	+0,93
0, −2	−0,01	+0,29	2, −1	+6,06	−6,06
2.			3, −1	+0,45	−0,45
0, −1		+0,01	4.		
1, −1	−0,24	+0,12	0,1	+0,57	−0,59
2, −1	+3,01	−2,74	−1,3	−0,78	+0,78
3, −1	+0,22	−0,20	0,3	+13,38	−13,34
0, −2	−2,03	+1,89	1,3	−1,15	+1,18
1, −2	+37,34	−11,12	−2,2	−0,34	+0,34
2, −2	−225,35	+221,08	−1,2	−11,65	+11,90
3, −2	−12,48	+12,32	0,2	+224,88	−224,33
4, −2	−0,74	+0,73	1,2	−19,70	+19,68
0, −3	−0,09	+0,10	2,2	−0,68	+0,67
1, −3	+2,21	−2,40	−1,1	+0,20	−0,20
2, −3	−14,25	+13,60	0,1	−2,33	+2,34
3, −3	−0,91	+0,89	1,1	−0,15	+0,11
2, −4	−0,60	+0,59	5.		
11.			1,2	−0,10	+0,11
3, −3	+0,04	−0,04	2,2	+0,46	−0,45
4, −3	+0,02	−0,02	3,2	+0,03	−0,03
2, −4	+0,15	−0,18	12.		
3, −4	−2,84	+2,80	2, −2	−0,35	+0,34
4, −4	−0,72	+0,73	3, −2	+2,89	−2,87
5, −4	−0,13	+0,13	4, −2	+0,75	−0,74
3, −5	−0,33	+0,33	13.		
4, −5	−0,13	+0,14	0, −4	−0,27	−0,28
3.			1, −4	+4,30	+4,33
0,1	+0,06	−0,06	2, −4	+5,14	+5,30
1,1	−1,25	+1,25	3, −4	+0,27	+0,23

Digitized by Google

209.

Indem wir jetzt

$$H = 3\left(\frac{d^3a\Omega_0}{dPdgdg'}\right) - 3F\left(\frac{d^3a\Omega_0}{dKdgdg'}\right)$$
$$N = 3\left(\frac{d^3a\Omega_0}{dQdgdg'}\right)$$

setzen, ergeben sich für den Coefficienten (34) zuerst die folgenden Producte, deren Summe $3\left(\frac{d^3a\overline{\Omega}}{ndzdg'}\right)$ giebt. Um Platz zu gewinnen, ist in den Ueberschriften

$$3\left(\frac{d^3a\Omega_0}{dgdg'}\right) = (34)_0, \quad 3\left(\frac{d^3a\Omega_0}{dg^2dg'}\right)(n\delta z)^2 = (34)_2$$
$$3\left(\frac{d^3a\Omega_0}{dg^3dg'}\right)n\delta z = (34)_1, \quad 3\left(\frac{d^3a\Omega_0}{dg^4dg'}\right)(n\delta z)^3 = (34)_3$$

gesetzt worden.

$g.g'$	$(34)_0$ cos	$(34)_1$ cos	$(34)_2$ cos	$(34)_3$ cos	$H\delta P$ cos	$N\delta Q$ cos
1.						
0,0		−100″,216	−0″,036	+0″,062	+0″,093	+0″,095
1,0		−239,05	−0,04	+0,11	−0,04	−0,03
2,0		−27,22	−0,02	+0,04	−0,01	−0,01
3,0		−2,49				
4,0		−0,21				
−2,−1	+0″,07	−1,10	+0,18			
−1,−1	+2,41	−9,88	+0,80	+0,01		
0,−1	0	−14,77	+0,03	+0,01		
1,−1	−2,41	−19,56	−0,81	+0,01		
2,−1	−0,07	−2,46	−0,27			
3,−1	0,00	−0,22	−0,04			
−1,−2	+0,12	−0,35	+0,04			
0,−2	0	−0,73	0,00			
1,−2	−0,12	−0,89	−0,08			
2,−2	0,00	−0,11	−0,02			
2.						
1,0		−0,08	+0,02			
0,−1		+0,07	+0,24			
1,−1	+3,63	−4,44	+0,02	+0,02		
2,−1	−43,84	−33,85	−0,22	+0,03	−0,13	−0,01
3,−1	−3,61	−7,88	−0,11	+0,03		
4,−1	−0,26	−0,91	−0,02			
−1,−2	+0,25	−0,26	+0,46			
0,−2	0	−1,51	+2,90			
1,−2	−864,47	−2,21	+0,47		−0,02	−0,01
2,−2	+10435,47	−3,60	−5,97		−0,04	−0,03
3,−2	+859,70	−0,75	−3,56		+0,02	−0,01
4,−2	+62,91	−0,34	−0,74			
5,−2	+4,50	−0,04	−0,07			

2.						
0, −3		−0″,26	+0″,27	−0″,01		
1, −3	−76″,22	+2,12	+0,01	−0,02		
2, −3	+920,06	+33,22	−0,76	−0,03	+0″,11	+0″,01
3, −3	+75,80	+9,75	−0,52	−0,02		
4, −3	+5,54	+1,14	−0,10			
1, −4	−4,15	+0,22				
2, −4	+50,03	+3,31				
3, −4	+4,12	+1,02	−0,01			
2, −5						
11.						
2, −2						
3, −2						
2, −3		+0,30	−0,10			
3, −3		−2,27	−0,79			
4, −3		−1,91	−0,57			
1, −4		+0,01	+0,05			
2, −4		−11,49	+0,03	−0,03	+0,01	−0,01
3, −4		+221,10	−0,13	−0,09	+0,04	−0,04
4, −4		+136,15	−0,15	−0,08	−0,09	+0,09
5, −4		+19,44	−0,05	−0,03		
6, −4		+2,03				
2, −5		−1,56	+0,06			
3, −5		+29,18	+0,75	−0,01		
4, −5		+21,09	+0,60	−0,01		
5, −5		+3,04	+0,18			
3, −6		+2,25	+0,14			
4, −6		+1,89	+0,10			
5, −6		+0,27	+0,02			
15.						
4, −6			+2,37			
5, −6		+1,97	+2,78			
6, −6		+0,79	+1,12			

Für den Coefficienten (35) erhält man die folgenden Producte, in deren Ueberschriften dieselbe Bezeichnung wie oben angewandt worden ist. Nemlich

$$(35)_0 = 6\left(\frac{dn\Omega_2}{dg'^2}\right);\ \text{etc.}$$

$g.g'$	$(35)_0$ sin	$(35)_1$ sin	$(35)_2$ sin	$(35)_3$ sin	$H\delta P$ sin	$N\delta Q$ sin
1.						
1,0		−242″,044	−0″,016	+0″,076	−0″,036	−0″,028
2,0		−17,376	−0,018	+0,034	−0,012	−0,012
3,0		−1,150	+0,004	+0,004		

Digitized by Google

1.						
−2, −1	−0″066	+0″680	−0″474			
−1, −1	−4,812	+10,226	−0,842	−0″006		
0, −1	+88,061	−0,229	−0,852		+0″037	+0″039
1, −1	−4,812	−19,630	−0,844	+0,006	−0,004	
2, −1	−0,066	−1,598	−0,220			
3, −1	−0,002	−0,104	−0,024			
−1, −2	−0,242	+0,374	−0,048			
0, −2	+4,435	−0,013	−0,069	+0,001	+0,002	+0,002
1, −2	−0,242	−0,898	−0,076			
2, −2	−0,002	−0,078	−0,048			
0, −3	+0,164	+0,004				
1, −3	−0,010	−0,030	−0,004			
2.						
1,0		−0,058	+0,004			
2,0		−0,228	+0,044			
0, −1	−0,333	+0,481	−0,200	−0,010		
1, −1	+7,262	−2,816	−0,298	+0,002	+0,018	
2, −1	−43,840	−33,382	−0,276	+0,022	−0,124	−0,014
3, −1	−2,408	−6,454	−0,100	+0,014	−0,006	
4, −1	−0,132	−0,560	−0,014			
−1, −2	−0,508	+0,170	−0,282			
0, −2	+79,230	+1,950	−2,692	−0,001	+0,064	+0,060
1, −2	−1728,946	+1,478	−4,488		−0,062	−0,014
2, −2	+10435,466	−2,686	−6,912		+0,072	+0,054
3, −2	+573,134	−0,596	−3,176		+0,024	−0,006
4, −2	+31,454	−0,286	−0,444			
5, −2	+1,800	−0,028	−0,034			
0, −3	+6,984	−0,036	−0,236	+0,008	+0,006	+0,006
1, −3	−152,434	+1,190	−0,532	−0,002	−0,018	
2, −3	+920,064	+32,950	−0,904	−0,018	+0,132	+0,022
3, −3	+50,532	+8,344	−0,466	−0,014	+0,006	
4, −3	+2,772	+0,708	−0,066			
0, −4	+0,380	−0,020	−0,014			
1, −4	−8,290	+0,108	−0,038			
2, −4	+50,028	+3,278	−0,004		+0,010	
3, −4	+2,748	+0,878	−0,012			
2, −5	+2,176	+0,192	+0,004			
11.						
2, −2		+0,010				
3, −2		−0,120				
2, −3		+0,394	−0,090			
3, −3		−2,240	−0,778			
4, −3		−1,810	−0,526			
5, −3		−0,228	−0,114			
1, −4		+0,092	−0,036			
2, −4		−20,778	−0,084	−0,026	+0,006	−0,006
3, −4		+216,694	−0,194	−0,084	+0,050	−0,050
4, −4		+126,728	−0,436	−0,072	−0,090	+0,090
5, −4		+13,314	−0,040	−0,024	−0,008	+0,008
6, −4		+1,108				

14.					
2, −5	−2,798	+0,042			
3, −5	+28,474	+0,730	−0,042		
4, −5	+19,830	+0,552	−0,042	−0,014	+0,014
5, −5	+2,144	+0,136			
3, −6	+2,184	+0,110			
4, −6	+1,794	+0,090			
5, −6	+0,192	+0,046			
15.					
4, −6	+1,374	+2,318			
5, −6	+1,888	+2,646			
6, −6	+0,697	+0,948			

Für den Coefficienten (36) ergeben sich die folgenden Producte, wo

$$R = 3\left\{\left(\frac{d^2a\Omega_2}{dPdg}\right) - F\left(\frac{d^2a\Omega_2}{dKdg}\right)\right\}$$

ist, und demgemäss die übrigen Bezeichnungen zu verstehen sind.

g, g'	R cos	R_1 cos	R_2 cos	$S\delta P$ cos	$V\delta Q$ cos
1,					
0,0		+4,078	+0,001	−6,807	−6,251
1,0		+10,351	+0,002	+0,927	+0,695
2,0		+0,772	+0,002	+0,069	−0,001
3,0		+0,050		+0,004	
−2, −1		+0,04			
−1, −1		+0,41	−0,03	+0,04	+0,02
0, −1		+0,62		−0,72	−0,64
1, −1		+0,86	+0,04	+0,06	+0,04
2, −1		+0,06		+0,01	
−1, −2		+0,02		−0,01	
0, −2		+0,04		−0,02	
1, −2		+0,04		−0,01	
2,					
0, −1	+0,01	−0,01	−0,01		
1, −1	−0,33	+0,14		−0,08	+0,01
2, −1	+1,97	+1,51	+0,01	+0,53	−0,09
3, −1	+0,11	+0,29		+0,03	
−1, −2	+0,02		−0,01	+0,02	+0,02
0, −2	−3,56	+0,07	−0,12	−0,37	−0,34
1, −2	+77,80	+0,09	−0,01	+0,34	+0,21
2, −2	−469,48	+0,15	+0,26	−0,41	−0,47
3, −2	−25,78	+0,02	+0,14	−0,12	+0,01
4, −2	−1,42	+0,01	+0,01	−0,01	

Digitized by Google

2.					
0, −3	−0″,30	+0″,02	−0″,01	−0″,03	−0″,03
1, −3	+6,87	−0,04		+0,11	
2, −3	−11,40	−1,48	+0,03	−0,59	+0,03
3, −3	−2,28	−0,37	+0,02	−0,05	
1, −4	+0,36			+0,01	
2, −4	−2,24	−0,15		−0,06	
3, −4	−0,12	−0,03			
11.					
2, −4		+0,93		−0,03	
3, −4		−9,78		−0,28	
4, −4		−5,71		+0,19	
5, −4		−0,60		+0,05	
2, −5		+0,12			
3, −5		−1,28	−0,03	−0,03	
4, −5		−0,89	−0,02	+0,07	
3.					
0,1	−0,04	−0,02		+0,02	−0,01
1,1	+0,98	−0,01		+0,06	−0,02
2,1	−5,91	+0,02		−0,25	+0,03
3,1	−0,33	+0,01		−0,01	
0,0		−0,28		+0,01	−0,05
1,0		−0,14		+1,21	−0,22
2,0		+0,24		−6,70	+0,58
3,0		+0,14		−0,26	−0,01
0, −1	+0,01	−0,01		−0,01	
1, −1	−0,98	−0,01		+0,08	−0,01
2, −1	+5,91	+0,01		−0,16	+0,01
3, −1	+0,33	+0,01		−0,02	
4.					
0,1	−2,28			−0,06	
−1,3	+2,28	+0,01			
0,3	−11,97	+0,05		−0,12	−0,08
1,3	+2,28	+0,10		+0,03	
−2,2	+0,36			+0,33	
−1,2	+26,02			−0,33	+0,02
0,2	−476,14			+0,55	−0,91
1,2	+26,02			+0,08	+0,02
2,2	+0,36			−0,01	
−1,1	−0,11	−0,01		−0,03	
0,1	+2,00	−0,05		+0,18	−0,02
1,1	−0,11	−0,12		−0,02	
5.					
0,2				+0,34	−0,34
1,2	+0,18			−0,22	+0,21
2,2	−0,94			+0,19	−0,18
3,2	−0,06			−0,01	+0,01

Digitized by Google

12.					
2, −2				−0″36	
3, −2				+0,22	
4, −2				−0,46	
13.					
0, −4		−0″28		+0,01	−0″05
1, −4		−0,14		−4,34	−0,22
2, −4		+0,28		+6,67	+0,48
3, −4		+0,14		+0,39	−0,01
19.					
−1, 4				−0,28	+0,28
0, 4				+6,26	−6,22
1, 4				−0,41	+0,41

Für (37) ergeben sich die folgenden Producte, in welchen

$$Y = 3\left(\frac{d^4 a\Omega_0}{dQdg'}\right)$$

ist.

g, g'	Y sin	Y_1 sin	Y_2 sin	$V\delta P$ sin	$Z\delta Q$ sin
1.					
1,0		+10″893		−0″131	−0″210
2,0		+0,784	+0″002	+0,007	−0,060
3,0		+0,050			−0,004
−2, −1	+0″01	−0,04			
−1, −1	+0,65	−0,47	+0,03		+0,01
0, −1	−11,96	+0,02	+0,04	+0,22	+0,20
1, −1	+0,65	+0,90	+0,04	−0,02	−0,03
2, −1	+0,01	+0,06			−0,01
−1, −2	+0,04	−0,02			
0, −2	−0,60			−0,02	−0,02
1, −2	+0,04	+0,05			
2.					
0, −1	+0,01	−0,03	+0,01		
1, −1	−0,33	+0,12	+0,02	+0,01	+0,01
2, −1	+1,97	+1,51	+0,01	−0,07	−0,09
3, −1	+0,11	+0,29			
−1, −2	+0,02		+0,01	−0,02	−0,02
0, −2	−3,56	−0,09	+0,12	+0,31	+0,33
1, −2	+77,80	−0,07	+0,21	−0,21	−0,09
2, −2	−469,48	+0,13	+0,32	+0,48	−0,40
3, −2	−25,78	+0,03	+0,11	−0,01	−0,09
4, −2	−1,42	+0,01	+0,01		

Digitized by Google

2.					
0, −3	−0″,30	+0″,04	+0″,04	+0″,03	+0″,03
1, −3	+6,87	−0,05	+0,02	−0,02	−0,01
2, −3	−41,40	−1,48	+0,03	+0,13	+0,05
3, −3	−2,28	−0,37	+0,02		
1, −4	+0,36				
2, −4	−2,24	−0,15			
3, −4	−0,12	−0,03			
11.					
1, −4		−0,04			+0,01
2, −4		+0,93			−0,03
3, −4		−9,75			−0,27
4, −4		−5,71			+0,50
5, −4		−0,60			+0,05
2, −5		+0,12			−0,01
3, −5		−1,28	−0,03		−0,05
4, −5		−0,89	−0,02		+0,08
3.					
0,1	−0,04	−0,02		+0,01	
1,1	+0,98	−0,01		+0,02	+0,02
2,1	−5,91	+0,02		−0,03	−0,17
3,1	−0,33	+0,01			−0,01
0,0		−0,28		+0,05	−0,09
1,0		−0,13		+0,23	+0,75
2,0		+0,24		−0,55	−5,63
3,0		+0,13		+0,01	−0,27
0, −1	+0,04	−0,01			−0,01
1, −1	−0,98	−0,01		+0,01	+0,06
2, −1	+5,91	+0,01		−0,03	−0,39
3, −1	+0,33	+0,01			−0,01
4.					
0,1	−2,28			−0,07	
−1,3	+2,28	+0,04		+0,01	−0,01
0,3	−41,82	+0,05		−0,61	+0,13
1,3	+2,28	+0,10		+0,04	+0,01
−2,2	+0,36			+0,01	+0,31
−1,2	+25,92			−0,14	−0,16
0,2	−474,22			+0,06	−0,38
1,2	+25,92			+0,14	−0,04
2,2	+0,36			−0,01	
−1,1	−0,11	−0,04		−0,03	
0,1	+1,99	−0,05		+0,61	−0,17
1,1	−0,11	−0,10		−0,02	
5.					
0,2				+0,31	−0,31
1,2	+0,18			−0,21	+0,21
2,2	−0,94			+0,48	−0,48
3,2	−0,06			−0,01	+0,01

Digitized by Google

12.					
2, −2					−0″36
3, −2					+0,22
4, −2					−0,46
13.					
0, −4		+0″28		+0″05	−0,01
1, −4		+0,13		+0,23	+1,30
2, −4		−0,28		−0,47	−6,62
3, −4		−0,13		+0,01	−0,38
19.					
−1, 4				−0,28	+0,27
0, 4				+6,20	−6,16
1, 4				−0,41	+0,50

210.

Wir kommen jetzt zu den Producten der Summe des Inhalts der Tafeln des vor. Art. mit $2\nu + \nu^2$ und bez. ν. Setzen wir um Raum zu gewinnen

$$(34)' = 3\left(\frac{d^2a\overline{\Omega}}{ndzdg'}\right)$$

so ist $(34)'$ der Summe der Functionen $(34)_0$, $(34)_1$, etc. gleich, und setzen wir

$$(35)' = 6\left(\frac{da\overline{\Omega}}{dg'}\right)$$

so ist $(35)'$ der Summe der Functionen $(35)_0$, $(35)_1$, etc. gleich. Führt man ferner die eben genannten Multiplicationen aus, so ergiebt sich der Inhalt der folgenden Tafel.

g, g'	$(34)'$ cos	$(34)'\ (2\nu+\nu^2)$ cos	$(35)'$ sin	$(35)'\ \nu$ sin
1.				
0, 0	−100″002	−66″918		
1, 0	−239,05	−104,72	−242″048	−57″42
2, 0	−27,22	−11,33	−17,384	−4,15
3, 0	−2,49	−0,91	−1,142	−0,25
−2, −1	−0,85	−0,42	+0,440	+0,15
−1, −1	−6,66	−3,81	+4,566	+2,25
0, −1	−14,73	−9,80	+87,056	−0,94
1, −1	−22,77	−8,81	−25,284	−4,73
2, −1	−2,80	−0,92	−1,884	−0,28
3, −1	−0,26	−0,09	−0,130	

1.				
−1, −2	−0,19	−0,13	+0,084	+0,11
0, −2	−0,73	−0,49	+4,358	−0,03
1, −2	−1,09	−0,43	−1,216	−0,21
2, −2	−0,13	−0,06	−0,098	
0, −3			+0,168	
1, −3			+0,044	
2.				
1,0	−0,06	−0,02	−0,054	+0,01
2,0			−0,184	+0,03
0, −1	+0,28	+0,35	−0,062	+0,09
1, −1	−0,74	−2,48	+4,168	−1,08
2, −1	−78,03	+1,93	−77,644	+1,17
3, −1	−11,57	+2,42	−8,954	+1,05
4, −1	−1,19	+0,22	−0,706	+0,08
−1, −2	+0,45	+0,31	−0,620	−0,10
0, −2	+1,39	+2,23	+78,611	−1,66
1, −2	−866,54	+17,75	−1732,032	+12,33
2, −2	+10425,86	−133,19	+10425,994	−68,07
3, −2	+855,40	−5,15	+569,380	−0,99
4, −2	+61,86	+0,07	+30,754	+0,12
5, −2	+4,39	+0,05	+1,738	+0,01
0, −3	0,00	+0,03	+6,732	−0,23
1, −3	−74,11	+3,38	−151,796	+1,49
2, −3	+952,63	−10,49	+952,246	−5,64
3, −3	+85,01	−2,94	+58,402	−1,37
4, −3	+6,58	−0,27	+3,414	−0,10
0, −4			+0,346	
1, −4	−3,93	+0,27	−8,220	+0,10
2, −4	+53,34	−0,49	+53,342	−0,29
3, −4	+5,13	−0,29	+3,614	−0,15
2, −5			+2,372	−0,02
11.				
2, −2			+0,040	
3, −2			−0,120	
2, −3	+0,20	−0,03	+0,304	−0,08
3, −3	−3,06	+1,45	−2,988	+0,66
4, −3	−2,48	+1,63	−2,336	+0,84
5, −3			−0,342	+0,10
1, −4	+0,06	+0,15	+0,056	−0,21
2, −4	−11,49	+6,29	−20,888	+7,27
3, −4	+220,88	−100,60	+216,446	−47,40
4, −4	+135,92	−85,74	+126,520	−41,49
5, −4	+19,36	−10,50	+13,250	−4,03
6, −4	+2,03	−0,95	+1,108	−0,32
2, −5	−1,50	+0,79	−2,756	+0,96
3, −5	+29,92	−13,31	+29,192	−6,48
4, −5	+21,68	−13,76	+20,370	−6,68
5, −5	+3,22	−1,80	+2,280	−0,71

Digitized by Google

11.				
3, −6	+2″,36	−1″,00	+2″,294	−0″,50
4, −6	+1,99	−1,21	+1,884	−0,62
5, −6	+0,29	−0,14	+0,208	−0,07
15.				
4, −6	+2,37	−2,43	+3,692	−1,34
5, −6	+4,75	−3,51	+4,504	−1,93
6, −6	+1,91	−1,42	+1,646	−0,75

Seien ferner

$$(36)' = 3\left\{\left(\frac{d^2a\bar{\Omega}}{dPdg'}\right) - F\left(\frac{d^2a\bar{\Omega}}{dKdg'}\right)\right\}$$

$$(37)' = 3\left(\frac{d^2a\bar{\Omega}}{dQdg'}\right)$$

dann ist $(36)'$ gleich der Summe der Functionen R, R_1, etc., und $(37)'$ gleich der Summe der Functionen Y, Y_1, etc. des vor. Art. Somit ergab sich die folgende Tafel.

g, g'	$(36)'$ cos	$(36)'(2\nu+\nu')$ cos	$(37)'$ sin	$(37)'(2\nu+\nu')$ sin
1.				
0, 0	−8″,979	+2″,792		
1, 0	+11,975	+4,337	+10″,552	+5″,233
2, 0	+0,842	+0,133	+0,733	+0,381
3, 0	+0,054	+0,022	+0,046	+0,024
−2, −1	+0,04	+0,02	−0,03	−0,02
−1, −1	+0,44	+0,13	+0,22	−0,22
0, −1	−0,74	+0,10	−11,48	+0,16
1, −1	+1,00	+0,38	+1,54	+0,43
2, −1	+0,07	+0,04	+0,06	+0,04
−1, −2	+0,01	+0,01	+0,02	−0,01
0, −2	+0,02	+0,03	−0,64	+0,01
1, −2	+0,03	+0,02	+0,09	+0,02
2.				
0, −1	−0,01	−0,03	−0,01	
1, −1	−0,26	+0,12	−0,17	+0,02
2, −1	+3,93	−0,09	+3,33	−0,16
3, −1	+0,43	−0,09	+0,40	−0,09
0, −2	−1,32	−0,05	−2,86	+0,16
1, −2	+78,43	−1,06	+77,64	−1,09
2, −2	−469,95	+6,20	−468,95	+6,07
3, −2	−25,73	+0,05	−25,72	+0,05
4, −2	−1,41	−0,02	−1,40	−0,02

2.				
0, −3	−0″,35	+0″,01	−0″,22	+0″,04
1, −3	+6,94	−0,17	+6,81	−0,07
2, −3	−43,44	+0,50	−42,67	+0,55
3, −3	−2,68	+0,11	−2,63	+0,12
1, −4	+0,37	−0,01	+0,36	−0,01
2, −4	−2,45	+0,02	−2,39	+0,02
3, −4	−0,15	+0,01	−0,15	+0,01
11.				
2, −4	+0,90	−0,64	+0,90	−0,64
3, −4	−10,06	+4,26	−10,02	+4,25
4, −4	−5,22	+3,73	−5,21	+3,72
5, −4	−0,55	+0,36	−0,55	+0,36
2, −5	+0,12	−0,09	+0,11	−0,09
3, −5	−1,34	+0,56	−1,36	+0,56
4, −5	−0,84	+0,61	−0,83	+0,60
3.				
0,1	−0,05	−0,01	−0,05	−0,01
1,1	+1,01	+0,36	+1,01	+0,38
2,1	−6,11	+0,33	−6,09	+0,33
3,1	−0,33	−0,01	−0,33	−0,01
0,0	−0,32	−0,14	−0,32	−0,14
1,0	+0,83	+1,56	+0,85	+1,55
2,0	−5,88	+3,30	−5,94	+3,25
3,0	−0,13	−0,03	−0,13	−0,03
0, −1	+0,02		+0,02	
1, −1	−0,92	+0,18	−0,92	+0,18
2, −1	+5,50	+0,14	+5,50	+0,15
3, −1	+0,32		+0,33	+0,01
4.				
0,1	−2,34	+0,02	−2,35	+0,02
−1,3	+2,32	+0,06	+2,32	+0,05
0,3	−42,42	+0,51	−42,25	+0,50
1,3	+2,41	−0,08	+2,43	−0,08
−2,2	+0,69	−0,01	+0,68	−0,01
−1,2	+25,71	−0,65	+25,62	−0,73
0,2	−476,50	+6,14	−474,54	+6,10
1,2	+26,21	−0,48	+26,02	−0,48
2,2	+0,35	−0,01	+0,35	−0,01
−1,1	−0,18	−0,08	−0,18	−0,08
0,1	+2,41	−0,13	+2,38	−0,13
1,1	−0,25	+0,06	−0,23	+0,06
12.				
2, −2	−0,36		−0,36	
3, −2	+0,22	+0,07	+0,22	+0,07
4, −2	−0,16	+0,04	−0,16	+0,04

Digitized by Google

13.				
0, −1	−0,32	−0,14	+0,32	+0,14
1, −1	−1,70	+1,57	+1,66	−1,56
2, −1	+7,43	+3,10	−7,37	−3,10
3, −1	+0,52	−0,03	−0,50	+0,03

211.

Es können jetzt die Werthe der Coefficienten der Gleichung (75), nemlich der Gleichung

$$\frac{dAX}{ndt} = (34)\,n\Delta z + (35)\,\Delta v + (36)\,\Delta P + (37)\,\Delta Q + 3\Delta\left(\frac{d\alpha\Omega}{dg'}\right)$$

zusammen gestellt werden, und ergeben sich wie folgt.

g, g'	(34) cos	(35) sin	(36) cos	(37) sin
1.				
0,0	−166,920		−6,187	
1,0	−343,77	−299,17	+16,312	+15,785
2,0	−38,55	−21,53	+0,957	+1,114
3,0	−3,40	−1,39	+0,076	+0,070
−2,−1	−1,27	+0,59	+0,06	−0,05
−1,−1	−10,47	+6,82	+0,57	0,00
0,−1	−24,53	+86,12	−0,34	−11,32
1,−1	−31,58	−30,01	+1,38	+1,97
2,−1	−3,72	−2,16	+0,11	+0,10
3,−1	−0,35	−0,13		
−1,−2	−0,32	+0,19	+0,02	+0,01
0,−2	−1,22	+1,33	+0,05	−0,03
1,−2	−1,52	−1,13	+0,05	+0,11
2,−2	−0,19	−0,10		
0,−3		+0,17		
1,−3		−0,01		
2.				
1,0	−0,08	−0,01		
2,0		−0,15		
0,−1	+0,63	+0,03	−0,01	−0,01
1,−1	−3,22	+3,09	−0,11	−0,15
2,−1	−76,10	−76,11	+3,81	+3,17
3,−1	−9,15	−7,90	+0,31	+0,31
4,−1	−0,97	−0,63		
−1,−2	+0,76	−0,72		
0,−2	+3,62	+76,95	−1,37	−2,70
1,−2	−818,79	−1719,70	+77,37	+76,55
2,−2	+10292,67	+10357,92	−163,75	−162,88
3,−2	+850,25	+568,39	−25,68	−25,67
4,−2	+61,93	+30,87	−1,13	−1,12
5,−2	+1,11	+1,75		

Digitized by Google

2.				
0, −3	+0″,03	+6″,50	−0″,34	−0″,24
1, −3	−70,73	−150,31	+6,77	+6,74
2, −3	+942,14	+946,61	−42,91	−42,42
3, −3	+82,07	+57,03	−2,57	−2,54
4, −3	+6,31	+3,31		
1, −4	−3,66	−8,12	+0,36	+0,35
2, −4	+52,85	+53,02	−2,43	−2,37
3, −4	+4,84	+3,46	−0,14	−0,14
2, −5		+2,35		
11.				
2, −2		+0,01		
3, −2		−0,12		
2, −3	+0,17	+0,22		
3, −3	−1,61	−2,33		
4, −3	−0,85	−1,53		
5, −3		−0,23		
1, −4	+0,21	−0,15		
2, −4	−5,20	−13,62	+0,26	+0,26
3, −4	+120,28	+169,02	−5,80	−5,77
4, −4	+50,18	+85,03	−1,49	−1,49
5, −4	+8,86	+9,22	−0,19	−0,19
6, −4	+1,08	+0,79		
2, −5	−0,71	−1,80	+0,03	+0,02
3, −5	+16,61	+23,01	−0,78	−0,80
4, −5	+7,92	+13,69	−0,23	−0,23
5, −5	+1,12	+1,57		
3, −6	+1,36	+1,79		
4, −6	+0,75	+1,26		
5, −6	+0,15	+0,14		
15.				
4, −6	−0,06	+2,35		
5, −6	+1,24	+2,57		
6, −6	+0,19	+0,90		
3.				
0,1			−0,06	−0,06
1,1			+1,37	+1,39
2,1	−0,53	−0,53	−5,78	−5,76
3,1			−0,34	−0,34
0,0			−0,46	−0,46
1,0			+5,39	+5,40
2,0			−2,58	−2,69
3,0			−0,16	−0,16
0, −1			+0,02	+0,02
1, −1			−0,74	−0,74
2, −1	+0,53	+0,53	+5,64	+5,65
3, −1			+0,32	+0,34

4.				
0,4			−2″32	−2″33
−1,3			+2,38	+2,37
0,3		−3″76	−11,91	−11,75
1,3			+2,33	+2,35
−2,2			+0,68	+0,67
−1,2	−1″17	+2,33	+25,06	+24,89
0,2		−11,67	−170,36	−168,11
1,2	+1,17	+2,33	+23,64	+23,51
2,2			+0,31	+0,31
−1,1			−0,26	−0,26
0,1			+2,28	+2,25
1,1			−0,19	−0,17
12.				
2,−2			−0,36	−0,36
3,−2			+0,29	+0,29
4,−2			−0,12	−0,12
13.				
0,−1			−0,16	+0,16
1,−1			+2,87	−2,90
2,−1			+10,53	−10,17
3,−1			+0,19	−0,17
6.				
0,−1	0	−1,32		
1,−1	+3,21	+9,63		
2,−1	−0,17	−0,26		
1,−2	+0,33	+1,00		
7.				
2,−3	−7,95	−11,93		
3,−3	+47,66	+47,66		
4,−3	+5,26	+3,94		
3,−1	+5,34	+5,34		

212.

Da auf die Breitenstörungen das Quadrat und die höheren Potenzen der störenden Kraft weit weniger Einfluss äussern, wie auf die Längenstörungen, so können wir uns begnügen, in einigen Coefficienten der Gleichungen für $d\Delta P$ und $d\Delta Q$ des Art. 193 die Zahlenwerthe blos in Zehntelsecunden anzusetzen. Die vorbereitenden Producte für diese Coefficienten sind die folgenden, in deren Ueberschriften, um Platz zu gewinnen, die folgenden Abkürzungen angewandt worden sind.

$$(38)_0 = \left(\frac{dB_2}{dg}\right)$$

Digitized by Google

$$(38)_1 = \left(\frac{d^2B_0}{dg^2}\right) n\delta z$$
$$(38)_2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2B_0}{dg^2}\right) (n\delta z)^2$$
$$\left.\begin{aligned}(38)_3 &= \left(\frac{dR}{dg}\right)\delta P\\ (38)_4 &= \left(\frac{dY}{dg}\right)\delta Q\end{aligned}\right\} \text{für } B$$
$$(46)_0 = \left(\frac{dC_0}{dg}\right)$$
$$(46)_1 = \left(\frac{d^2C_0}{dg^2}\right) n\delta z$$
$$(46)_2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2C_0}{dg^2}\right) (n\delta z)^2$$
$$\left.\begin{aligned}(46)_3 &= \left(\frac{dR}{dg}\right)\delta P\\ (46)_4 &= \left(\frac{dY}{dg}\right)\delta Q\end{aligned}\right\} \text{für } C$$

g, g'	$(38)_0$ sin	$(38)_1$ sin	$(38)_2$ sin	$(38)_3$ sin	$(38)_4$ sin
1.					
1,0	+8″64	+3″62		−0″12	−0″09
2,0	+0,24	+0,44		+0,14	+0,08
−1,−1	−0,22	−0,12	+0″01		
0,−1	0	−0,03	+0,02		
1,−1	+0,22	+0,20	+0,01		
2.					
1,−1	−0,11	+0,06		−0,02	
2,−1	+1,31	+0,51		+0,23	+0,01
3,−1	+0,11	+0,12		+0,02	
0,−2	0	+0,07	+0,05		
1,−2	+12,96	+0,02	+0,08	−0,15	−0,17
2,−2	−156,11	+0,11	+0,11	+2,04	+1,73
3,−2	−12,89	+0,05	+0,06	+0,15	+0,15
4,−2	−0,94		+0,01		
1,−3	+0,76	−0,04		+0,01	−0,01
2,−3	−9,19	−0,51		−0,08	+0,11
3,−3	−0,76	−0,14		−0,01	+0,01
2,−4	−0,38	−0,04		−0,01	
11.					
2,−4		+0,17		−0,01	+0,01
3,−4		−3,32		−0,08	−0,07
4,−4		−2,05		+0,16	+0,15
5,−4		−0,29		+0,01	+0,01
3,−5		−0,35	−0,01		
4,−5		−0,26	−0,01	+0,02	+0,02

Digitized by Google

3.					
1,1	−0″33	−0″10		−0″04	+0″01
2,1	+3,94	−0,51		+0,12	−0,07
3,1	+0,32	−0,12		+0,01	−0,01
0,0	0	−0,05			
1,0	−12,95	−0,02	−0″04	+0,19	+0,14
2,0	+156,27	−0,05	−0,10	−2,06	−1,74
3,0	+12,87	−0,02	−0,06	−0,19	−0,11
4,0	+0,94				
1,−1	−0,33	+0,08		+0,02	
2,−1	+3,94	+0,51		−0,28	−0,07
3,−1	+0,32	+0,14		−0,02	
4.					
−1,3	+0,25	+0,01			
0,3	0	−0,17	+0,01	−0,02	
1,3	−0,25	−0,23	+0,01		
−2,2	+0,12			−0,11	+0,11
−1,2	+1,32	−0,12		+0,06	−0,14
0,2	0	−1,77		−0,34	−0,02
1,2	−1,32	−3,59		+0,06	+0,15
2,2	−0,12	−0,11		+0,03	+0,02
5.					
2,2	+0,32			−2,03	+2,02
12.					
2,−2		+0,11		−0,12	−0,09
3,−2		+3,46		−0,03	+0,13
4,−2		+2,05			−0,32
5,−2		+0,29		−0,01	−0,03
3,−3		+0,23	+0,01		
4,−3		+0,19	+0,01		−0,02
13.					
1,−4		+0,01	−0,04	−0,19	+0,19
2,−4		−0,04	−0,01	+2,06	−2,03
3,−4		−0,02		+0,19	−0,19

deren Summe $\left(\frac{d\bar{B}}{ndz}\right)$ giebt. Ferner

g, g'	$(46)_0$ cos	$(46)_1$ cos	$(46)_2$ cos	$(46)_3$ cos	$(46)_4$ cos
1.					
0,0		−1″51		+0″01	−0″35
1,0		−3,6			+0,1
2,0		−0,1		−0,1	−0,1

1.					
−1, −1		−0,1			
0, −1		−0,2			
1, −1		−0,2			
2.					
1, −1	+0,1	−0,1			
2, −1	−1,3	−0,5		−0,2	
3, −1	−0,1	−0,1			
0, −2	0		+0,1		
1, −2	−13,0			+0,1	+0,2
2, −2	+156,4		−0,1	−2,0	−1,7
3, −2	+12,9		−0,1	−0,1	−0,2
4, −2	+0,9				
1, −3	−0,8				
2, −3	+9,2	+0,5		+0,1	−0,1
3, −3	+0,8	+0,1			
2, −4	+0,1				
11.					
2, −4		−0,2			
3, −4		+3,3		+0,1	+0,1
4, −4		+2,1		−0,2	−0,2
5, −4		+0,3			
3, −5		+0,1			
4, −5		+0,3			
3.					
1,1	+0,3	+0,1			
2,1	−3,9	+0,5		−0,1	+0,1
3,1	−0,3	+0,1			
0,0	0	+0,1			
1,0	+13,0			−0,2	−0,1
2,0	−156,3	+0,1	+0,1	+2,1	+1,7
3,0	−12,9		+0,1	+0,2	+0,1
4,0	−0,9				
1, −1	+0,3	−0,1			
2, −1	−3,9	−0,5		+0,3	+0,1
3, −1	−0,3	−0,1			
4.					
−1,3	−0,3				
0,3	0	+0,2			
1,3	+0,3	+0,2			
−2,2	−0,1			−0,1	+0,1
−1,2	−1,3	+0,1		+0,2	−0,1
0,2	0	+1,8			+0,3
1,2	+1,3	+3,6		−0,2	
2,2	+0,1	+0,4			
5.					
2,2	−0,3			+2,0	−2,0

Digitized by Google

12.			
2, −2	−0″,1	+0″,1	+0″,1
3, −2	−3,5		−0,1
4, −2	−2,1		+0,3
5, −2	−0,3		
3, −3	−0,2		
4, −3	−0,2		
13.			
1, −4		+0,2	−0,2
2, −4		−2,1	+2,0
3, −4		−0,2	+0,2

deren Summe $\left(\frac{d\bar{C}}{ndz}\right)$ giebt. Ferner*)

g, g'	$\left(\frac{d\bar{B}}{ndz}\right)$ sin	$((B))$ sin	$\left(\frac{d\bar{C}}{ndz}\right)$ cos	$((C))$ cos
1.				
0, 0			−1″,85	−1″,33
1, 0	+12″,05	+1″,54	−3,5	−1,5
2, 0	+0,87	+0,13	−0,6	−0,1
−1, −1	−0,33	−0,06	−0,1	
0, −1	−0,01	−0,02	−0,2	−0,1
1, −1	+0,43	+0,10	−0,2	−0,1
2.				
1, −1	−0,07	+0,04	0,0	
2, −1	+2,06	−0,04	−2,0	
3, −1	+0,25	−0,03	−0,2	
0, −2	+0,12	+0,13	+0,1	
1, −2	+12,74	−0,06	−12,7	+0,2
2, −2	−152,12	+1,18	+152,6	−1,2
3, −2	−12,48	−0,11	+12,5	
4, −2	−0,93	−0,04	+0,9	
1, −3	+0,72	−0,02	+0,8	
2, −3	−9,67	+0,06	+9,7	−0,1
3, −3	−0,90	+0,04	+0,9	
2, −4	−0,13		+0,1	
11.				
2, −4	−0,17	−0,12	−0,2	+0,1
3, −4	−3,47	+1,31	+3,5	−1,3
4, −4	−1,74	+1,58	+1,7	−1,6
5, −4	−0,27	+0,19	+0,3	−0,2

*) Zur Abkürzung ist hier

$$((B)) = \left(\frac{d\bar{B}}{ndz}\right)\left\{(1+\nu)^2\frac{h}{h_0} - 1\right\};\ ((C)) = \left(\frac{d\bar{C}}{ndz}\right)\left\{(1+\nu)^2\frac{h}{h_0} - 1\right\}$$

Digitized by Google

11.				
3, −5	−0″,36	+0″,14	+0″,4	−0″,1
4, −5	−0,23	+0,20	+0,3	−0,2
3.				
1,1	−0,43	−0,04	+0,4	
2,1	+3,48	0,00	−3,4	
3,1	+0,20	+0,03	−0,2	
0,0	−0,05	−0,05	+0,1	
1,0	−12,68	+0,15	+12,7	−0,2
2,0	+152,32	−1,20	−152,3	+1,2
3,0	+12,49	+0,05	−12,5	−0,1
4,0	+0,94	+0,01	−0,9	
1, −1	−0,23	+0,03	+0,2	
2, −1	+1,10	0,00	−1,0	
3, −1	+0,44	−0,04	−0,4	
4.				
−1,3	+0,26	+0,01	−0,3	
0,3	−0,18	−0,13	+0,2	+0,1
1,3	−0,47	−0,10	+0,5	+0,1
−2,2	+0,12		−0,1	
−1,2	+1,12	+0,06	−1,2	
0,2	−2,13	−1,31	+2,1	+1,3
1,2	−7,70	−1,46	+7,7	+1,5
2,2	−0,48	−0,12	+0,5	+0,1
5.				
2,2	+0,31		−0,3	
12.				
2, −2	−0,10	+0,12	+0,1	−0,1
3, −2	+3,56	−1,36	−3,6	+1,3
4, −2	+1,73	−1,58	−1,8	+1,6
5, −2	+0,25	−0,18	−0,3	+0,2
3, −3	+0,24	−0,10	−0,2	
4, −3	+0,18	−0,14	−0,2	

deren Summen die Coefficienten (38) und (46) geben.

213.

Ferner erhält man

g, g'	$-2B\frac{\nu}{1+\nu}$ cos	$-B\delta\frac{h}{h_0}$ cos	$-2C\frac{\nu}{1+\nu}$ sin	$-C\delta\frac{h}{h_0}$ sin
1.				
0,0	+1″,10	−0″,18		
1,0	+0,53	−0,04	+0″,9	
2,0	+0,06	−0,02	+0,1	

1.				
−1, −1	−0″02		−0″4	
0, −1	+0,06	+0″02	0,0	
1, −1	+0,07		+0,1	
2.				
1, −1	+0,05			
2, −1	0,00	+0,01		
3, −1	−0,01			
0, −2	−0,05	−0,02		
1, −2	+1,28	−0,09	−0,2	+0″1
2, −2	+2,00	0,00	+1,0	−0,4
3, −2	0,00	−0,04		
1, −3	+0,09	−0,01		
2, −3	+0,16	+0,01	+0,1	
3, −3	+0,02			
11.				
2, −4	−0,10	−0,01	−0,1	
3, −4	+0,68	−0,09	+0,7	−0,1
4, −4	+0,60	+0,17	+0,6	+0,2
5, −4	+0,05	+0,02	+0,1	
3.				
1,1	−0,07		−0,1	
2,1	−0,03			
3,1	+0,01			
0,0	+0,01	+0,02		
1,0	−0,57	+0,03	−0,6	
2,0	−1,49	+0,17	−1,5	+0,2
3,0	−0,01	+0,02		
1, −1	−0,01			
2, −1	−0,05			
3, −1	−0,02			
4.				
−1,3	−0,01			
0,3	−0,09	+0,01	−0,1	
1,3	−0,04			
−1,2	+0,13	+0,01	+0,2	
0,2	−1,40	+0,17	−1,4	[+0,2
1,2	−0,67	+0,03	−0,7	
2,2	−0,06	+0,02	−0,1	
−1,1	+0,01			
0,1	+0,02			
1,1	−0,04			
12.				
2, −2	+0,11	+0,01	+0,1	
3, −2	−0,69	+0,09	−0,7	+0,1
4, −2	−0,60	−0,17	−0,6	−0,2
5, −2	−0,06	−0,02	−0,1	

Digitized by Google

13.				
0,−4	+0″,05	+0″,04		
1,−4	−0,70	+0,07	+0″,7	−0″,1
2,−4	−0,51	−0,17	+0,5	+0,2

welche mit den Werthen von B und C der Artt. 82 und 84 verbunden, die Coefficienten (39), (40), (47), (48) geben. Ferner*)

g, g'	(42)′ sin	(42)″ sin	(43)′ cos	(43)″ cos
1.				
0,0			+863″,2	−14″,1
1,0	−20″,0	−9″,1	−114,5	−5,7
2,0	−1,5	−0,5	−2,8	−0,5
3,0	−0,1		−0,1	
−1,−1	+0,7	+0,3	−2,9	+0,1
0,−1	+0,1	+0,1	+43,0	−0,9
1,−1	−1,1	−0,5	−3,6	−0,8
0,−2			+1,0	−0,1
2.				
1,−1	+1,0	−0,2	+1,0	−0,5
2,−1	−10,2	+0,2	−10,1	−0,1
3,−1	−0,9	+0,2	−1,0	+0,2
0,−2	+6,6	−0,3	+7,3	+0,9
1,−2	−145,7	+1,3	−142,9	−13,5
2,−2	+877,4	−7,2	+862,5	−22,8
3,−2	+47,9	+0,3	+46,7	+0,5
4,−2	+2,6	+0,1	+2,5	+0,1
1,−3	−8,5	+0,3	−8,3	−0,7
2,−3	+54,4	−0,3	+53,4	−1,8
3,−3	+3,5	−0,2	+3,4	−0,2
2,−4	+2,3		+2,3	
11.				
2,−4	−1,8	+1,3	−1,7	+1,2
3,−4	+18,2	−6,8	+18,0	−6,9
4,−4	+10,7	−8,8	+10,5	−8,7
5,−4	+1,1	−0,8	+1,1	−0,8
3,−5	+1,9	−0,6	+1,9	−0,6
4,−5	+1,4	−1,1	+1,4	−1,1

*) Zur Abkürzung ist hier $(42)' = \left(\frac{d\bar{B}}{d\bar{P}}\right) - F\left(\frac{d\bar{B}}{d\bar{K}}\right)$; $(43)' = \left(\frac{d\bar{B}}{d\bar{Q}}\right)$

$(42)'' = \left\{\left(\frac{d\bar{B}}{d\bar{P}}\right) - F\left(\frac{d\bar{B}}{d\bar{K}}\right)\right\}\left\{(1+\nu)^2\frac{h}{h_0} - 1\right\}$; $(43)'' = \left(\frac{d\bar{B}}{d\bar{Q}}\right)\left\{(1+\nu)^2\frac{h}{h_0} - 1\right\}$

Digitized by Google

3.				
1,1	−3″,9	−0″,6	+3″,8	+0″,6
2,1	+19,0	−0,4	−18,8	+0,4
3,1	+0,7	+0,2	−0,6	−0,2
0,0	+7,1	+0,4	−7,1	−0,3
1,0	−143,6	−6,0	+142,5	+6,4
2,0	+865,8	−15,1	−859,4	+14,9
3,0	+17,1	+0,4	−16,8	−0,4
4,0	+2,6	+0,1	−2,6	−0,1
1,−1	−3,5		+3,5	
2,−1	+24,5	−0,5	−24,1	+0,5
3,−1	+1,9	−0,2	−1,9	+0,2
4.				
0,1	+2,1	−0,1	−2,0	+0,1
−1,3	−2,9	−0,1	+2,8	+0,1
0,3	+51,0	−0,9	−50,4	+0,9
1,3	−4,1	−0,3	+4,0	+0,3
−2,2	−0,6		+0,6	
−1,2	−18,0	+1,7	+17,4	−1,7
0,2	+872,6	−14,1	−862,5	+14,1
1,2	−67,6	−7,4	+67,0	+7,3
2,2	−2,1	−0,5	+2,1	+0,5
−1,1	+0,5	+0,2	−0,5	−0,2
0,1	−7,5	+0,1	+7,4	−0,1
1,1	−0,1	−0,4	+0,1	+0,4
5.				
1,2	−0,8	+0,2	+0,8	−0,2
2,2	+4,7		−4,7	
3,2	+0,2		−0,2	
12.				
2,−2	−4,7	+1,2	+4,8	−1,2
3,−2	+17,7	−6,7	−18,2	+7,0
4,−2	+10,5	−8,8	−10,5	+8,7
5,−2	+1,1	−0,8	−1,1	+0,8
3,−3	+1,3	−0,4	−1,2	+0,4
4,−3	+1,0	−0,9	−1,0	+0,8
13.				
0,−4	−0,6	−0,6	−0,6	−0,6
1,−4	−0,3	+7,4	−0,3	+7,4
2,−4	+0,6	+7,8	+0,8	+7,8
3,−4	+0,3	−0,1	+0,2	−0,1

aus welchen die Coefficienten (42) und (43) hervorgehen. Ferner*)

*) Hier ist $(50)' = \left(\frac{d\bar{C}}{d\bar{P}}\right) - F\left(\frac{d\bar{C}}{d\bar{K}}\right)$; $(51)' = \left(\frac{d\bar{C}}{d\bar{Q}}\right)$

$(50)'' = \left\{\left(\frac{d\bar{C}}{d\bar{P}}\right) - F\left(\frac{d\bar{C}}{d\bar{K}}\right)\right\}\left\{(1+\nu)^2\frac{h}{h_0} - 1\right\}$; $(51)'' = \left(\frac{d\bar{C}}{d\bar{Q}}\right)\left\{(1+\nu)^2\frac{h}{h_0} - 1\right\}$

Digitized by Google

g, g'	$(50)'$ cos	$(50)''$ cos	$(51)'$ sin	$(51)''$ sin
1.				
0,0	−873″,4	+14″,2		
1,0	+115,3	+5,3	−20″,3	−9″,4
2,0	+2,7	+0,5	−1,4	−0,5
3,0	+0,1		−0,1	
−1,−1	+2,9	−0,1	+0,7	+0,3
0,−1	−43,5	+0,8	+0,1	+0,1
1,−1	+3,6	+0,8	−1,1	−0,5
0,−2	−1,1	+0,1	0,0	−0,5
2.				
1,−1	−1,0	+0,5	+0,9	−0,2
2,−1	+10,2	+0,2	−10,1	+0,2
3,−1	+1,0	−0,2	−0,9	+0,2
0,−2	−7,8	−0,9	+6,5	−0,3
1,−2	+115,1	+13,5	−143,5	+1,6
2,−2	−876,2	+23,0	+863,1	−7,3
3,−2	−47,1	−0,5	+47,2	+0,3
4,−2	−2,6	−0,1	+2,5	+0,1
1,−3	+8,1	+0,7	−8,3	+0,3
2,−3	−54,3	+1,8	+53,5	−0,3
3,−3	−3,5	+0,2	+3,5	−0,2
2,−4	−2,3	+0,1	+2,3	
11.				
2,−1	+1,7	−1,2	−1,7	+1,2
3,−1	−18,2	+6,9	+18,0	−6,8
4,−1	−10,7	+8,8	+10,5	−8,7
5,−1	−1,1	+0,8	+1,1	−0,8
3,−3	−2,0	+0,7	+1,9	−0,6
4,−3	−1,1	+1,1	+1,1	−1,1
3.				
1,1	+3,8	+0,6	+3,8	+0,6
2,1	−19,0	+0,1	−18,8	+0,1
3,1	−0,7	−0,2	−0,6	−0,2
0,0	−7,1	−0,3	−7,1	−0,3
1,0	+143,5	+5,7	+142,5	+6,1
2,0	−865,8	+15,2	−859,1	+15,1
3,0	−47,1	−0,1	−46,8	−0,1
4,0	−2,6	−0,1	−2,6	−0,1
1,−1	+3,7		+3,5	
2,−1	−24,5	+0,5	−24,1	+0,5
3,−1	−1,9	+0,2	−1,9	−0,2
4.				
0,1	−2,1	+0,1	−2,1	+0,1

Digitized by Google

4.				
−1,3	+2″9	+0″1	+2″8	+0″1
0,3	−51,6	+0,9	−51,0	+1,0
1,3	+1,1	+0,3	+1,1	+0,3
−2,2	+0,6		+0,6	
−1,2	+17,8	−2,1	+17,2	−2,1
0,2	−882,6	+14,3	−872,6	+14,2
1,2	+68,2	+7,3	+67,5	+7,3
2,2	+2,1	+0,5	+2,1	+0,5
−1,1	−0,5	−0,2	−0,5	−0,2
0,1	+7,6	−0,1	+7,5	−0,1
1,1	+0,1	+0,1	+0,1	+0,1
5.				
1,2	+0,8	−0,2	+0,8	−0,2
2,2	−4,7		−4,7	
3,2	−2,3		−0,2	
12.				
2,−2	+1,6	−1,2	+1,8	−1,2
3,−2	−17,7	+6,7	−18,2	+7,0
4,−2	−10,5	+8,8	−10,5	+8,7
5,−2	−1,1	+0,8	−1,1	+0,8
3,−3	−1,3	+0,4	−1,3	+0,4
4,−3	−1,0	+0,9	−1,0	+0,8
13.				
0,−4	−0,6	−0,6	+0,6	+0,6
1,−4	−0,4	+7,5	+0,3	−7,4
2,−4	+0,5	+7,9	−0,3	−7,8
3,−4	+0,3	−0,1	−0,3	+0,1

aus welchen die Coefficienten (50) und (51) hervorgehen. Ferner*)

g, g'	$(44)_0$ sin	$(44)_1$ sin	$(44)_2$ sin	$\left(\frac{dR}{dg'}\right)\delta P$ sin	$\left(\frac{dY}{dg'}\right)\delta Q$ sin
1	−0,2			0,0	0,1
1,0		−3″7		0,0	0,0
2,0		−0,2		0,0	0,0
−1,−1	−0″2	+0,2		0,0	0,1
0,−1	+3,984	−0,003	−0″014	−0″059	−0″058
1,−1	−0,2	−0,3		0,0	0,1
0,−2	+0,20	−0,01		0,0	0,0

*) Hier ist $(44)_0 = \left(\frac{dB_0}{dg'}\right)$; etc.

Digitized by Google

2.					
1, −1	+0″,4				
2, −1	−0,7	−0″,5		−0″,2	
3, −1	0,0	−0,4			
0, −2	+1,2			−0,4	−0″,1
1, −2	−25,9		−0″,1		
2, −2	+156,4		−0,4	−0,2	+0,1
3, −2	+8,6		−0,1		
4, −2	+0,5				
1, −3	−2,3				
2, −3	+13,8	+0,5		+0,2	
3, −3	+0,8	+0,1			
2, −4	+0,8	+0,1			
11.					
2, −4		−0,3			
3, −4		+3,3		+0,1	+0,1
4, −4		+1,9		−0,2	−0,2
5, −4		+0,2			
3, −5		+0,4			
4, −5		+0,3			
3.					
1,1	−0,3				
2,1	+2,0			+0,1	+0,1
3,1	+0,1				
0,0		+0,1			
1,0		0,0		−0,1	−0,3
2,0		−0,1		+2,2	+1,9
3,0				+0,1	+0,1
1, −1	+0,3				
2, −1	−2,0			+0,1	+0,1
3, −1	−0,1				
4.					
0,1	+0,8				
−1,3	−0,8				
0,3	+13,9			+0,2	
1,3	−0,8				
−2,2	−0,1			+0,1	−0,1
−1,2	−8,6				
0,2	+158,0			+0,1	−0,2
1,2	−8,6			−0,1	
2,2	−0,1				
0,1	−0,7			−0,2	
5.					
2,2	+0,3			−0,2	+0,2

Digitized by Google

12.					
2, −2				+0″1	+0″1
3, −2				−0,1	−0,1
4, −2				+0,2	+0,2
13.					
1, −4				+0,3	−0,4
2, −4		+0″1		−1,9	+2,2
3, −4				−0,1	+0,1

deren Summe $\left(\frac{d\bar{B}}{n'dz'}\right)$ giebt. Ferner*)

g, g'	$(52)_0$ cos	$(52)_1$ cos	$(52)_2$ cos	$\left(\frac{dR}{dg'}\right)\partial P$ cos	$\left(\frac{dV}{dg'}\right)\partial Q$ cos
1.					
0, 0		+1″36		−2″27	−1″89
1, 0		+3,5		+0,3	+0,1
2, 0		+0,3			
−1, −1		+0,1			
0, −1		+0,2		−0,2	−0,2
1, −1		+0,3			
2.					
1, −1	−0″1				
2, −1	+0,7	+0,5		+0,2	
3, −1	0,0	+0,1			
0, −2	−1,2			−0,1	−0,1
1, −2	+25,9			+0,1	
2, −2	−156,4	+0,1	+0″1	−0,1	+0,1
3, −2	−8,6		+0,1		
4, −2	−0,5				
1, −3	+2,3				
2, −3	−13,8	−0,5		−0,2	+0,1
3, −3	−0,8	−0,1			
2, −4	−0,8	−0,1			
11.					
2, −4		+0,3			
3, −4		−3,3		−0,1	−0,1
4, −4		−1,9		+0,2	+0,2
5, −4		−0,2			
3, −5		−0,4			
4, −5		−0,3			

*) Hier ist $(52)_0 = \left(\frac{dC_0}{dg'}\right)$; etc.

Digitized by Google

3.					
1,1	+0″3				
2,1	−2,0			−0″1	−0″1
3,1	−0,1				
0,0		−0″1			
1,0		0,0		+0,1	+0,2
2,0		+0,1		−2,2	−1,9
3,0				−0,1	−0,1
1,−1	−0,3				
2,−1	+2,0			−0,1	−0,1
3,−1	+0,1				
4.					
0,1	−0,8				
−1,3	+0,8				
0,3	−14,0			−0,2	
1,3	+0,8				
−2,2	+0,1			+0,1	−0,1
−1,2	+8,7			−0,1	
0,2	−158,6			+0,2	−0,2
1,2	+8,7				
2,2	+0,1				
0,1	+0,7			+0,2	
5.					
0,2	−0,3			+0,2	−0,2
12.					
2,−2				−0,1	−0,1
3,−2				+0,1	+0,1
4,−2				−0,2	−0,2
13.					
1,−4				−0,1	+0,1
2,−4		+0,1		+2,2	−2,0
3,−4				+0,1	−0,1

deren Summe $\left(\frac{d\bar{C}}{n'da'}\right)$ giebt. Ferner*)

g, g'	$\left(\frac{d\bar{B}}{n'da'}\right)$ sin	$[(B)]$ sin	$\left(\frac{d\bar{C}}{n'da'}\right)$ cos	$[(C)]$ cos
1.				
0,0			−2″80	+1″28
1,0	−3″7	−1″7	+3,9	+1,3
2,0	−0,2	−0,1	+0,3	+0,1

*) Hier ist $[(B)] = \left(\frac{d\bar{B}}{n'da'}\right)\left\{(1+\nu)^2\frac{k}{k_0} - 1\right\}$; $[(C)] = \left(\frac{d\bar{C}}{n'da'}\right)\left\{(1+\nu)^2\frac{k}{k_0} - 1\right\}$

Digitized by Google

1.				
−1, −1	0″0	+0″1	−0″1	
0, −1	+3.788	−0,062	+0,2	+0″2
1, −1	−0.5	−0,1	+0,3	+0,1
0, −2	+0,19			
2.				
1, −1	+0,1		−0,1	
2, −1	−1,4	+0,1	+1,4	
3, −1	−0,1		+0,1	
0, −2	+1,0	−0,1	−1,4	
1, −2	−26,0	+0,2	+26,0	−0,3
2, −2	+156,2	−1,3	−156,2	+1,4
3, −2	+8,5	+0,1	−8,5	−0,1
4, −2	+0,5		−0,5	
1, −3	−2,3		+2,3	−0,1
2, −3	+14,5	−0,1	−14,4	+0,1
3, −3	+0,9		−0,9	
2, −4	+0,9		−0,9	
11.				
2, −4	−0,3	+0,2	+0,3	−0,2
3, −4	+3,5	−1,2	−3,5	+1,2
4, −4	+1,5	−1,6	−1,5	+1,6
5, −4	+0,2	−0,2	−0,2	+0,2
3, −5	+0,4	−0,2	−0,4	+0,2
4, −5	+0,3	−0,2	−0,3	+0,2
3.				
1,1	−0,3	−0,1	+0,3	+0,1
2,1	+2,2	−0,1	−2,2	+0,1
3,1	+0,1		−0,1	
0,0	+0,1	+0,1	−0,1	−0,1
1,0	−0,7	−1,4	+0,6	+1,5
2,0	+1,0	−1,5	−1,0	+1,5
3,0	+0,2		−0,2	
1, −1	+0,3	−0,1	−0,3	+0,1
2, −1	−1,8	−0,1	+1,8	+0,1
3, −1	−0,1		+0,1	
4.				
0,1	+0.8		−0.8	
−1,3	−0,8		+0,8	
0,3	+14,1	−0,1	−14,2	+0,1
1,3	−0,8		+0.8	
−2,2	−0,1		+0,1	
−1,2	−8,6	+0,1	+8.6	−0,2
0,2	+157,9	−1,3	−158,6	+1,3
1,2	−8,7	+0,1	+8,7	−0,1
2,2	−0,1		+0,1	
0,1	−0,9		+0.9	

Digitized by Google

5.				
0,2	+0″3		−0″3	
12.				
2, −2	+0,2		−0,2	
3, −2	−0,2		+0,2	
4, −2	+0,4		−0,4	
13.				
1, −4	−0,1	+1″4	0″0	+1″4
2, −4	+0,4	+1,4	+0,3	+1,4

deren Summen die Coefficienten (44) und (52) geben.

214.

Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir die folgenden Werthe der Coefficienten der Gleichung

$$\frac{d\Delta P}{ndt} = (38)n\Delta z + (39)\Delta v + (40)\Delta\frac{h_0}{h} + (41)\Delta\alpha + (42)\Delta P + (43)\Delta Q + (44)n'\Delta z' + (45)\Delta v' + \Delta' B$$

g, g'	(38) sin	(39) cos	(40) cos	(41) cos
1.				
0,0		+151″64	−75″29	−18556″6
1,0	+13″56	−20,55	+10,50	−3
2,0	+1,00	−0,72	+0,37	
−1, −1	−0,39	−0,48	+0,23	
0, −1	−0,03	+7,44	−3,66	
1, −1	+0,53	−0,74	+0,39	
2.				
1, −1	−0,03	+0,12	−0,07	
2, −1	+2,02	−2,05	+1,04	
3, −1	+0,22	−0,16	+0,08	
0, −2	+0,25	+1,28	−0,69	−5
1, −2	+12,68	−26,05	+13,58	−15
2, −2	−151,24	+149,57	−73,79	+41
3, −2	−12,59	+8,36	−4,22	+1
4, −2	−0,94	+0,47	−0,24	
1, −3	+0,70	−1,52	+0,79	−1
2, −3	−9,61	+9,40	−4,61	+3
3, −3	−0,94	+0,61	−0,29	
2, −4	−0,43	+0,40	−0,20	

Digitized by Google

11.				
2, −4	+0″05	−0″18	+0″03	
3, −4	−2,16	+2,82	−1,16	
4, −4	−0,16	+0,60	+0,17	
5, −4	−0,08	+0,07	+0,01	
3.				
1,1	−0,47	+0,72	−0,40	
2,1	+3,48	−3,46	+1,72	−1″
3,1	+0,23	−0,15	+0,08	
0,0	−0,10	−1,09	+0,57	−26
1,0	−12,53	+25,67	−13,09	+13
2,0	+151,12	−150,89	+74,87	−37
3,0	+12,54	−8,39	+4,21	−1
4,0	+0,95	−0,46	+0,23	
1, −1	−0,20	+0,57	−0,29	
2, −1	+4,10	−4,00	+1,98	−1
3, −1	+0,40	−0,30	+0,14	
4.				
−1,3	+0,27	+0,50	−0,26	
0,3	−0,31	−9,01	+4,47	−19
1,3	−0,57	+0,72	−0,38	
−2,2	+0,12	+0,12	−0,06	
−1,2	+4,18	+8,17	−4,01	−5
0,2	−3,44	−151,42	+75,18	−486
1,2	−9,16	+12,38	−6,50	+6
2,2	−0,60	+0,36	−0,18	
−1,1		−0,13	+0,07	
0,1		+1,59	−0,78	+10
1,1		+0,05	−0,04	
12.				
2, −2	+0,02	+0,14	−0,15	
3, −2	+2,20	−2,84	+1,17	
4, −2	+0.15	−0,62	−0,16	
13.				
0, −4		−0,18	+0,11	
1, −4		+0,39	−0,48	
2, −4		+1,34	−1,10	

g, g'	(42) sin	(43) cos	(44) sin	(45) cos
1.				
0,0		+14″2		−225″32
1,0	−29″1	−120,2	−5″4	+31,6
2,0	−2,0	−3,3	−0,3	+1,2

1.				
−1, −1	+1″0	−2″8	+0″1	+0″7
0, −1	+0,2	+42,4	+3,726	−41,031
1, −1	−1,6	−4.4	−0.6	+4.2
0, −2		+0.9	+0,19	−0,27
2.				
1, −1	+0,8	+0,5	+0,1	−0,2
2, −1	−10,0	−10,2	−1,3	+3,1
3, −1	−0,7	−0,8	−0,1	+0.2
0, −2	+6,3	+8,2	+0,9	−2,0
1, −2	−144,4	−156.4	−25,8	+41,0
2, −2	+870.2	+839.7	+154,9	−221,4
3, −2	+48,2	+47,2	+8,6	−12,5
4, −2	+2,7	+2,6	+0,5	−0,7
1, −3	−8,2	−9,0	−2,3	+2,4
2, −3	+54,1	+54,6	+14,4	−43,9
3, −3	+3,3	+3,2	+0.9	−0,9
2, −4	+2,3	+2.3	+0,9	−0,6
11.				
2, −4	−0,5	−0,5	−0,1	+0,1
3, −4	+11,4	+11,1	+2,3	−3,2
4, −4	+1,9	+1,8	−0,1	
5, −4	+0,3	+0,3		
3, −5	+1,3	+1,3	+0,2	−0,4
4, −5	+0,3	+0,3	+0,1	
3.				
0,1				+0,06
1,1	−4,5	+4,4	−0,4	−1,2
2,1	+18,6	−18,4	+2,1	+5,1
3,1	+0,9	−0,8	+0.1	+0,2
0,0	+7,5	−7,4	+0,2	+1,7
1,0	−119,6	+118,9	−2,1	−39,4
2,0	+850,7	−844,3	+2,5	+224,1
3,0	+47,5	−47,2	+0,2	+12,6
4.0	+2,7	−2,7		+0,7
0, −1				+0,03
1, −1	−3,5	+3,5	+0,2	−0,8
2, −1	+24,0	−23,9	−1,9	+5,9
3, −1	+1.7	−1,7	−0,1	+0,4
4.				
0,4	+2.0	−1,9	+0,8	+0,5
−1,3	−3,0	+2,9	−0,8	−0,8
0,3	+50,1	−49,5	+14,0	+13,4
1,3	−4,4	+4,3	−0,8	−1,1
−2,2	−0,6	+0,6	−0,1	−0,2
−1,2	−46,3	+45,7	−8,5	−12,1
0,2	+858,5	−848,4	+156,6	+225,0
1,2	−75,0	+74,3	−8.6	−19,6
2,2	−2,6	+2,6	−0,1	−0.6

Digitized by Google

4.				
−4,4	+0″,7	−0″,7		+0″,2
0,4	−7,4	+7,3	−0″,9	−2,4
1,4	−0,5	+0,5		−0,1
5.				
1,2	−0,6	+0,6		
2,2	+4,7	−4,7	+0,3	+0,4
3,2	+0,2	−0,2		
12.				
2,−2	−0,5	+0,6	+0,2	−0,5
3,−2	+11,0	−11,2	−0,2	+3,2
4,−2	+1,7	−1,8	+0,4	
5,−2	+0,3	−0,3		
3,−3	+0,9	−0,8		
4,−3	+0,1	−0,2		
13.				
0,−4	−1,2	−1,2		+0,3
1,−4	+7,1	+7,1	+1,3	−1,6
2,−4	+8,4	+8,6	+1,8	−2,8
3,−4	+0,2	+0,1		

215.

Ferner ergeben sich die folgenden Werthe der Coefficienten der Gleichung

$$\frac{dJQ}{ndt} = (46)\, n\Delta z + (47)\,\Delta v + (48)\,\Delta\frac{h_0}{h} + (49)\,\Delta a + (50)\,\Delta P + (51)\,\Delta Q + (52)\, n'\Delta z' + (53)\,\Delta v' + \Delta' C$$

g, g'	(46) cos	(47) sin	(48) sin	(49) sin
1.				
0,0	−3″,18			
1,0	−5,0	−4″,3	+2″,6	−11″
2,0	−0,7	−0,4	+0,3	
−1,−1	−0,1	0,0	−0,1	
0,−1	−0,3	+0,5	−0,2	−19
1,−1	−0,3	−0,2	+0,2	
2.				
1,−1	0,0	+0,2	−0,1	
2,−1	−2,0	−2,0	+1,0	−1
3,−1	−0,2	−0,2	+0,1	

2.				
0, −2	+0″1	+1″4	−0″7	−5″
1, −2	−12,5	−25,2	+12,6	−16
2, −2	+151,4	+152,1	−76,0	+40
3, −2	+12,5	+8,4	−4,2	+1
4, −2	+0,9	+0,5	−0,2	
1, −3	+0,8	−1,5	+0,7	−1
2, −3	+9,6	+9,7	−4,8	+3
3, −3	+0,9	+0,6	−0,3	
2, −4	+0,4	+0,4	−0,2	
11.				
2, −4	−0,1	−0,2		
3, −4	+2,2	+2,9	−1,2	
4, −4	+0,1	+0,6	+0,2	
3.				
1,1	+0,4	+0,7	−0,4	
2,1	−3,4	−3,4	+1,7	−1
3,1	−0,2	−0,2	+0,1	
0,0	+0,1	−1,1	+0,5	−26
1,0	+12,5	+25,6	−13,1	+13
2,0	−151,1	−150,9	+74,9	−37
3,0	−12,6	−8,4	+4,2	−1
4,0	−0,9	−0,5	+0,2	
1, −1	+0,2	+0,6	−0,3	
2, −1	−4,0	−4,0	+2,0	−1
3, −1	−0,4	−0,3	+0,1	
4.				
−1,3	−0,3	+0,5	−0,3	
0,3	+0,3	−9,1	+4,5	−19
1,3	+0,6	+0,8	−0,4	
−2,2	−0,1	+0,1		
−1,2	−4,2	+8,1	−3,9	−5
0,2	+3,4	−152,0	+75,5	−484
1,2	+9,2	+12,4	−6,5	+6
2,2	+0,6	+0,3	−0,2	
0,1		+1,6	−0,8	+10
12.				
2, −2	0.0	+0,1	−0,2	
3, −2	−2,3	−2,8	+1,2	
4, −2	−0,2	−0,6	−0,2	
13.				
0, −1		+0,2	−0,1	
1, −1		+0,4	+0,5	
2, −1		−1,1	+1,1	

Digitized by Google

g, g'	(50) cos	(51) sin	(52) cos	(53) sin
1.				
0,0	−24″3		−1″52	
1,0	+120,6	−29″7	+5,2	+7″8
2,0	+3,2	−1,9	+0,4	+0,8
−1,−1	+2,8	+1,0	+0,1	−0,2
0,−1	−42,7	+0,2	0,0	−0,697
1,−1	+4,4	−1,6	+0,4	+0,5
0,−2	−1,0	−0,5	0,0	−0,03
2.				
1,−1	−0,5	+0,7	−0,1	−0,3
2,−1	+10,4	−9,9	+1,4	+3,0
3,−1	+0,8	−0,7	+0,1	+0,2
0,−2	−8,7	+6,2	−1,4	−2,0
1,−2	+158,6	−141,9	+25,7	+37,6
2,−2	−853,2	+856,1	−154,8	−226,7
3,−2	−47,9	+47,5	−8,6	−12,6
4,−2	−2,7	+2,6	−0,5	−0,7
1,−3	+9,1	−8,0	+2,2	+2,2
2,−3	−52,5	+53,2	−14,3	−14,3
3,−3	−3,3	+3,3	−0,9	−0,9
2,−4	−2,2	+2,3	−0,9	−0,6
11.				
2,−4	+0,5	−0,5	+0,1	+0,1
3,−4	−11,3	+11,2	−2,3	−3,2
4,−4	−1,9	+1,8	+0,1	
5,−4	−0,3	+0,3		
3,−5	−1,3	+1,3	−0,2	−0,4
4,−5	−0,3	+0,3	−0,1	
3.				
0,1				+0,06
1,1	+4,4	+4,4	+0,4	−1,2
2,1	−18,6	−18,4	−2,1	+5,1
3,1	−0,9	−0,8	−0,1	+0,2
0,0	−7,4	−7,4	−0,2	+1,6
1,0	+149,2	+148,6	+2,0	−39,3
2,0	−850,6	−844,3	−2,5	+224,1
3,0	−47,5	−47,2	−0,2	+12,6
4,0	−2,7	−2,7		+0,7
0,−1				+0,03
1,−1	+3,7	+3,5	−0,2	−0,8
2,−1	−24,0	−23,9	+1,9	+5,9
3,−1	−1,7	−1,7	+0,1	+0,4

Digitized by Google

4.				
0,4	−2″0	−2″0	−0″8	+0″5
−1,3	+3,0	+2,9	+0,8	−0,8
0,3	−50,7	−50,0	−14,1	+13,4
1,3	+4,4	+4,4	+0,8	−1,2
−2,2	+0,6	+0,6	+0,1	−0,2
−1,2	+45,7	+45,1	+8,4	−14,8
0,2	−868,3	−858,4	−157,3	+225,9
1,2	+75,5	+74,8	+8,6	−19,6
2,2	+2,6	+2,6	+0,1	−0,6
−1,1	−0,7	−0,7		
0,1	+7,5	+7,4	+0,9	−2,1
1,1	+0,5	+0,5		
5.				
1,2	+0,6	+0,6		
2,2	−1,7	−1,7	−0,3	+0,1
3,2	−2,3	−0,2		
12.				
2,−2	+0,1	+0,6	−0,2	−0,5
3,−2	−11,0	−11,2	+0,2	+3,2
1,−2	−1,7	−1,8	−0,1	
5,−2	−0,3	−0,3		
3,−3	−0,9	−0,9		+0,2
1,−3	−0,1	−0,2		
13.				
0,−1	−1,2	+1,2		
1,−1	+7,1	−7,1	+1,1	+1,7
2,−1	+8,1	−8,1	+1,7	+2,7
3,−1	+0,2	−0,2		

216.

Endlich haben wir noch die Coefficienten der Gleichung des Art. 193 nemlich

$$\frac{d.\Delta\delta K}{ndt} = \Delta\eta + (54)\,\Delta\alpha + (55)\,\Delta P + (56)\,\Delta Q$$

aufzustellen. Die Berechnung derselben ist so einfach, dass ich sogleich das Resultat aufstellen kann.

g, g'	(54) cos	(55) sin	(56) cos
1.			
0,0	−118″3		−37″6
1,0	−0,1	−0″6	+2,6
0,1			−0,9

Digitized by Google

2.			
2, −1		−0″2	+0″3
1, −2		−3,4	+3,4
2, −2	+2″	+18,9	−18,4
3, −2		+1,1	−1,0
2, −3		+1,2	−1,2
3.			
2,1		−0,4	+0,4
1,0		+3,3	−3,3
2,0	−2	−18,7	+18,7
3,0		−1,0	+1,0
2, −1		−0,5	+0,5
4.			
0,3	−1	−1,1	+1,1
−1,2		+1,0	−1,0
0,2	−22	−18,3	+18,3
1,2		+1,6	−1,6
0,1		+0,2	−0,2

Hiemit sind alle Variationscoefficienten gegeben.

§ 17. Allgemeine Methode zur Berechnung der in der Mondbewegung vorhandenen Störungen sehr langer Periode.

Verbindung der Methode der unbestimmten Coefficienten mit der Variation der Differentialgleichungen.

217.

Alle in der Mondbewegung vorhandenen Ungleichheiten sehr langer Periode in Bezug auf die Umlaufszeit des Mondes um die Erde haben kleine Coefficienten. Alle diese Coefficienten sind lange nicht so gross, dass das Quadrat derselben merklich werden könnte, wie z. B. bei der grossen Ungleichheit des Jupiters und des Saturns der Fall ist. Aber das Product der genannten Ungleichheiten und der von ihnen abhängigen, anderweitigen, Ungleichheiten mit der von der Sonne bewirkten, bedeutenden störenden Kraft ist merklich, und dergestalt auf die Ungleichheiten sehr langer Periode rückwirkend, dass es manchmal die Werthe der Coefficienten derselben wesentlich ändert.

Es ist daher nothwendig, bei der Berechnung dieser auf das genannte Product Rücksicht zu nehmen. Die Erfüllung dieser Bedingung

Digitized by Google

ist nicht ohne Schwierigkeiten, da hier eine Wechselwirkung statt findet, die ohne zweckmässige Auswahl der Methode das erhaltene Resultat zu entstellen im Stande ist.

Bei den Ungleichheiten, deren Periode minder lang ist, leistet die im Vorhergehenden angewandte Methode der successiven Substitutionen ausreichende Dienste, wie man im Vorhergehenden bei der Ungleichheit, deren Argument $2(\omega-\omega')$ ist, gesehen hat, und weiter unten bei andern ähnlichen Ungleichheiten sehen wird. Aber wenn die Periode bedeutend länger ist, so kann die Anwendung dieses Verfahrens sehr umständlich, und sogar mislich werden, weshalb ein anderes Verfahren in Anwendung gebracht werden muss. Das einzig rationelle Verfahren, welches an die Stelle jenes gesetzt werden kann, ist die Verbindung der in den beiden vorhergehenden Paragraphen erklärten Methode der Variation der Differentialgleichungen der Bewegung mit der Methode der unbestimmten Coefficienten.*) Dieses Verfahren lässt sich so ausbilden, dass man einige wenige allgemeine Gleichungen erhält, aus welchen sich alle Ungleichheiten sehr langer Periode leicht berechnen lassen, und aus denselben Gleichungen kann man, wenn man nur die Grundlage derselben hinreichend weit ausdehnt, auch die Säcularänderungen berechnen, die ja im Grunde auch Ungleichheiten sehr langer Periode sind. Die Entwickelung dieser allgemeinen Gleichungen soll jetzt ausgeführt werden.

218.

Sei $nxt+\alpha$ das Argument irgend einer Ungleichheit sehr langer Periode, dann ist nothwendiger Weise x eine sehr kleine Zahl. Setzen wir zur Abkürzung

$$X = nxt + \alpha$$

dann ist leicht einzusehen, dass in dem Ausdruck von $n\Delta z$ nicht blos ein Glied von der Form $a \sin(nxt+\alpha)$ vorkommen wird, sondern wegen der Verbindung dieser Ungleichheit mit der störenden Kraft der Sonne in $n\Delta z$ überhaupt die folgenden Glieder entstehen werden,

$$\begin{aligned} n\Delta z = {} & a \sin X \\ & + \Sigma p \sin(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega' + X) \\ & + \Sigma p_1 \sin(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega' - X) \end{aligned} ;$$

*) S. Schum. Astr. Nachr. B. XXV. p. 327 u. 328.

Digitized by Google

wenn a, p, p_1 die numerischen, zu bestimmenden, Coefficienten bezeichnen, und unter den Summenzeichen das Glied ausgeschlossen wird, in welchem $i = i' = i'' = i''' = 0$ ist, da dieses für sich angesetzt worden ist. In den Ausdrücken für $\Delta\nu$ und $\Delta\frac{h_0}{h}$ müssen ähnliche, aber mit Cosinussen multiplicirte, Glieder entstehen.

Da hier der Coefficient von t in X weit kleiner ist, wie die Coefficienten von t in $ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega'$, so darf man ihn bei den Differentiationen in Bezug auf die letzteren übergehen, und demzufolge

$$\begin{aligned}\tfrac{d.\Delta z}{dt} &= xa\cos X\\ &\quad + \Sigma\beta p\cos(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega' + X)\\ &\quad + \Sigma\beta p_1\cos(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega' - X)\end{aligned}$$

setzen, wo β, wie im § 6, den Coefficienten von nt im Ausdruck von $ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega'$ bezeichnet. Die vorstehende Form werde ich indess nicht der Entwickelung zu Grunde legen, sondern die folgende, die damit identisch ist, und in der Anwendung, die hier davon gemacht werden wird, wesentliche Vortheile mit sich bringt. Ich setze

$$\begin{aligned}n\Delta z &= a_0\sin X\\ &\quad + \sin X.\Sigma k\cos(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega')\\ &\quad + \cos X.\Sigma k'\sin(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega')\\ \Delta\nu &= a_1\cos X\\ &\quad + \sin X.\Sigma l\sin(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega')\\ &\quad + \cos X.\Sigma l'\cos(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega')\end{aligned}$$

u. s. w. Man sieht, dass hier

$$k = p - p_1,\ k' = p + p_1$$

ist, und für die übrigen Functionen ähnliche Gleichungen vorhanden sind, die hier aber nicht angeführt zu werden brauchen. In Folge der obigen Bemerkung haben die Differentiale in Bezug auf die Zeit nun die folgenden Ausdrücke,

$$\begin{aligned}\Delta\tfrac{dz}{dt} &= xa_0\cos X\\ &\quad - \sin X.\Sigma\beta k\sin(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega')\\ &\quad + \cos X.\Sigma\beta k'\cos(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega')\\ \Delta\tfrac{d\nu}{ndt} &= -xa_1\sin X\\ &\quad + \sin X.\Sigma\beta l\cos(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega')\\ &\quad - \cos X.\Sigma\beta l'\sin(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega')\end{aligned}$$

und ähnliche für die übrigen Functionen.

Digitized by Google

Man wird weiter unten sehen, dass diese Form auf zwei aufzulösende Systeme von linearischen Gleichungen führt, während jene Form auf Ein solches System geführt hätte, welches aber doppelt so viele Gleichungen und Unbekannten enthalten hätte. In der Ausdehnung, die ich hier diesem Verfahren geben werde, wird man auf zwei Systeme von je 12 Gleichungen und Unbekannten geführt werden, während die Anwendung jener Form die Auflösung eines Systems von 24 Gleichungen verlangt hätte. Da nun die Arbeit, die die Auflösung von zwei Systemen von je m Gleichungen und Unbekannten erfordert, weit geringer ist, wie die, welche die Auflösung von Einem System von $2m$ Gleichungen und Unbekannten verursacht, so ist die oben zuletzt angegebene Form von $n\Delta z$, Δv, etc. die vortheilhaftere.

219.

Die im vor. Art. aufgestellten Ausdrücke begreifen auch die Säcularänderungen in sich. Diese bestehen in der That aus der Summe einer Anzahl von periodischen Gliedern, die alle ausserordentlich lange Perioden haben, und von welchen man aus dieser Ursache mit den ersten Gliedern der Reihenentwickelung derselben Tausende von Jahren ausreicht. Setzt man $\alpha = 90^\circ$ in $X = nxt + \alpha$, nimmt von den Reihenentwickelungen von sin X und cos X nur die ersten Glieder, lässt die Constante, die dadurch in $n\Delta z$ entsteht, weg, weil sie sich der Constante c des Ausdrucks $nz = nt + c +$ etc. einverleibt, und setzt

$$\begin{aligned} nx^2a_0 &= -A_0, & nxa_1 &= -A_1 \\ nxk &= -K, & nxl &= -L \\ nk' &= K', & nl' &= L' \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} n\Delta z &= \tfrac{1}{2}nA_0t^2 \\ &\quad + t\Sigma K \sin(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega') \\ &\quad + \tfrac{1}{n}\Sigma K' \cos(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega') \\ \Delta v &= A_1t \\ &\quad + t\Sigma L \cos(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega') \\ &\quad + \tfrac{1}{n}\Sigma L' \sin(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega') \end{aligned}$$

welches die Form der Säcularänderungen ist. Die hier mit Zugrundelegung der Form von $n\Delta z$, Δv, etc. des vor. Art. abzuleitenden Endgleichungen können daher auch zur Berechnung der Säcularänderungen

Digitized by Google

angewandt werden, und die in den Mondtafeln aufgenommenen Säcularänderungen sind in der That auf diese Art berechnet worden. Die vorstehenden Ausdrücke enthalten die Glieder, auf welche Adams vor einigen Jahren aufmerksam gemacht hat, aber man sieht aus dieser Darlegung, dass sie mir bei meinen früheren Entwickelungen und Berechnungen nicht entgangen sind. Mein Verfahren, welches ich hier für die weiter unten folgende Anwendung desselben entwickeln werde, habe ich lange vor Adams in Schum. Astr. Nachr. am oben angeführten Orte mit bestimmten Worten bezeichnet.

220.

Zur Berechnung der Ungleichheiten langer Periode braucht man in den obigen Ausdrücken von $n\Delta z$, etc. nur die grössten der von der anziehenden Kraft der Sonne in der Mondbewegung herrührenden Glieder aufzunehmen, da diese blos eine nachtheilige Rück- oder Wechselwirkung ausüben können. Die minder grossen Glieder können neben diesen, wenn sie merkliche Wirkung ausüben sollten, immer noch durch successive Substitutionen berücksichtigt werden, da von ihnen keine nachtheilige Wechselwirkung zu befürchten steht. Ich werde daher in $n\Delta z$, Δv, etc. ausser den Gliedern, die blos die Veränderliche X enthalten, nur die Coefficienten der folgenden Argumente

$$\begin{gathered} g \\ g - 2g' + 2\omega - 2\omega' \\ 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega' \\ 3g - 2g' - 2\omega - 2\omega' \end{gathered}$$

als unbestimmte Grössen einführen,*) alle übrigen Glieder, die in irgend einem bestimmten Falle noch merkliche Wirkung ausüben könnten, können den im § 15 mit vorgesetztem Δ' bezeichneten Gliedern einverleibt werden. Um dieses deutlicher zu machen, sei

$$n\Delta z = Z + Z'$$

wo unter Z die Summe der Glieder verstanden wird, die mit unbestimmten Coefficienten eingeführt sind, und unter Z' die Summe derjenigen, die bestimmte Coefficienten haben; ähnliche Ausdrücke muss

*) In meiner früheren Entwickelung nach dieser Methode hatte ich eine weit grössere Anzahl von Argumenten aufgenommen.

Digitized by Google

man sich für die übrigen Functionen denken. Nehmen wir nun irgend eine der Variationsgleichungen des § 15, z. B. (68) vor, so wird, wenn wir blos Rücksicht auf das Glied $(10)\, n\Delta z$ nehmen, da es sich mit den übrigen Gliedern eben so verhält,

$$\Delta\frac{dz}{dt} = (10)\, Z + \text{etc.} + (10)\, Z' + \text{etc.}$$

und dieser Gleichung wird dadurch Gnüge geleistet, dass man die Glieder $(10)\, Z' + \text{etc.}$ als bekannte Glieder der Gleichung hinzufügt. In den Variationsgleichungen, wie (67), (70), etc., die ohnehin ein völlig bekanntes Glied enthalten, werden die betreffenden Producte diesem ohne Weiteres hinzugefügt.

221.

Sei nun nach diesen Erklärungen

$$n\Delta z = a_0 + \left.\begin{array}{l} + k_1 \cos g \\ + k_2 \cos(1,-2,2) \\ + k_4 \cos(2,-2,2) \\ + k_5 \cos(3,-2,2) \end{array}\right\} \sin X + \left.\begin{array}{l} + k'_1 \sin g \\ + k'_2 \sin(1,-2,2) \\ + k'_4 \sin(2,-2,2) \\ + k'_5 \sin(3,-2,2) \end{array}\right\} \cos X + Z'$$

$$\Delta v = \left.\begin{array}{l} l_1 \sin g \\ + l_2 \sin(1,-2,2) \\ + l_4 \sin(2,-2,2) \\ + l_5 \sin(3,-2,2) \end{array}\right\} \sin X + \left.\begin{array}{l} + a_1 \\ + l'_1 \cos g \\ + l'_2 \cos(1,-2,2) \\ + l'_4 \cos(2,-2,2) \\ + l'_5 \cos(3,-2,2) \end{array}\right\} \cos X + V'$$

$$\frac{\Delta r_0}{h} = \left.\begin{array}{l} m_1 \sin g \\ + m_2 \sin(1,-2,2) \\ + m_4 \sin(2,-2,2) \\ + m_5 \sin(3,-2,2) \end{array}\right\} \sin X + \left.\begin{array}{l} + a_2 \\ + m'_1 \cos g \\ + m'_2 \cos(1,-2,2) \\ + m'_4 \cos(2,-2,2) \\ + m'_5 \cos(3,-2,2) \end{array}\right\} \cos X + H'$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{array}{ll} 1,-2,2 & \text{statt } g - 2g' + 2\omega - 2\omega' \\ 2,-2,2 & \text{statt } 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega' \\ 3,-2,2 & \text{statt } 3g - 2g' + 2\omega - 2\omega' \end{array}$$

Digitized by Google

geschrieben worden ist, und Z', V', H' die Summe der übrigen, mit bestimmten Coefficienten versehenen, Glieder bedeuten. In den Ausdrücken von ΔP und ΔQ brauchen keine unbestimmten Coefficienten eingeführt zu werden, da die betreffenden Glieder dieser Functionen, wenigstens in soweit sie auf die Bestimmung von $n\Delta z$, etc. Einfluss äussern, mit bestimmten Coefficienten eingeführt werden können. Die Differentiation der vorstehenden Ausdrücke giebt nun, mit Rücksicht auf das Vorhergehende, und wenn man erwägt, dass die Differentiale von Z', V', H' hier nicht in Betracht kommen, da sie fortwährend Glieder anderer Form wie die vorstehenden hervorbringen,

$$\frac{d\Delta z}{dt} = \left.\begin{array}{l} -\ k_1 \sin g \\ -\ \beta_3 k_3 \sin(1,-2,2) \\ -\ \beta_4 k_4 \sin(2,-2,2) \\ -\ \beta_5 k_5 \sin(3,-2,2) \end{array}\right\} \sin X \quad \left.\begin{array}{l} +\ x a_0 \\ +\ k'_1 \cos g \\ +\ \beta_3 k'_3 \cos(1,-2,2) \\ +\ \beta_4 k'_4 \cos(2,-2,2) \\ +\ \beta_5 k'_5 \cos(3,-2,2) \end{array}\right\} \cos X$$

$$\frac{d\Delta v}{dt} = -\ x a_1 \left.\begin{array}{l} +\ l_1 \cos g \\ +\ \beta_3 l_3 \cos(1,-2,2) \\ +\ \beta_4 l_4 \cos(2,-2,2) \\ +\ \beta_5 l_5 \cos(3,-2,2) \end{array}\right\} \sin X \quad \left.\begin{array}{l} -\ l'_1 \sin g \\ -\ \beta_3 l'_3 \sin(1,-2,2) \\ -\ \beta_4 l'_4 \sin(2,-2,2) \\ -\ \beta_5 l'_5 \sin(3,-2,2) \end{array}\right\} \cos X$$

$$\frac{d\frac{h_2}{h}}{ndt} = -\ x a_2 \left.\begin{array}{l} +\ m_1 \cos g \\ +\ \beta_3 m_3 \cos(1,-2,2) \\ +\ \beta_4 m_4 \cos(2,-2,2) \\ +\ \beta_5 m_5 \cos(3,-2,2) \end{array}\right\} \sin X \quad \left.\begin{array}{l} -\ m'_1 \sin g \\ -\ \beta_3 m'_3 \sin(1,-2,2) \\ -\ \beta_4 m'_4 \sin(2,-2,2) \\ -\ \beta_5 m'_5 \sin(3,-2,2) \end{array}\right\} \cos X$$

wo β_3, β_4, β_5 die Coefficienten von nt in den Ausdrücken der neben stehenden Argumente bezeichnen. Ausserdem setze ich

$$\overline{(\Delta W_0)} = \left.\begin{array}{l} (a_3 + c_1) \sin g \\ \quad + c_3 \sin(1,-2,2) \\ \quad + c_4 \sin(2,-2,2) \\ \quad + c_5 \sin(3,-2,2) \\ \quad + \overline{B'} \end{array}\right\} \sin X \quad \left.\begin{array}{l} (b_0 + c'_0) \\ + (a_4 + c'_1) \cos g \\ \quad + c'_3 \cos(1,-2,2) \\ \quad + c'_4 \cos(2,-2,2) \\ \quad + c'_5 \cos(3,-2,2) \end{array}\right\} \cos X$$

Digitized by Google

$$\left(\frac{d\overline{\Delta W_0}}{dy}\right) = d_0 \left\{\begin{array}{l} +(a_3+d_1)\cos g \\ \quad +d_3\cos(1,-2,2) \\ \quad +d_4\cos(2,-2,2) \\ \quad +d_5\cos(3,-2,2) \end{array}\right\}\sin X \quad \left\{\begin{array}{l} +(-a_4+d'_1)\sin g \\ \quad +d'_3\sin(1,-2,2) \\ \quad +d'_4\sin(2,-2,2) \\ \quad +d'_5\sin(3,-2,2) \end{array}\right\}\cos X + \left(\frac{d\overline{B'}}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d^2\overline{\Delta W_0}}{dy^2}\right) = \left\{\begin{array}{l} -(a_3+e_1)\sin g \\ \quad -e_3\sin(1,-2,2) \\ \quad -e_4\sin(2,-2,2) \\ \quad -e_5\sin(3,-2,2) \end{array}\right\}\sin X \quad \left\{\begin{array}{l} -e'_0 \\ -(a_4+e'_1)\cos g \\ \quad -e'_3\cos(1,-2,2) \\ \quad -e'_4\cos(2,-2,2) \\ \quad -e'_5\cos(3,-2,2) \end{array}\right\}\cos X + \left(\frac{d^2\overline{B'}}{dy^2}\right)$$

Die hier unter der Bezeichnung b_0, a_3, a_4 eingeführten Coefficienten sind die, welche bei den Integrationen den kleinen Divisor x bekommen, und deshalb von den übrigen Coefficienten abgesondert betrachtet werden müssen. Die Function $\overline{B'}$ bezeichnet wieder die Summe der Glieder in $(\overline{\Delta W_0})$, die andere Argumente haben wie die angeführten, und mit bestimmten Coefficienten versehen sind. Sei überdies noch

$$\left(\frac{d\overline{B'}}{dy}\right) n\delta z + (10)Z' + (11)V' + (12)H' = \left\{\begin{array}{l} \varkappa'_0 \\ +\varkappa_1\sin g \\ +\varkappa_3\sin(1,-2,2) \\ +\varkappa_4\sin(2,-2,2) \\ +\varkappa_5\sin(3,-2,2) \end{array}\right\}\sin X \quad \left\{\begin{array}{l} \varkappa'_0 \\ +\varkappa'_1\cos g \\ +\varkappa'_3\cos(1,-2,2) \\ +\varkappa'_4\cos(2,-2,2) \\ +\varkappa'_5\cos(3,-2,2) \end{array}\right\}\cos X$$

$$\left(\frac{d^2\overline{B'}}{dy^2}\right) n\delta z + (14)Z' + (15)V' = \left\{\begin{array}{l} \lambda_0 \\ +\lambda_1\cos g \\ +\lambda_3\cos(1,-2,2) \\ +\lambda_4\cos(2,-2,2) \\ +\lambda_5\cos(3,-2,2) \end{array}\right\}\sin X \quad \left\{\begin{array}{l} +\lambda'_1\sin g \\ +\lambda'_3\sin(1,-2,2) \\ +\lambda'_4\sin(2,-2,2) \\ +\lambda'_5\sin(3,-2,2) \end{array}\right\}\cos X$$

Digitized by Google

$$(17)\,Z' + (18)\,V' + (19)\,\Delta P + (20)\,\Delta Q - \Delta' Z =$$

$$\left.\begin{array}{l} p_0 \\ + p_1 \cos g \\ + p_2 \cos (1,-2,2) \\ + p_4 \cos (2,-2,2) \\ + p_5 \cos (3,-2,2) \end{array}\right\} \sin X \qquad \left.\begin{array}{l} + p'_1 \sin g \\ + p'_3 \sin (1,-2,2) \\ + p'_4 \sin (2,-2,2) \\ + p'_5 \sin (3,-2,2) \end{array}\right\} \cos X$$

Hiemit sind alle Functionen unbestimmter Coefficienten aufgestellt, die erfordert werden, um die ersten Bedingungsgleichungen zu bilden.

222.

Es müssen jetzt die eben aufgestellten Ausdrücke in die Gleichungen (68), (69), (70), nemlich in

$$\frac{d\Delta z}{dt} = \overline{(\Delta W_0)} + \left(\frac{d.\overline{\Delta W_0}}{dy}\right) n\delta z + (10)\, n\Delta z + (11)\,\Delta v + (12)\,\Delta \frac{h_0}{h}$$

$$-2\,\frac{d\Delta v}{ndt} = \left(\frac{d.\overline{\Delta W_0}}{dy}\right) + \left(\frac{d^2.\overline{\Delta W_0}}{dy^2}\right) n\delta z + (14)\, n\Delta z + (15)\,\Delta v$$

$$\frac{d.\Delta \frac{h_0}{h}}{ndt} = (17)\, n\Delta z + (18)\,\Delta v + (19)\,\Delta P + (20)\,\Delta Q - \Delta' \Sigma$$

substituirt werden, bei welcher Substitution die mit $(n\delta z)^2$ und Δy multiplicirten Glieder, die oben weggelassen worden sind, übergangen werden können. Hiebei müssen die numerischen Werthe von $n\delta z$ und den Coefficienten (10), (11), etc., welche letztere in den Artt. 202, 204, 205 gegeben sind, angewandt werden. Von den Ausdrücken von $n\Delta z$, Δv, $\Delta \frac{h_0}{h}$ des vor. Art. sind nur die mit unbestimmten Coefficienten versehenen Glieder anzuwenden, da die Substitution der Zusatzglieder Z', V', Π' nach dem Vorhergehenden schon als ausgeführt angenommen wird. Auch sind in dieser Substitution von den vollständigen Werthen der Coefficienten (10), (11), etc. nur diejenigen Glieder zu berücksichtigen, die die im Vorhergehenden mit unbestimmten Coefficienten eingeführten Argumente wieder geben, da die Resultate aller übrigen merklichen Verbindungen den Functionen Z', V', Π' schon einverleibt gedacht werden; eine Bedingung, die jedoch nur durch successive Näherungen erfüllt werden kann. Da nun die durch die beschriebenen Substitutionen sich ergebenden Gleichungen identisch statt finden müssen, so zerfällt jede derselben in so viele besondere Gleichungen, wie verschiedene

Digitized by Google

veränderliche Functionen vorkommen. Die 27 Gleichungen, die somit entstehen, und mit wenig Mühe zu erhalten sind, habe ich in der am Schlusse dieses § angefügten Tafel 1 aufgestellt. Die Substitutionen selbst sind so einfach, dass sie keiner weiteren Erläuterungen bedürfen.

223.

Aus diesen Gleichungen müssen zuerst die mit c, d, e bezeichneten Grössen eliminirt werden, und die Gleichungen, die dazu erforderlich sind, giebt der Ausdruck für ΔW_0, den ich wie folgt aufstelle,

$$\begin{aligned}
\Delta W_0 = {} & \left.\begin{aligned} & b_1 \sin(\gamma - g) \\ - & \eta_2 f_2 \sin(2\gamma - 2g) \end{aligned}\right\} \sin X \\
& \left.\begin{aligned} & + f_1 \sin g \\ & + f_2 \sin(-\gamma + 2g) \\ & + \eta_2 b_1 \sin(2\gamma - g) \\ & + a_3 \sin\gamma \end{aligned}\right\} \sin X \\
& \left.\begin{aligned} & + b_{0,3} \sin(0,1,-2,2) \\ & + b_{-1,4} \sin(-1,2,-2,2) \\ & + \eta_2 b_{-1,5} \sin(-2,3,-2,2) \\ & + b_{1,2} \sin(1,0,-2,2) \end{aligned}\right\} \sin X \\
& \left.\begin{aligned} & + b_{0,4} \sin(0,2,-2,2) \\ & + b_{-1,5} \sin(-1,3,-2,2) \\ & + \eta_2 b_{-1,6} \sin(-2,4,-2,2) \\ & + b_{1,3} \sin(1,1,-2,2) \\ & + \eta_2 b_{1,2} \sin(2,0,-2,2) \end{aligned}\right\} \sin X \\
& \left.\begin{aligned} & + b_{0,5} \sin(0,3,-2,2) \\ & + b_{-1,6} \sin(-1,4,-2,2) \\ & + b_{1,4} \sin(1,2,-2,2) \\ & + \eta_2 b_{1,3} \sin(2,1,-2,2) \\ & + \eta_3 b_{1,2} \sin(3,0,-2,2) \end{aligned}\right\} \sin X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left.\begin{aligned} & + b_0 \\ & + b'_1 \cos(\gamma - g) \\ & + \eta_2 f'_2 \cos(2\gamma - 2g) \end{aligned}\right\} \cos X \\
& \left.\begin{aligned} & + f'_1 \cos g \\ & + f'_2 \cos(-\gamma + 2g) \\ & + \eta_2 b'_1 \cos(2\gamma - g) \\ & + a_4 \cos\gamma \end{aligned}\right\} \cos X \\
& \left.\begin{aligned} & + b'_{0,3} \cos(0,1,-2,2) \\ & + b'_{-1,4} \cos(-1,2,-2,2) \\ & + \eta_2 b'_{-1,5} \cos(-2,3,-2,2) \\ & + b'_{1,2} \cos(1,0,-2,2) \end{aligned}\right\} \cos X \\
& \left.\begin{aligned} & + b'_{0,4} \cos(0,2,-2,2) \\ & + b'_{-1,5} \cos(-1,3,-2,2) \\ & + \eta_2 b'_{-1,6} \cos(-2,4,-2,2) \\ & + b'_{1,3} \cos(1,1,-2,2) \\ & + \eta_2 b'_{1,2} \cos(2,0,-2,2) \end{aligned}\right\} \cos X \\
& \left.\begin{aligned} & + b'_{0,5} \cos(0,3,-2,2) \\ & + b'_{-1,6} \cos(-1,4,-2,2) \\ & + b'_{1,4} \cos(1,2,-2,2) \\ & + \eta_2 b'_{1,3} \cos(2,1,-2,2) \\ & + \eta_3 b'_{1,2} \cos(3,0,-2,2) \end{aligned}\right\} \cos X
\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
(0,1,-2,2) \text{ statt } & \quad g - 2g' + 2\omega - 2\omega' \\
(-1,2,-2,2) \text{ statt } & \quad -\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega' \\
(-2,3,-2,2) \text{ statt } & \quad -2\gamma + 3g - 2g' + 2\omega - 2\omega' \\
(1,0,-2,2) \text{ statt } & \quad \gamma \quad -2g' + 2\omega - 2\omega' \\
\text{etc.} & \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Digitized by Google

geschrieben worden ist, und η_2 und η_3 die im Art. 35 entwickelten und eben so benannten Factoren bedeuten. Aus diesem Ausdruck erhält man

$$\frac{d.\Pi W_0}{ndt} = \left.\begin{matrix} -xb_0 \\ -b_1\cos(\gamma-g) \end{matrix}\right\}\sin X \qquad +b'_1\sin(\gamma-g)\cos X$$

$$\left.\begin{matrix} +f_1\cos g \\ +2f_2\cos(-\gamma+2g) \\ -xa_1\cos\gamma \end{matrix}\right\}\sin X \qquad \left.\begin{matrix} -f'_1\sin g \\ -2f'_2\sin(-\gamma+2g) \\ +xa_3\sin\gamma \end{matrix}\right\}\cos X$$

$$\left.\begin{matrix} +\beta_3 b_{0,3} & \cos(0,1,-2,2) \\ +\beta_4 b_{-1,4} & \cos(-1,2,-2,2) \\ +\beta_2 b_{1,2} & \cos(1,0,-2,2) \end{matrix}\right\}\sin X \qquad \left.\begin{matrix} -\beta_3 b'_{0,3} & \sin(0,1,-2,2) \\ -\beta_4 b'_{-1,4} & \sin(-1,2,-2,2) \\ -\beta_2 b'_{1,2} & \sin(1,0,-2,2) \end{matrix}\right\}\cos X$$

$$\left.\begin{matrix} +\beta_4 b_{0,4} & \cos(0,2,-2,2) \\ +\beta_5 b_{-1,5} & \cos(-1,3,-2,2) \\ +\beta_3 b_{1,3} & \cos(1,1,-2,2) \end{matrix}\right\}\sin X \qquad \left.\begin{matrix} -\beta_4 b'_{0,4} & \sin(0,2,-2,2) \\ -\beta_5 b'_{-1,5} & \sin(-1,3,-2,2) \\ -\beta_3 b'_{1,3} & \sin(1,1,-2,2) \end{matrix}\right\}\cos X$$

$$\left.\begin{matrix} +\beta_5 b_{0,5} & \cos(0,3,-2,2) \\ +\beta_6 b_{-1,6} & \cos(-1,4,-2,2) \\ +\beta_4 b_{1,4} & \cos(1,2,-2,2) \end{matrix}\right\}\sin X \qquad \left.\begin{matrix} -\beta_5 b'_{0,5} & \sin(0,3,-2,2) \\ -\beta_6 b'_{-1,6} & \sin(-1,4,-2,2) \\ -\beta_4 b'_{1,4} & \sin(1,2,-2,2) \end{matrix}\right\}\cos X$$

wo zufolge der in der ersten Abhandlung enthaltenen Erklärungen die mit η_2 und η_3 multiplicirten Glieder weggelassen werden mussten. Sei endlich

$$(1)Z+(2)V'+(3)\Pi'+(4)\frac{dV'}{ndt}+(6)\Delta P+(7)\Delta Q+\Delta' T =$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha_0 \\ +\alpha_1\cos(\gamma-g) \end{matrix}\right\}\sin X \qquad +\alpha'_1\sin(\gamma-g)\cos X$$

$$\left.\begin{matrix} +\varepsilon_1\cos g \\ +\varepsilon_2\cos(-\gamma+2g) \\ +\varepsilon_3\cos\gamma \end{matrix}\right\}\sin X \qquad \left.\begin{matrix} +\varepsilon'_1\sin g \\ +\varepsilon'_2\sin(-\gamma+2g) \\ +\varepsilon'_3\sin\gamma \end{matrix}\right\}\cos X$$

$$\left.\begin{matrix} +\alpha_{0,3} & \cos(0,1,-2,2) \\ +\alpha_{-1,4} & \cos(-1,2,-2,2) \\ +\alpha_{1,2} & \cos(1,0,-2,2) \end{matrix}\right\}\sin X \qquad \left.\begin{matrix} +\alpha'_{0,3} & \sin(0,1,-2,2) \\ +\alpha'_{-1,4} & \sin(-1,2,-2,2) \\ +\alpha'_{1,2} & \sin(1,0,-2,2) \end{matrix}\right\}\cos X$$

$$\left.\begin{matrix} +\alpha_{0,4} & \cos(0,2,-2,2) \\ +\alpha_{-1,5} & \cos(-1,3,-2,2) \\ +\alpha_{1,3} & \cos(1,1,-2,2) \end{matrix}\right\}\sin X \qquad \left.\begin{matrix} +\alpha'_{0,4} & \sin(0,2,-2,2) \\ +\alpha'_{-1,5} & \sin(-1,3,-2,2) \\ +\alpha'_{1,3} & \sin(1,1,-2,2) \end{matrix}\right\}\cos X$$

$$\left.\begin{matrix} +\alpha_{0,5} & \cos(0,3,-2,2) \\ +\alpha_{-1,6} & \cos(-1,4,-2,2) \\ +\alpha_{1,4} & \cos(1,2,-2,2) \end{matrix}\right\}\sin X \qquad \left.\begin{matrix} +\alpha'_{0,5} & \sin(0,3,-2,2) \\ +\alpha'_{-1,6} & \sin(-1,4,-2,2) \\ +\alpha'_{1,4} & \sin(1,2,-2,2) \end{matrix}\right\}\cos X$$

Digitized by Google

Die Coefficienten dieses Ausdrucks sind bekannte Grössen. Hiemit ist Alles gegeben, was zur Erfüllung der Gleichung (67), nemlich

$$\frac{d.\Delta W_0}{ndt} = (1)\,n\Delta z + (2)\,\Delta\nu + (3)\,\Delta\frac{h_0}{h} + (4)\frac{d.\Delta r}{ndt} + (6)\,\Delta P + (7)\,\Delta Q + \Delta' T$$

erforderlich ist, und wenn man mit Rücksicht auf die im Art. 201 gegebenen numerischen Werthe der Coefficienten (1), (2), etc. die Substitutionen ausführt, und wieder die verschiedenartigen Glieder, jedes für sich, gleich Null setzt, so ergeben sich die in der anliegenden Tafel 2 aufgestellten Gleichungen. Diese sind indess in allen ihren Theilen, so wie sie dort aufgestellt sind, nicht unmittelbar erhalten worden, denn da in der vorstehenden Gleichung die Glieder $(2)\,\Delta\nu$ und $(4)\frac{d.\Delta r}{ndt}$ vorkommen, so ist ursprünglich in jeder Gleichung dieser Tafel jeder der l Coefficienten zwei Mal enthalten, und nachher ist jedes Paar solcher Glieder in Ein Glied zusammen gezogen worden.

224.

Aus den Gleichungen der Tafel 2 sind jetzt die Ausdrücke der mit c, d, e bezeichneten Coefficienten zu berechnen, und damit diese Grössen aus den Gleichungen der Tafel 1 zu eliminiren. Die Relationen zwischen den c, d, e einestheils und den b andertheils ergeben sich aus der Vergleichung der im Vorhergehenden aufgestellten Ausdrücke für ΔW_0, $(\overline{\Delta W_0})$, etc. wie folgt,

$$\begin{aligned}
c_1 &= f_1 + f_2 + \eta_2 b_1\\
c_3 &= b_{0,3} + b_{-1,4} + \eta_2 b_{-1,5} + b_{1,2}\\
c_4 &= b_{0,4} + b_{-1,5} + \eta_2 b_{-1,6} + b_{1,3} + \eta_2 b_{1,2}\\
c_5 &= b_{0,5} + b_{-1,6} + b_{1,4} + \eta_2 b_{1,3} + \eta_3 b_{1,2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_0 &= b_1 - 2\eta_2 f_2\\
d_1 &= -f_2 + 2\eta_2 b_1\\
d_3 &= -b_{-1,4} - 2\eta_2 b_{-1,5} + b_{1,2}\\
d_4 &= -b_{-1,5} - 2\eta_2 b_{-1,6} + b_{1,3} + 2\eta_2 b_{1,2}\\
d_5 &= -b_{-1,6} + b_{1,4} + 2\eta_2 b_{1,3} + 3\eta_3 b_{1,2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_1 &= f_2 + 4\eta_2 b_1\\
e_3 &= b_{-1,4} + 4\eta_2 b_{-1,5} + b_{1,2}\\
e_4 &= b_{-1,5} + 4\eta_2 b_{-1,6} + b_{1,3} + 4\eta_2 b_{1,2}\\
e_5 &= b_{-1,6} + b_{1,4} + 4\eta_2 b_{1,3} + 9\eta_3 b_{1,2}
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$c'_0 = b'_1 + \eta_2 f'_2$$
$$c'_1 = f'_1 + f'_2 + \eta_2 b'_1$$
$$c'_3 = b'_{0,3} + b'_{-1,4} + \eta_2 b'_{-1,5} + b'_{1,2}$$
$$c'_4 = b'_{0,4} + b'_{-1,5} + \eta_2 b'_{-1,6} + b'_{1,3} + \eta_2 b'_{1,2}$$
$$c'_5 = b'_{0,5} + b'_{-1,6} + b'_{1,4} + \eta_2 b'_{1,3} + \eta_3 b'_{1,2}$$

$$d'_1 = f'_2 - 2\eta_2 b'_1$$
$$d'_3 = b'_{-1,4} + 2\eta_2 b'_{-1,5} - b'_{1,2}$$
$$d'_4 = b'_{-1,5} + 2\eta_2 b'_{-1,6} - b'_{1,3} - 2\eta_2 b'_{1,2}$$
$$d'_5 = b'_{-1,6} - b'_{1,4} - 2\eta_2 b'_{1,3} - 3\eta_3 b'_{1,2}$$

$$e'_0 = b'_1 + 4\eta_2 f'_2$$
$$e'_1 = f'_2 + 4\eta_2 b'_1$$
$$e'_3 = b'_{-1,4} + 4\eta_2 b'_{-1,5} + b'_{1,2}$$
$$e'_4 = b'_{-1,5} + 4\eta_2 b'_{-1,6} + b'_{1,3} + 4\eta_2 b'_{1,2}$$
$$e'_5 = b'_{-1,6} + b'_{1,4} + 4\eta_2 b'_{1,3} + 9\eta_3 b'_{1,2}$$

Vermittelst dieser Gleichungen sind durch eine geringe Arbeit die Gleichungen der Tafel 3 aus denen der Tafel 2 entstanden, und es ist in denselben zur Abkürzung für die völlig bekannten Glieder die folgende Bezeichnung eingeführt worden.

$$q_1 = \varepsilon_1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon_2 - \eta_2 \alpha_1 \qquad + \varkappa_1$$
$$q_3 = \frac{\alpha_{0,3}}{\beta_3} + \frac{\alpha_{-1,4}}{\beta_4} + \eta_2 \frac{\alpha_{-1,3}}{\beta_3} + \frac{\alpha_{1,2}}{\beta_3} \qquad + \varkappa_3$$
$$q_4 = \frac{\alpha_{0,4}}{\beta_4} + \frac{\alpha_{-1,5}}{\beta_5} + \eta_2 \frac{\alpha_{-1,4}}{\beta_4} + \frac{\alpha_{1,3}}{\beta_3} + \eta_2 \frac{\alpha_{1,2}}{\beta_3} + \varkappa_4$$
$$q_5 = \frac{\alpha_{0,5}}{\beta_5} + \frac{\alpha_{-1,6}}{\beta_6} + \frac{\alpha_{1,4}}{\beta_4} + \eta_2 \frac{\alpha_{1,3}}{\beta_3} + \eta_3 \frac{\alpha_{1,2}}{\beta_3} + \varkappa_5$$

$$r_0 = -\alpha_1 - 2\eta_2 \frac{\varepsilon_2}{2} \qquad + \lambda_0$$
$$r_1 = -\frac{\varepsilon_2}{2} - 2\eta_2 \alpha_1 \qquad + \lambda_1$$
$$r_3 = -\frac{\alpha_{-1,3}}{\beta_4} - 2\eta_2 \frac{\alpha_{-1,2}}{\beta_3} + \frac{\alpha_{1,2}}{\beta_3} \qquad + \lambda_3$$
$$r_4 = -\frac{\alpha_{-1,4}}{\beta_4} - 2\eta_2 \frac{\alpha_{-1,3}}{\beta_4} + \frac{\alpha_{1,3}}{\beta_3} + 2\eta_2 \frac{\alpha_{1,2}}{\beta_3} + \lambda_4$$
$$r_5 = -\frac{\alpha_{-1,5}}{\beta_5} + \frac{\alpha_{1,4}}{\beta_4} + 2\eta_2 \frac{\alpha_{1,3}}{\beta_3} + 3\eta_3 \frac{\alpha_{1,2}}{\beta_3} + \lambda_5$$

$$s_1 = \frac{\varepsilon_2}{2} - 4\eta_2 \alpha_1$$
$$s_3 = \frac{\alpha_{-1,3}}{\beta_4} + 4\eta_2 \frac{\alpha_{-1,2}}{\beta_4} + \frac{\alpha_{1,2}}{\beta_3}$$
$$s_4 = \frac{\alpha_{-1,4}}{\beta_4} + 4\eta_2 \frac{\alpha_{-1,3}}{\beta_4} + \frac{\alpha_{1,3}}{\beta_3} + 4\eta_2 \frac{\alpha_{1,2}}{\beta_3}$$
$$s_5 = \frac{\alpha_{-1,5}}{\beta_4} + \frac{\alpha_{1,4}}{\beta_4} + 4\eta_4 \frac{\alpha_{1,3}}{\beta_3} + 9\eta_3 \frac{\alpha_{1,2}}{\beta_3}$$

Digitized by Google

$$q'_0 = \alpha'_1 - \eta_2 \frac{\varepsilon'_2}{2} \qquad + x'_0$$

$$q'_1 = -\varepsilon'_1 - \frac{\varepsilon'_2}{2} + \eta_2 \alpha'_1 \qquad + x'_1$$

$$q'_3 = -\frac{\alpha'_{0+2}}{\beta_3} - \frac{\alpha'_{-1+2}}{\beta_4} - \eta_2 \frac{\alpha'_{-1+3}}{\beta_3} - \frac{\alpha'_{1+2}}{\beta_2} \qquad + x'_3$$

$$q'_4 = -\frac{\alpha'_{0+3}}{\beta_3} - \frac{\alpha'_{-1+3}}{\beta_3} - \eta_2 \frac{\alpha'_{-1+4}}{\beta_3} - \frac{\alpha'_{1+3}}{\beta_2} - \eta_2 \frac{\alpha'_{1+2}}{\beta_2} + x'_4$$

$$q'_5 = -\frac{\alpha'_{0+4}}{\beta_3} - \frac{\alpha'_{-1+4}}{\beta_4} - \frac{\alpha'_{1+3}}{\beta_4} - \eta_2 \frac{\alpha'_{1+4}}{\beta_2} - \eta_3 \frac{\alpha'_{1+2}}{\beta_2} + x'_5$$

$$r'_1 = -\frac{\varepsilon'_2}{2} - 2\eta_2 \alpha'_1 \qquad + \lambda'_1$$

$$r'_3 = -\frac{\alpha'_{-1+2}}{\beta_4} - 2\eta_2 \frac{\alpha'_{-1+3}}{\beta_3} + \frac{\alpha'_{1+2}}{\beta_2} \qquad + \lambda'_3$$

$$r'_4 = -\frac{\alpha'_{-1+3}}{\beta_3} - 2\eta_2 \frac{\alpha'_{-1+4}}{\beta_3} + \frac{\alpha'_{1+3}}{\beta_2} + 2\eta_2 \frac{\alpha'_{1+2}}{\beta_2} + \lambda'_4$$

$$r'_5 = -\frac{\alpha'_{-1+4}}{\beta_4} + \frac{\alpha'_{1+4}}{\beta_4} + 2\eta_2 \frac{\alpha'_{1+3}}{\beta_2} + 3\eta_3 \frac{\alpha'_{1+2}}{\beta_2} + \lambda'_5$$

$$s'_0 = \alpha'_1 - 4\eta_2 \frac{\varepsilon'_2}{2}$$

$$s'_1 = -\frac{\varepsilon'_2}{2} + 4\eta_2 \alpha'_1$$

$$s'_3 = -\frac{\alpha'_{-1+2}}{\beta_4} - 4\eta_2 \frac{\alpha'_{-1+3}}{\beta_3} - \frac{\alpha'_{1+2}}{\beta_2}$$

$$s'_4 = -\frac{\alpha'_{-1+3}}{\beta_3} - 4\eta_2 \frac{\alpha'_{-1+4}}{\beta_3} - \frac{\alpha'_{1+3}}{\beta_2} - 4\eta_2 \frac{\alpha'_{1+2}}{\beta_2}$$

$$s'_5 = -\frac{\alpha'_{-1+4}}{\beta_4} - \frac{\alpha'_{1+3}}{\beta_4} - 4\eta_2 \frac{\alpha'_{1+3}}{\beta_2} - 9\eta_3 \frac{\alpha'_{1+2}}{\beta_2}$$

Diese Grössen sind sehr leicht zu berechnen, ohne dass man Fehler zu befürchten braucht. Nachdem die α und ε Coefficienten berechnet, und in der oben angegebenen Reihenfolge nebst ihren Argumenten und mit den Sinus- oder bez. Cosinuszeichen versehen zusammen gestellt worden sind, dividirt man mit den bezüglichen Integrationsdivisoren, multiplicirt darauf mit η_2 und η_3, und stellt alle Glieder in derselben Reihenfolge auf, wie es im Vorhergehenden bei W_0 gemacht worden ist. Ausserdem verwandelt man die Sinuszeichen in Cosinuszeichen und umgekehrt, und wechselt bei den α' und ε' auch die algebraischen Zeichen um. Verwandelt man hierauf γ in g, und addirt die betreffenden Glieder, so bekommt man die $q - x$ und die $q' - x'$, worauf durch Addition der x und x' die q und q' hervor gehen. Differentiirt man hierauf nach γ, verwandelt wieder γ in g und addirt, so bekommt man die $r - \lambda$ und die $r' - \lambda'$, worauf durch Addition der λ und λ' die r und r' entstehen. Differentiirt man nochmals nach γ, verwandelt wieder γ in g und addirt, so ergeben sich ohne Weiteres die s und s', jedoch mit

Digitized by Google

entgegengesetzten Zeichen, und es sind folglich hier alle Zeichen umzuwechseln.

Zur Vervollständigung führe ich aus dem § 6 die Werthe der hier erforderlichen β und η an.

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= -\ 0{,}1338298\\
\beta_3 &= +\ 0{,}8661702\\
\beta_4 &=\ \ 1{,}866170\\
\beta_5 &=\ \ 2{,}866170\\
\beta_6 &=\ \ 3{,}866170\\
\log \eta_2 &=\ \ 8{,}4382213\\
\log \eta_3 &=\ \ 8{,}0525\,4
\end{aligned}$$

225.

Es sind hierauf die Ausdrücke der mit c, d, e bezeichneten Grössen der Tafel 3 in die Gleichungen der Tafel 1 substituirt worden, wodurch sich die Gleichungen der Tafel 4 ergeben haben. Diese Gleichungen sind in drei Gruppen eingetheilt worden. Die erste dieser besteht aus 12 linearischen Gleichungen, die die 12 Unbekannten k_1, k_3, etc. bis m_5 enthalten, durch die Auflösung dieser Gleichungen kann man also diese Unbekannten in Function der 12 mit t_1, t_3 etc. bis ν_5 bezeichneten Grössen darstellen. Die zweite Gruppe ist der ersten völlig ähnlich, und giebt die 12 Unbekannten k'_1, k'_3, etc. bis m'_5 in Function der 12 Grössen t'_1, t'_3, etc. bis ν'_5. Die dritte Gruppe enthält die 6 Gleichungen, aus welchen die Coefficienten a_0, a_2, a_1, a_2, a_4, b_0 hervor gehen, deren Ausdrücke den kleinen Divisor x bekommen. Von diesen sind die beiden ersten blos von den k'_1, etc., und die andern vier blos von den k_1, etc. abhängig, mit Ausnahme der Glieder jedoch, die von den a selbst abhängen.

Ich mache auf eine kleine Uebergehung aufmerksam, die ich mir hier erlaubt habe. In den Ausdrücken der t und t' müssten in den letzten Gliedern der Strenge nach die Coefficienten $r_0 - \lambda_0$, $r_1 - \lambda_1$, etc. $r'_1 - \lambda'_1$, $r'_3 - \lambda'_3$, etc. angesetzt werden, während ich blos r_0, r_1, etc. r'_1, r'_3, etc. angesetzt habe, wie in der ersten Gleichung der dritten Gruppe geschehen ist. Da diese Glieder überhaupt nur geringen Einfluss auf das Resultat äussern, und gemeiniglich die λ weit kleiner sind wie die r, so kann im Allgemeinen hieraus kein Nachtheil entstehen,

Digitized by Google

und sollte in einem besonderen Falle ein solcher zu befürchten sein, so lassen sich die ausgelassenen Glieder sehr leicht ergänzen.

226.

Die unbestimmte Auflösung der beiden ersten Systeme von Gleichungen der Tafel 4, oder mit anderen Worten die Darstellung der Coefficienten k, l, m in Function der t, u, v giebt die Tafel 5. Ich habe hiebei nichts weiter zu bemerken, als dass ich diese direct, und zwar durch die Methode ausgeführt habe, die ich in den Schriften dieser Gesellschaft gegeben habe.*) Durch diese Methode habe ich verschiedene Male noch grössere Systeme von Gleichungen, wie die hier vorkommenden, mit Leichtigkeit direct aufgelöst.

In der Tafel 5 sind alle numerische Coefficienten in Theilen des Kreisradius ausgedrückt worden, und statt der Zahlen selbst die Logarithmen derselben angesetzt.

Die Grössen t, u, v sind nach Ausweis der Tafel 4 Functionen theils der bekannten Grössen q, r, s, p, theils der Unbekannten a. Substituirt man die Ausdrücke für die t, u, v in die Gleichungen der Tafel 5, so werden die Grössen k, l, m Functionen derselben, ebengenannten Grössen. Das Resultat dieser Substitution giebt die Tafel 6, und damit sind die Ausdrücke der k, l, m so weit entwickelt, wie bei unbestimmt gelassenem x möglich ist. Substituirt man endlich die Ausdrücke der Tafel 6 in die dritte Gruppe von Gleichungen der Tafel 4, so bekommt man die folgenden allgemeinen Endgleichungen,

$$
\begin{aligned}
0 &= x b_0 - (4{,}3281)\,a_0 + (6{,}0875)\,x a_1 + (4{,}339)\,a_2 + A\\
0 &= b_0 - x a_0 - (7{,}3727)\,a_1 - (8{,}5302)\,a_2 - (7{,}3925)\,a_4 + B\\
0 &= -(4{,}309)\,a_0 - (0{,}304720)\,x a_1 + (5{,}7501)\,a_3 + C\\
0 &= +(3{,}987)\,a_0 - (4{,}385)\,x a_1 + x a_2 - (3{,}686)\,a_3 + D\\
0 &= + (7{,}1236)\,a_1 + (6{,}3068)\,a_2 - x a_3 - (5{,}650)\,a_4 + E\\
0 &= -(3{,}832)\,a_0 - (7{,}1387)\,x a_1 + (5{,}288)\,a_2 + x a_4 + F
\end{aligned}
$$

deren völlig bekannten Glieder A, B, etc. in der Tafel 7 zusammen gestellt sind. Hier sind wieder die Logarithmen der in Theilen des Kreisradius ausgedrückten numerischen Coefficienten angesetzt.

Wenn es sich nun um die Berechnung einer Ungleichheit von sehr langer Periode handelt, so sind zuerst die numerischen Werthe von

*) S. Abhandl. der Königl. S. G. d. W. B. I. p. 83 u. f.

Digitized by Google

q_1, q_2, etc, q'_1, q'_3, etc. zu berechnen und in die Ausdrücke für A, B, etc. der Tafel 7 zu substituiren. Hierauf sind die erlangten numerischen Werthe von A, B, etc. nebst dem von x in die vorstehenden Gleichungen zu setzen, und diese aufzulösen, wodurch die Coefficienten der Ungleichheiten langer Periode erlangt werden. Will man auch die Coefficienten der übrigen, hier mit unbestimmten Coefficienten eingeführten Ungleichheiten kennen lernen, so braucht man nur die numerischen Werthe aller jetzt bekannten Grössen in die Gleichungen der Tafel 6 zu substituiren.

In den Fällen, in welchen ausser den hier mit unbestimmten Coefficienten eingeführten Gliedern keine anderen merklichen Einfluss auf das Resultat haben können, ist das hier erklärte Verfahren direct, und giebt sogleich die genauen Werthe der Unbekannten. Wenn aber auch andere Störungsglieder von Einfluss sind, und mithin die mit Z', V', H', etc. bezeichneten Grössen in Betracht zu ziehen sind, ist das Verfahren nicht mehr direct, sondern giebt bei der ersten Anwendung desselben nur genäherte Werthe der Unbekannten. Dieser Umstand rührt daher, dass man zuerst die Grössen Z', V', H', etc. nicht völlig genau erhalten kann, indem die Unbekannten auf diese Einfluss haben. Mit den zuerst erhaltenen genäherten Werthen der Unbekannten kann man aber die ersten Werthe von Z', V', H', etc. verbessern, und damit genauere Werthe der Unbekannten erhalten. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens kann man schliesslich die Unbekannten mit aller wünschenswerthen Genauigkeit erhalten.

227.

Die eben erhaltenen Gleichungen zeigen, dass im schliesslichen Ausdruck von a_0 die Grösse A mit x^3 dividirt erscheinen wird, ohne dass im Zähler kleine Factoren eintreten, während die anderen bekannten Grössen nur den Divisor x erhalten. Aus diesem Grunde muss aber A mit grösserer Genauigkeit, oder mit einer grösseren Anzahl von Decimalen berechnet werden, wie die übrigen bekannten Grössen. Wenn x sehr klein ist, so kann es mit Schwierigkeiten verbunden sein, A mit der erforderlichen Genauigkeit zu erhalten, denn kleine Fehler in den Grössen q_1, q_3, etc. gehen sehr vergrössert in den Werth von a_0 über. Dieses ist vorzugsweise der Fall, wenn Z', V', H', etc. in Betracht kommen, und man sich bei der ersten Rechnung mit genäherten Werthen dieser Grössen begnügen muss. Es kann sich in diesem Falle er-

Digitized by Google

eignen, dass die erste Rechnung einen Werth von a_0 giebt, welcher sich weit vom wahren Werthe entfernt. Man vermindert diesen Uebelstand sehr, und entfernt ihn oft gänzlich, wenn man sich hier wie im Vorhergehenden der Gleichungen (74) und (75) bedient, um die Gleichung für b_0 zu erhalten, denn hier tritt wie man gesehen hat in den Gliedern, die x^2 im Nenner bekommen, in dem Zähler der kleine Factor u ein, und vermindert die Wirkung der Fehler in Z', V', Π', etc. wenigstens 13 Mal.

Um die erwähnte Gleichung für b_0 zu bekommen, brauchen wir ausser den oben aufgestellten Ausdrücken für $n\Delta z$, Δv, etc. auch die für ΔfT und $\Delta f''\Psi$. Diese erhalten wir aus dem Ausdruck für ΔW_0 des Art. 223, und durch die betreffenden Formeln des Art. 90. Durch die dortige Analyse ergiebt sich leicht, dass

$$\begin{aligned}\Delta fT &= (\ \Delta\Pi_{-1} + \Delta\Pi_1)\sin(n\beta t+\theta)\sin X\\ &\quad +(\ \Delta\Pi'_{-1} + \Delta\Pi'_1)\cos(n\beta t+\theta)\cos X\\ \Delta f''\Psi &= (-\Delta\Pi_{-1} + \Delta\Pi_1)\cos(n\beta t+\theta)\sin X\\ &\quad +(\ \Delta\Pi'_{-1} - \Delta\Pi'_1)\sin(n\beta t+\theta)\cos X\end{aligned}$$

wo $\Delta\Pi_{-1}$, etc. so zu verstehen sind, dass abgesehen von den Gliedern, die kein γ enthalten,

$$\left.\begin{aligned}\Delta W_0 = \Delta\Pi_{-1}&\sin(-\gamma+n\beta t+\theta)\\ +\Delta\Pi_1&\sin(\ \gamma+n\beta t+\theta)\end{aligned}\right\}\sin X$$
$$\left.\begin{aligned}+\Delta\Pi'_{-1}&\cos(-\gamma+n\beta t+\theta)\\ +\Delta\Pi'_1&\cos(\ \gamma+n\beta t+\theta)\end{aligned}\right\}\cos X$$

wird. Die Anwendung dieser Ausdrücke auf den Ausdruck von ΔW_0 des Art. 223 giebt mit bloser Rücksicht auf die mit $\cos X$ multiplicirten Glieder, da die mit $\sin X$ multiplicirten hier nicht gebraucht werden.

$$\left.\begin{aligned}\Delta fT = \quad & a_4\\ &+b'_1\cos g\\ &+f'_2\cos 2g\\ &+b'_{1,2}\cos(0,-2,2)\\ &+b'_{1,3}\cos(1,-2,2)\\ &+(b'_{1,4}+b'_{-1,4})\cos(2,-2,2)\\ &+b'_{-1,5}\cos(3,-2,2)\\ &+b'_{-1,6}\cos(4,-2,2)\\ &+fT'\end{aligned}\right\}\cos X$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} \Delta f'\Psi' = \quad & b'_1 \sin g \\ & + f'_2 \sin 2g \\ & - b'_{1,2} \sin (0,-2,2) \\ & - b'_{1,3} \sin (1,-2,2) \\ & + (-b'_{1,4} + b'_{-1,4}) \sin (2,-2,2) \\ & + b'_{-1,5} \sin (3,-2,2) \\ & + b'_{-1,6} \sin (4,-2,2) \\ & + f''\Psi' \end{aligned}\right\} \cos X$$

wo $f\Upsilon$ und $f'\Psi'$ die Summen der nicht mit unbestimmten Coefficienten versehenen Glieder bedeuten.

228.

Nimmt man nun die Gleichungen (74) und (75), nemlich

$$\begin{aligned} \Delta\Xi = {} & u.\Delta Z + (27)\Delta\tfrac{h_0}{h} + (28)\Delta f\Upsilon + (29)\Delta f'\Psi \\ & + (30)n.\Delta z + (31)\Delta v + (32)\Delta P + (33)\Delta Q \\ & - 3.\Delta' a\Omega \\ \tfrac{d.\Delta Z}{ndt} = {} & (34)n.\Delta z + (35)\Delta v + (36)\Delta P + (37)\Delta Q \\ & + 3.\Delta\left(\tfrac{da\Omega}{dg'}\right) \end{aligned}$$

wo ich Z statt X geschrieben habe, weil X hier eine andere Bedeutung hat, vor, und setzt

$$\begin{aligned} & (27)H' + (28)f\Upsilon + (29)f''\Psi' + (30)Z' \\ + {} & (31)V' + (32)\Delta P + (33)\Delta Q - 3.\Delta' a\Omega = \lambda_0 \cos X \\ & (34)Z' + (35)V' + (36)\Delta P + (37)\Delta Q \\ + {} & 3.\Delta\left(\tfrac{da\Omega}{dg'}\right) = \mu_0 \sin X \end{aligned}$$

indem von diesen Gleichungen blos das mit cos X und bez. sin X multiplicirte Glied berechnet werden soll, substituirt mit Rücksichtnahme auf die in den Artt. 208 und 211 gegebenen, numerischen Werthe der Coefficienten, und setzt wie vorher

$$\Delta\Xi = b_0 \cos X$$

und ausserdem

$$\Delta Z = \theta_0 \cos X$$

so bekommt man unmittelbar die beiden ersten Gleichungen der Tafel 8. Die Grössen b'_1, f'_2, etc., die in der ersten dieser beiden Gleichungen enthalten sind, hätten in Function von k'_1, k'_2, etc. ausgedrückt

Digitized by Google

und eliminirt werden können, da im Art. 186 die Relationen zwischen ΔY und $\Delta\Psi$ einerseits, und $n\Delta z$, etc. andernseits entwickelt worden sind; da aber diese Elimination auf Weitläufigkeiten geführt hätte, und die Gleichung auch ohne dieselbe eine bequeme Anwendung darbietet, so habe ich die Ausführung dieser Elimination unterlassen.

Durch Hülfe der Gleichungen der Tafel 2 für b'_1, f'_2, etc. sind diese Grössen anderweitig eliminirt worden, und das Resultat dieser Elimination giebt die dritte Gleichung der Tafel 8, in welcher die in Klammern eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen der in Theilen des Kreisradius ausgedrückten Coefficienten sind.

Eliminirt man ferner aus den beiden letzten Gleichungen derselben Tafel die k, l, m durch die Gleichungen der Tafel 6, und substituirt den dadurch erhaltenen Ausdruck für b_0 in die zweite Gleichung des Art. 226, so ergeben sich die beiden folgenden Endgleichungen,

$$0 = x\theta_0 - (4{,}7214)\,a_0 + (4{,}948)\,xa_1 \qquad + (4{,}589)\,a_3 \qquad + A'$$
$$0 = u\theta_0 \qquad - xa_0 - (7{,}97133)\,a_1 - (8{,}01970)\,a_2 \qquad - (7{,}3925)\,a_4 + B'$$

deren völlig bekannten Glieder A' und B' in der Tafel 9 aufgestellt, und wieder die Logarithmen der in Theilen des Kreisradius ausgedrückten, numerischen Coefficienten angesetzt sind.

Aus dem Art. 52 führe ich an, dass

$$\log u = 8{,}8775917$$

ist. Die beiden obigen Gleichungen vertreten die Stelle der ersten und zweiten Gleichung des Art. 226, und wenn man jene anwendet, so sind die andern strenge genommen überflüssig, geben jedoch eine Controlle der Rechnung.

§ 18. Berechnung der Mondstörungen, die den Abtheilungen 3, 4, 5, 12, 13, 16, 17 angehören.

229.

Die in der Ueberschrift genannten Störungen hängen theils von sich selbst, theils von denen der Abtheilungen 1, 2, 11, 15 ab. Die Quadrate und Producte dieser Störungen unter einander geben, mit Ausnahme der Abtheilung 5 andere Argumente, und erst bei den Cuben entstehen dieselben Argumente wieder. Die Coefficienten derselben sind so klein, dass nicht ein Mal die Quadrate, viel weniger die Cuben

Digitized by Google

$5l_3$	$-2071''8l_4$		$+c_1$	$+x_1$
3	$+113,0$		$+c_2$	$+x_2$
9	$-2786,8$		$+c_3$	$+x_3$
2	$+46,0$		$+c_4$	$+x_4$
			$+c_5$	$+x_5$
$5l_3$	$-4,1l_4$		$+d_0$	$+\lambda_0$
2	$-4,4$		$+d_1$	$+\lambda_1$
0	$-96,8$		$+d_2$	$+\lambda_2$
8	$0,0$		$+d_3$	$+\lambda_3$
7	$+96,8$		$+d_4$	$+\lambda_4$
			$+d_5$	$+\lambda_5$
$1l_3$	$-1729,4l_4$		$+p_0$	
2	$+192,2$		$+p_1$	
3	$+24,7$		$+p_2$	
4	$-14,2$		$+p_3$	
8	$-31,4$		$+p_4$	
			$+p_5$	
$,5l'_3$	$-1570,3l'_4$	$+30''0d'_5$	$+c'_0+b_0$	$+x'_0$
4	$-2244,2$	$+1073,6$	$+c'_1$	$+x'_1$
2	$-26,0$	$+3,0$	$+c'_2$	$+x'_2$
0	$-2844,6$	$+0,4$	$+c'_4$	$+x'_4$
6	$+40,9$	—	$+c'_5$	$+x'_5$
$,0l'_3$	$-0,1l'_4$	$+1071,5e'_5$	$+d'_1$	$+\lambda'_1$
0	$+96,8$	$-7,6$	$+d'_2$	$+\lambda'_2$
8	—	$-0,4$	$+d'_4$	$+\lambda'_4$
7	$-96,8$	—	$+d'_5$	$+\lambda'_5$
			$+p'_1$	
$,6l'_3$	$-382,0l'_4$		$+p'_2$	
3	$-78,4$		$+p'_4$	
7	$-14,2$		$+p'_5$	
6	$+48,4$			

	$-578''31l_3$
	$+600,9$
	$+5221,6$
	$-1763,6$
	$-3494,3$
	$-24,3$
	$-326,6$
	$-2746,4$
	$+269,3$
	$-80,8$
	$-5,3$
	$+43,3$
	$-25,7$
	$-8,3$
	$+115,7\,l'_3$
	$+5203,3$
	$-1757,3$
	$-3466,9$
	$+47,2$
	$+336,0$
	$+2744,5$
	$-82,1$
	$-20,2$
	$-64,4$
	$+20,5$
	$-15,9$
	$-5,1$

Digitized by Google

Digitized by Google

(8,1898)	u
(8,72146)	
(7,0835)	
(6,1565)	
(7,0766)	
(9,73723)	
(6,9557)	
(5,941)	
(7,6208)	
(6,1773)	
(6,0461)	
(5,408)	
(8,1986)	t
(8,71865)	
(6,9228)	
(5,970)	
(7,1045)	
(9,73725)	
(6,9403)	
(5,353)	
(7,6136)	
(6,1452)	
(5,483)	
(5,524)	

(7,9329) r	1,242) a_2	+ (7,223) xa_1	− (0,00394) a_2
(8,93171)	8,33791)	− (7,203)	+ (9,30748)
(7,8968)	8,318190)	+ (6,101)	− (8,0762)
(7,4360)	6,9425)	+ (5,163)	− (7,9007)
(9,69854)	6,6568)	+ (6,758)	− (9,69643)
(8,57009)	8,00352)	− (6,936)	+ (8,94070)
(6,8022)	8,166259)	+ (5,385)	− (7,5871)
(6,7794)	7,0019)	+ (4,686)	− (7,5909)
(7,0080)	6,459)	+ (5,288)	− (7,4230)
(7,6914)	7,2049)	− (5,288)	+ (8,1630)
(6,688)	7,95067)	—	+ (6,669)
(7,1505)	6,6822)	—	+ (7,183)
(8,0293) r	7,1275) a_1	+ (6,172) a_2	+ (0,00391) a_3
(8,72431)	8,00732)	− (8,24778)	+ (9,30824)
(6,9601)	7,3168)	− (7,6331)	+ (8,1872)
(5,729)	5,916)	− (6,157)	+ (7,9044)
(7,1088)	6,7234)	+ (6,6746)	− (9,69635)
(9,73712)	8,16383)	+ (7,8821)	− (8,94103)
(6,9477)	7,97189)	+ (7,6014)	− (7,8388)
(4,627)	6,649)	+ (6,309)	− (7,5999)
(7,6127)	6,8482)	+ (6,345)	− (7,4131)
(5,957)	7,5107)	+ (5,101)	− (8,1649)
(5,536)	7,95340)	+ (4,531)	− (6,727)
(5,274)	6,511)	+ (4,385)	+ (7,162)

Digitized by Google

Digitized by Google

Merkliches geben können, und es lässt sich daher bei der Berechnung derselben die Methode des § 15 anwenden.

Zu dem Ende werden im Folgenden die den Abtheilungen 1, 2, 11, 15 angehörigen Störungen mit

$$n\delta z,\ \nu,\ \delta\tfrac{h_0}{h},\ \text{etc.}$$

und die den Abtheilungen 3, 4, etc. angehörigen mit

$$n\Delta z,\ \Delta\nu,\ \Delta\tfrac{h_0}{h},\ \text{etc.}$$

bezeichnet werden. Auf die Störungen von P, Q, K erstreckt sich die letztere Bezeichnung nicht, da diese schon vollständig in der ersten Abhandlung berechnet worden sind. Diese Störungen werden also hier ohne Ausnahme mit

$$\delta P,\ \delta Q,\ \delta K$$

bezeichnet. Die Störungen δK erscheinen nicht unmittelbar, sondern werden eben so wie in der ersten Abhandlung durch δP eliminirt.

230.

Es ist nun zuerst die im Art. 182 mit ΔT bezeichnete Function zu berechnen. Setzt man zu diesem Zwecke

$$\Delta T = T_0 + \left(\tfrac{dT_0}{dg}\right) n\delta z + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{d^2T_0}{dg^2}\right)(n\delta z)^2 + H\delta P + N\delta Q$$
$$\Delta G = G_0 + \left(\tfrac{dG_0}{dg}\right) n\delta z + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{d^2G_0}{dg^2}\right)(n\delta z)^2 + H\delta P + N\delta Q$$
$$\Delta \Sigma = \Sigma_0 + \left(\tfrac{d\Sigma_0}{dg}\right) n\delta z + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{d^2\Sigma_0}{dg^2}\right)(n\delta z)^2 + H\delta P + N\delta Q$$

so wird, ähnlich wie früher, nach (16) und (17) des Art. 43

$$\Delta U = \Delta T - \Delta G - \Delta \Sigma$$

und

$$\Delta T = \Delta T + \Delta G\nu + \Delta U\left\{(1+\nu)^2\left(\tfrac{h}{h_0}\right)^2 - 1\right\} + \Delta \Sigma(2\nu + \nu^2)$$

Da in diesen Ausdrücken nur die Glieder aufzunehmen sind, die den Abtheilungen 3, 4, etc. angehören, so sind von T_0, G_0, Σ_0 nur die Glieder aufzunehmen, die den Abtheilungen 3 und 4 angehören. Die Abtheilung 5 hat zu kleine Coefficienten, als dass sie Merkliches geben könnte. Die Producte $H\delta P$ und $N\delta Q$, die hier vorkommen, sind die Fortsetzung der in der ersten Abhandlung vorkommenden, eben so benannten Producte, und zwar haben für T die Factoren H und N die Werthe die im Art. 71, für G die Werthe die im Art. 73, und für Σ die

Digitized by Google

Werthe die im Art. 74 angegeben sind. Am angeführten Orte wurden von diesen Producten nur die Glieder angesetzt und gebraucht, die den Abtheilungen 1, 2, 11, 15 angehören, hier werden nur die Glieder gebraucht, die den Abtheilungen 3, 4, 5, etc. angehören, und nur diese sind daher hier anzusetzen.

231.

Nach diesen Erklärungen lasse ich die Producte folgen.*)

γ, g, g'	T_0 sin	T_1 sin	T_2 sin	$H\delta P$ sin	$N\delta Q$ sin
3.					
0,2,2	+0,013	−0,003		+0,001	
	−0,004	+0,001			
	−0,013	+0,001		−0,001	
0,0,1	0	+0,00003	−0,00001	−0,00015	+0,00044
	−0,00148	−0,00047	−0,00003	−0,00027	−0,00057
	−0,00047	+0,00025	+0,00003	+0,00021	+0,00055
0,1,1	−0,044	−0,008		−0,007	+0,002
	+0,029	+0,007		+0,004	−0,001
	+0,04900	+0,00988	+0,00022	+0,00619	−0,00241
0,2,1	+0,532	−0,068		+0,070	−0,014
	−0,476	+0,036		−0,021	+0,003
	−0,534	+0,036		−0,072	+0,016
0,3,1	+0,044	−0,016		+0,006	−0,001
	−0,019	+0,009		−0,003	+0,001
	−0,020	+0,006		−0,003	+0,001
0,−1,0	+0,001	0,000			−0,002
	+0,00073	−0,00001		+0,00031	+0,00177
	0,000	0,000			+0,001
0,0,0	0	−0,00605	+0,00001	−0,00195	+0,00199
	−0,05874	−0,00095	−0,00019	−0,00146	−0,01773
	−0,04872	+0,00340	+0,00002	+0,00266	+0,01690
0,1,0	−1,748	−0,003	−0,005	−0,028	+0,035
	+1,162	+0,077	+0,004	+0,047	−0,010
	+1,94554	+0,07880	+0,00125	+0,03943	−0,05924
0,2,0	+21,102	−0,006	−0,012	+0,546	−0,474
	−6,970	+0,041	+0,009	−0,164	+0,110
	−21,209	+0,037	+0,003	−0,562	+0,548

*) Um Platz zu gewinnen, habe ich in den Ueberschriften gesetzt

$$\left(\frac{dT_0}{dg}\right) n\delta z = T_1, \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2T_0}{dg^2}\right)(n\delta z)^2 = T_2$$

und werde im Folgenden analoge Bezeichnungen anwenden.

Digitized by Google

3.					
0,3,0	+1?739	−0?003	−0?007	+0?024	−0?025
	−0,768	+0,003	+0,006	−0,013	+0,010
	−0,776	+0,001	+0,001	0,000	+0,004
0,1,0	+0,427			+0,002	−0,003
	−0,066			−0,002	+0,002
	−0,037			−0,001	+0,001
0,0,−1	0	−0,00012	+0,00001	−0,00009	+0,00008
	−0,00148	+0,00024	+0,00001	+0,00025	−0,00015
	−0,00047	+0,00007	−0,00002	+0,00018	+0,00025
0,1,−1	−0,044	+0,005		+0,003	+0,002
	+0,029	+0,002		−0,001	−0,001
	+0,04900	−0,00102	−0,00006	−0,00385	−0,00244
0,2,−1	+0,532	+0,068		−0,032	−0,021
	−0,476	−0,030		+0,012	+0,003
	−0,534	−0,031		+0,032	+0,023
0,3,−1	+0,044	+0,019		−0,003	−0,002
	−0,019	−0,011		+0,001	+0,001
	−0,020	−0,008		+0,001	+0,001
0,2,−2	+0,013	+0,003		−0,002	
	−0,004	−0,001		+0,001	
	−0,013	−0,001		+0,001	
4.					
0,0,4	0	−0,0004		−0,0001	−0,0002
	+0,0170	−0,0006		+0,0013	−0,0009
	−0,0170	−0,0006		−0,0012	+0,0012
0,−2,3	+0,001			+0,002	+0,002
	0			−0,002	−0,002
	0,000			−0,001	−0,001
0,−1,3	+0,034	+0,001		0,000	−0,005
	−0,0343	−0,0027	−0,0001	+0,0007	+0,0032
	−0,011	−0,002		−0,001	+0,002
0,0,3	0	−0,0197	+0,0009	−0,0021	−0,0005
	+0,4155	−0,0024	−0,0008	+0,0167	−0,0237
	−0,4155	−0,0006	−0,0001	−0,0144	+0,0256
0,1,3	−0,034	−0,034	+0,002	−0,003	+0,004
	+0,011	+0,016	−0,001	+0,001	−0,001
	+0,0343	+0,0155	−0,0004	+0,0012	−0,0038
0,−3,2	+0,001			+0,002	+0,002
	0,000			−0,001	−0,001
	0,000			−0,001	−0,001
0,−2,2	+0,016			+0,028	+0,026
	0			−0,028	−0,027
	−0,008			−0,009	−0,009
0,−1,2	+0,583	+0,003		−0,023	−0,052
	−0,5828	−0,0084	−0,0004	+0,0234	+0,0456
	−0,194	+0,003		+0,006	+0,022
0,0,2	0	−0,2017	−0,0002	−0,0147	−0,0040
	+7,0688	+0,0847	−0,0009	−0,0212	−0,3669
	−7,0688	+0,1115	+0,0010	+0,0379	+0,3721

Digitized by Google

4.					
0,4,2	−0″583	−0″484		+0″002	+0″049
	+0,194	+0,242		0,000	−0,010
	+0,5828	+0,2380	+0″0005	−0,0057	−0,0499
0,2,2	−0,016	−0,056		+0,006	+0,009
	+0,008	+0,033		−0,002	−0,004
	0	+0,017		−0,006	−0,008
0,−4,1	−0,005			−0,001	0,000
	+0,00490	+0,00109	+0,00001	+0,00469	+0,00030
	+0,002	+0,001		+0,004	0,000
0,0,1	0	−0,00309	−0,00086	+0,00026	−0,00014
	−0,05940	+0,01246	+0,00053	−0,04868	−0,00271
	+0,05940	+0,01300	+0,00026	+0,04827	+0,00173
0,4,4	+0,005	−0,010	−0,002	+0,003	+0,004
	−0,002	+0,007	+0,001	−0,001	−0,001
	−0,00490	+0,00645	+0,00046	−0,00215	−0,00093
0,0,0	0	−0,00009	−0,00002	+0,00006	+0,00004
	0	+0,00008	+0,00003	−0,00013	−0,00005
	0	+0,00008	0,00000	0,00000	+0,00004
5.					
0,0,2	0			+0,0014	−0,0014
	−0,0001			−0,0089	+0,0088
	0,0000			+0,0094	−0,0092
0,4,2	−0,002			+0,041	−0,040
	+0,001			−0,025	+0,026
	+0,0020			−0,0522	+0,0528
0,2,2	+0,021			−0,549	+0,550
	−0,007			+0,166	−0,166
	−0,021			+0,564	−0,566
0,3,2	+0,002			−0,037	+0,037
	−0,001			+0,017	−0,017
	−0,004			+0,012	−0,012
12.					
0,2,−1		−0,001			
		+0,004			
		0,000			
0,3,−1		+0,009	−0,002		
		−0,005	+0,001		
		−0,005	0,000		
0,4,−2		0,000		−0,002	+0,002
		−0,001		+0,002	−0,002
		+0,0003		+0,0022	−0,0024
0,2,−2		−0,023		+0,027	−0,025
		+0,027		−0,011	+0,009
		+0,002		−0,028	+0,026
0,3,−2		+0,448		−0,026	+0,025
		−0,214		+0,009	−0,010
		−0,230		+0,033	−0,033

12.					
0, 4, −2		+0,276		+0,090	−0,093
		−0,142		−0,030	+0,031
		−0,127		−0,096	+0,089
0, 5, −2		+0,039		+0,011	−0,011
		−0,023		−0,005	+0,005
		−0,012		−0,008	+0,008
0, 3, −3		+0,031	+0,002	−0,002	+0,002
		−0,015	−0,001	0,000	0,000
		−0,016	0,000	+0,002	−0,002
0, 4, −3		+0,025	+0,001	+0,008	−0,008
		−0,013	−0,001	−0,002	+0,002
		−0,012	0,000	−0,008	+0,008
13.					
0, 4, −3		0,000		−0,001	−0,001
		0,000		+0,001	+0,001
		−0,0011	−0,0001	+0,0013	+0,0014
0, 2, −3				+0,019	+0,017
				−0,007	−0,006
				−0,017	−0,017
0, 0, −4		−0,0027	−0,0038	+0,0004	+0,0008
		−0,0023	+0,0014	+0,0027	+0,0028
		+0,0017	+0,0044	−0,0008	−0,0014
0, 1, −4		+0,001	−0,005	+0,050	+0,049
		+0,075	+0,001	−0,024	−0,030
		+0,0768	+0,0053	−0,0617	−0,0652
0, 2, −4		−0,005	−0,001	−0,538	−0,549
		+0,040		+0,161	+0,164
		+0,036	+0,001	+0,557	+0,566
0, 3, −4		−0,003		−0,048	−0,050
		+0,003		+0,022	+0,022
		+0,001		+0,024	+0,025
0, 4, −4				−0,003	−0,003
				+0,002	+0,002
				+0,001	+0,001
0, 1, −5		0,000		+0,005	+0,005
		+0,008		−0,003	−0,003
		+0,0077	+0,0003	−0,0059	−0,0061
0, 2, −5		0,000		−0,056	−0,056
		+0,005		+0,016	+0,016
		+0,005		+0,057	+0,057
0, 3, −5				−0,005	−0,005
				+0,002	+0,002
				+0,002	+0,002
16.					
0, 4, −4		+0,003	+0,005		
		−0,002	−0,004		
		−0,002	−0,001		

Digitized by Google

16.					
0,5,−4		+0″,004	+0″,006		
		−0,002	−0,005		
		−0,002	−0,004		
17.					
0,3,−6				−0″,012	−0″,013
				+0,005	+0,006
				+0,007	+0,007
0,4,−6				−0,008	−0,008
				+0,004	+0,004
				+0,004	+0,004

Die Summe der Grössen dieser Tafel giebt $\Delta' \overline{T}$. Ferner ergab sich

γ, g, g'	G_0 sin	G_1 sin	G_2 sin	$H\partial P$ sin	$N\partial Q$ sin
3.					
0,1,1	+0″,029	−0″,002		+0″,004	−0″,001
	0	+0,004			
	+0,029	+0,008		+0,004	−0,001
0,2,1	+0,001				
	0	+0,002		+0,001	−0,003
	−0,356	+0,025		−0,049	+0,013
0,3,1	0				
	0				
	−0,010	+0,004			
0,0,0	−0,096	−0,006		−0,001	+0,004
	−0,005	−0,001		−0,003	−0,018
	−0,005	+0,003		+0,002	+0,017
0,1,0	+1,167	−0,003		+0,030	−0,027
	0	+0,077		−0,006	+0,014
	+1,167	+0,079	+0″,001	+0,024	−0,044
0,2,0	+0,032	−0,006			−0,001
	0	+0,041		+0,015	−0,015
	−14,154	+0,037	+0,002	−0,380	+0,359
0,3,0	+0,001	−0,003		−0,001	+0,003
	0	+0,003			−0,001
	−0,388	+0,004	+0,001	+0,004	−0,001
0,4,0	0				
	0				
	−0,016				
0,1,−1	+0,029	+0,002		−0,001	−0,001
	0	+0,002			
	+0,029	−0,001		−0,004	−0,001
0,2,−1	+0,001				
	0	+0,003		+0,001	−0,003
	−0,356	−0,020		+0,021	+0,017

Digitized by Google

3.					
0,3,−1	0				
	0				
	−0″010	−0″005			
4.					
0,0,4	0				
	+0,017	−0,001			
	−0,017	−0,001			
0,−1,3	+0,034	+0,001		+0″001	−0″001
	−0,034	−0,002		−0,001	+0,002
	−0,011	−0,003		−0,001	
0,0,3	0				
	+0,415	−0,011		+0,015	−0,025
	−0,415	−0,004		−0,017	+0,026
0,1,3	−0,034	+0,001		−0,002	+0,001
	+0,011	−0,002			
	+0,034	+0,010		+0,001	−0 002
0,−2,2	+0,016				
	0			−0,019	−0,019
	−0,008				
0,−1,2	+0,583	−0,006			−0,029
	−0,583			+0,019	+0,040
	−0,194	+0,002		−0,007	+0,009
0,0,2	0	−0,013			
	+7,069	+0,001	−0″001	−0,028	−0,369
	−7,069	+0,075	+0,001	+0,034	+0,372
0,1,2	−0,583	−0,001		+0,002	+0,030
	+0,194			−0,003	−0,001
	+0,583	+0,157		−0,003	−0,046
0,2,2	−0,046				
	+0,008				
	0	+0,008		−0,004	−0,004
0,−1,1	−0,005	−0,001		−0,001	+0,001
	+0,005	+0,001		+0,002	−0,001
	+0,002	+0,002		+0,001	
0,0,1	0				
	−0,059	+0,011		−0,019	−0,004
	+0,059	+0,012		+0,019	+0,003
0,1,1	+0,005	−0,001		+0,002	−0,001
	−0,002	+0,003			
	−0,005	+0,005		−0,002	+0,001
5.					
0,2,2	0				
	0			−0,014	+0,014
	−0,014			+0,379	−0,380
12.					
0,2,−2		+0,013		−0,002	+0,002
		+0,001			
		+0,002		−0,017	+0,017

Digitized by Google

12.					
0,3,−2		+0″,007		+0″,004	−0″,005
		+0,004			
		−0,152		+0,022	−0,021
0,4,−2		0,000			
		0,000			
		−0,082		−0,060	+0,060
0,5,−2		0,000			
		0,000			
		−0,004		−0,003	+0,002
0,3,−3		0,000			
		0,000			
		−0,010		+0,002	
0,4,−3		0,000			
		0,000			
		−0,007		−0,004	+0,005
13.					
0,2,−3				0,000	
				0,000	
				−0,011	−0,011
0,0,−4		−0,006		+0,002	+0,003
		−0,002	+0″,001	+0,002	+0,002
		+0,003		−0,002	−0,002
0,1,−4		−0,003		−0,031	−0,031
		+0,076	+0,001	+0,008	+0,003
		+0,079		−0,040	−0,044
0,2,−4		−0,006			
		+0,041		−0,015	−0,017
		+0,037		+0,377	+0,381
0,3,−4		−0,003		+0,001	+0,001
		+0,003			
		+0,001		+0,013	+0,013
0,1,−5		0,000		−0,003	−0,003
		+0,008			
		+0,008		−0,003	−0,003
0,2,−5		0,000			
		+0,005		−0,002	−0,002
		+0,005		+0,038	+0,038

Die Summen der Grössen dieser Tafel geben $\mathcal{N}\bar{G}$. Ferner

γ, g, g'	Σ_0 sin	Σ_1 sin	Σ_2 sin	$H\delta P$ sin	$N\delta Q$ sin
3.					
2,2	+0″,004	−0″,001			
0,1	+0,00130	+0,00028		+0″,00013	−0″,00005
1,1	−0,029	+0,002		−0,004	+0,001
2,1	+0,177	−0,022		+0,023	−0,004
3,1	+0,040	−0,004		+0,001	

Digitized by Google

3.					
0,0	+0″,05349	+0″,00016	+0″,00004	+0″,00044	−0″,00095
1,0	−1,167		−0,002	−0,024	+0,025
2,0	+7,045		−0,004	+0,183	−0,155
3,0	+0,387		−0,003	+0,004	−0,006
4,0	+0,021				
0,−1	+0,00130	−0,00017		−0,00022	+0,00005
1,−1	−0,029			+0,001	+0,001
2,−1	+0,177	+0,022		−0,011	−0,006
3,−1	+0,010	+0,002			−0,001
2,−2	+0,004	+0,001			
4.					
0,4		−0,0004			
0,3		−0,0062	+0,0003	−0,0007	+0,0019
1,3		−0,011	+0,001		
−2,2				+0,010	+0,010
−1,2		+0,004		−0,008	−0,007
0,2		−0,0609	−0,0004	−0,0045	−0,0019
1,2		−0,159		−0,001	+0,006
2,2		−0,012		+0,002	+0,002
0,1		−0,00081	−0,00027	+0,00004	−0,00007
1,1		−0,004			
0,0		−0,000029	−0,000007	+0,000016	+0,000010
5.					
0,2				−0,0011	+0,0011
1,2				+0,028	−0,028
2,2	+0,007			−0,182	+0,183
3,2				−0,008	+0,008
12.					
3,−1		+0,004			
1,−2				−0,002	+0,002
2,−2		−0,014		+0,040	−0,040
3,−2		+0,447		−0,018	+0,011
4,−2		+0,086		+0,027	−0,031
5,−2		+0,009		+0,002	−0,002
2,−3		−0,001		+0,001	
3,−3		+0,014			
4,−3		+0,007		+0,002	−0,002
13.					
2,−3				+0,006	+0,006
0,−4		+0,0011	−0,0018	−0,0017	−0,0018
1,−4		+0,001	−0,002	+0,032	+0,032
2,−4				−0,180	−0,183
3,−4				−0,012	−0,012
1,−5				+0,003	+0,003
2,−5				−0,018	−0,018
3,−5				−0,001	−0,001

Digitized by Google

16.					
4, −4		+0″,001	+0″,002		
5, −4		+0,001	+0,002		
17.					
3, −6				−0″,004	−0″,004
4, −6				−0,002	−0,002

Die Summen der Grössen dieser Tafel geben $\Delta' \overline{\Sigma}$.

232.

Bildet man nun die Summen der Glieder der vorstehenden Tafeln, und berechnet daraus $\Delta' \overline{U}$, so erhält man die folgende Zusammenstellung.

γ, g, g'	$\Delta' \overline{T}$ sin	$\Delta' \overline{G}$ sin	$\Delta' \overline{\Sigma}$ sin	$\Delta' \overline{U}$ sin
3.				
0,2,2	+0″,014		+0″,003	
	−0,003			
	−0,013			
0,0,1	−0,00002		+0,00166	
	−0,00282			
	+0,00057			
0,1,1	−0,057	+0″,030	−0,030	−0″,057
	+0,039	+0,004		+0,035
	+0,06288	+0,040		+0,023
0,2,1	+0,520	+0,001	+0,174	+0,345
	−0,158			−0,158
	−0,554	−0,367		−0,187
0,3,1	+0,033		+0,007	+0,026
	−0,012			−0,012
	−0,016	−0,006		−0,040
0,−1,0	−0,001			
	+0,00280			
	+0,001			
0,0,0	−0,00600	−0,099	+0,05318	+0,040
	−0,07907	−0,027		−0,052
	+0,00426	+0,017		−0,013
0,1,0	−1,749	+1,167	−1,168	−1,748
	+1,250	+0,085		+1,165
	+2,00548	+1,227		+0,778
0,2,0	+21,156	+0,025	+7,069	+14,064
	−6,974	+0,011		−6,986
	−21,213	−14,136		−7,078

3.				
0,3,0	+1″728		+0″382	+1″346
	−0,762	+0″002		−0,764
	−0,770	−0,383		−0,387
0,4,0	+0,126		+0,021	+0,105
	−0,066			−0,066
	−0,037	−0,016		−0,021
0,0,−1	−0,00042		+0,00096	
	−0,00443			
	+0,00001			
0,1,−1	−0,034	+0,029	−0,027	−0,036
	+0,029	+0,002		+0,027
	+0,04163	+0,026		+0,016
0,2,−1	+0,547	+0,004	+0,182	+0,364
	−0,191	+0,004		−0,192
	−0,510	−0,338		−0,172
0,3,−1	+0,058		+0,011	+0,047
	−0,028			−0,028
	−0,026	−0,015		−0,011
0,2,−2	+0,014		+0,005	+0,009
	−0,004			−0,004
	−0,013			−0,013
4.				
0,0,4	−0,00007		−0,0004	
	+0,0168	+0,016		
	−0,0176	−0,018		
0,−2,3	+0,005			
	−0,004			
	−0,002			
0,−1,3	+0,030	+0,035		−0,005
	−0,0332	−0,035		+0,002
	−0,012	−0,015		+0,003
0,0,3	−0,0214		−0,0047	−0,016
	+0,4053	+0,394		+0,011
	−0,4050	−0,410		+0,005
0,1,3	−0,065	−0,034	−0,010	−0,021
	+0,026	+0,009		+0,017
	+0,0468	+0,043		+0,004
0,−3,2	+0,005			
	−0,002			
	−0,002			
0,−2,2	+0,070	+0,016	+0,020	+0,034
	−0,055	−0,038		−0,017
	−0,026	−0,008		−0,018
0,−1,2	+0,511	+0,548	−0,011	−0,025
	−0,5226	−0,524		+0,001
	−0,163	−0,190		+0,027
0,0,2	−0,2206	−0,013	−0,0674	−0,141
	+6,7645	+6,672		+0,093
	−6,5463	−6,587		+0,041

Digitized by Google

4.				
0,1,2	−1″,046	−0″,552	−0″,454	−0″,340
	+0,426	+0,190		+0,236
	+0,7657	+0,691		+0,075
0,2,2	−0,057	−0,016	−0,008	
	+0,035	+0,008		
	+0,003			
0,−1,1	−0,006	−0,006		
	+0,00799	+0,007		
	+0,004	+0,005		
0,0,1	−0,00383		−0,00114	−0,003
	−0,06780	−0,071		+0,003
	+0,09267	+0,093		
0,1,1	−0,003	+0,005	−0,004	−0,004
	+0,004	+0,004		+0,003
	−0,00107	−0,001		0,000
0,0,0	−0,00004		−0,000040	
	−0,00007			
	+0,00009			
5.				
0,0,2	0			
	−0,0002			
	+0,0002			
0,1,2	−0,001			
	+0,002			
	+0,0026			
0,2,2	+0,022		+0,008	
	−0,007			
	−0,023	−0,015		
0,3,2	+0,002			
	−0,001			
	−0,004			
12.				
0,2,−4	−0,001			
	+0,001			
	0,000			
0,3,−4	+0,007		+0,004	
	−0,004			
	−0,005			
0,1,−2	0,000			
	−0,001			
	+0,0003			
0,2,−2	−0,021	+0,013	−0,014	−0,020
	+0,025	+0,001		+0,021
	0,000	+0,002		−0,002
0,3,−2	+0,447	+0,006	+0,140	+0,301
	−0,215	+0,001		−0,221
	−0,230	−0,151		−0,079

12.				
0,4,−2	+0″,273		+0″,082	+0″,191
	−0,141			−0,141
	−0,134	−0″,082		−0,052
0,5,−2	+0,039		+0,009	
	−0,023			
	−0,012	−0,005		
0,3,−3	+0,033		+0,011	+0,022
	−0,016			−0,016
	−0,016	−0,008		−0,008
0,4,−3	+0,026		+0,007	
	−0,014			
	−0,012	−0,006		
13.				
0,4,−3	−0,002			
	+0,002			
	+0,0015			
0,2,−3	+0,036		+0,012	+0,024
	−0,013			−0,013
	−0,034	−0,022		−0,012
0,0,−4	−0,0073	−0,001	−0,0042	
	+0,0046	+0,003		
	+0,0042	−0,001		
0,1,−4	+0,095	−0,065	+0,063	+0,097
	+0,022	+0,088		−0,066
	−0,0448	−0,005		−0,040
0,2,−4	−1,093	−0,006	−0,363	−0,724
	+0,365	+0,009		+0,356
	+1,160	+0,795		+0,365
0,3,−4	−0,101	−0,001	−0,024	−0,076
	+0,047	+0,003		+0,044
	+0,050	+0,027		+0,023
0,4,−4	−0,006			
	+0,004			
	+0,002			
0,1,−5	+0,010	−0,006	+0,006	
	+0,002	+0,008		
	−0,0040	+0,002		
0,2,−5	−0,112		−0,036	−0,076
	+0,037	+0,001		+0,036
	+0,119	+0,081		+0,038
0,3,−5	−0,010		−0,002	
	+0,004			
	+0,004			
16.				
0,4,−4	+0,008		+0,003	
	−0,006			
	−0,003			

Digitized by Google

16.				
0,5, −4	+0,010 −0,007 −0,003		+0,003	
17.				
0,3, −6	−0,025 +0,011 +0,014		−0,008	
0,4, −6	−0,016 +0,008 +0,008		−0,004	

Berechnet man hierauf die Producte

$$\mathit{\Delta'}\overline{G}\nu;\quad \mathit{\Delta'}\overline{U}\left\{(1+\nu)^2\left(\frac{h}{h_0}\right)^2-1\right\};\quad \mathit{\Delta'}\overline{\Sigma}(2\nu+\nu^2)$$

die ich der Kürze wegen bez. mit A, B, C bezeichnen werde, so erhält man $\mathit{\Delta'}T$ wie folgt.

γ, g, g'	$\mathit{\Delta'}\overline{T}$ sin	A sin	B sin	C sin	$\mathit{\Delta'}T$ sin
3.					
0,2,2	+0,011 −0,003 −0,013				+0,011 −0,003 −0,013
0,0,1	−0,00002 −0,00282 +0,00057	−0,00029 +0,00012	+0,00035 −0,00024 −0,00016	+0,00025	+0,00029 −0,00294 +0,00041
0,1,1	−0,057 +0,039 +0,06288	−0,002 +0,00344	−0,003 +0,002 +0,00147	−0,002	−0,062 +0,039 +0,06776
0,2,1	+0,520 −0,158 −0,554	−0,001 +0,001	+0,001	−0,001	+0,520 −0,159 −0,553
0,3,1	+0,033 −0,042 −0,016	−0,001	+0,003 −0,001 −0,001	+0,001	+0,037 −0,043 −0,018
0,−1,0	−0,001 +0,00280 +0,001	+0,00024	+0,00013		−0,001 +0,00317 +0,001
0,0,0	−0,00600 −0,07907 +0,00426	−0,00196 +0,00216 +0,00178	−0,00114 +0,00090 +0,00047	−0,00104	−0,01014 −0,07601 +0,00651
0,1,0	−1,749 +1,250 +2,00548	−0,010 −0,032 +0,02316	+0,014 −0,008 −0,00807	+0,019	−1,726 +1,210 +2,02057

Digitized by Google

3.					
0,2,0	+21,1456	+0,0003	−0,0049	−0,0090	+21,1020
	−6,974	−0,025	+0,025		−6,974
	−21,213	+0,113	+0,025		−21,075
0,3,0	+1,728	+0,002	+0,008	−0,001	+1,737
	−0,762	−0,002	−0,005		−0,769
	−0,770	−0,003	−0,006		−0,779
0,4,0	+0,126		+0,002		+0,128
	−0,066		−0,001		−0,067
	−0,037				−0,037
0,0,−1	−0,00042	+0,00002	−0,00031	−0,00018	−0,00089
	−0,00143	+0,00005	+0,00021		−0,00117
	+0,00001	+0,00011	+0,00011		+0,00023
0,1,−1	−0,034		+0,003	+0,001	−0,030
	+0,029	−0,001	−0,001		+0,027
	+0,04163	−0,00054	−0,00143		+0,03966
0,2,−1	+0,547		+0,001	−0,001	+0,547
	−0,191	−0,002			−0,193
	−0,510	+0,003			−0,507
0,3,−1	+0,058		−0,003	−0,002	+0,053
	−0,028		+0,002		−0,026
	−0,026	+0,002	+0,002		−0,022
0,2,−2	+0,014				+0,014
	−0,004				−0,004
	−0,013				−0,013
4.					
0,0,1	−0,0007		−0,0008	−0,0003	−0,0018
	+0,0168		+0,0004		+0,0172
	−0,0176	+0,0003	+0,0005		−0,0168
0,−2,3	+0,005				+0,005
	−0,004				−0,004
	−0,002				−0,002
0,−1,3	+0,030			+0,001	+0,031
	−0,0332	−0,0001	−0,0006		−0,0339
	−0,012	+0,001	−0,001		−0,012
0,0,3	−0,0214	−0,0003	−0,0151	−0,0040	−0,0408
	+0,4053	−0,0049	+0,0073		+0,4107
	−0,4030	+0,0063	+0,0078		−0,3907
0,1,3	−0,065		−0,009	−0,005	−0,079
	+0,026	+0,001	+0,004		+0,031
	+0,0468	+0,0039	+0,0044		+0,0551
0,−3,2	+0,005				+0,005
	−0,002				−0,002
	−0,002				−0,002
0,−2,2	+0,070				+0,070
	−0,055		−0,001		−0,056
	−0,026				−0,026
0,−1,2	+0,514	−0,008	+0,007	+0,007	+0,517
	−0,5226	+0,0089	−0,0068		−0,5205
	−0,163	−0,003	−0,003		−0,169

Digitized by Google

4.					
0,0,2	−0″,2206	−0″,0062	−0″,1600	−0″,0412	−0″,1280
	+6,7645	−0,0408	+0,0772		+6,8009
	−6,5463	+0,0894	+0,0812		−6,3760
0,1,2	−1,061	+0,004	−0,133	−0,072	−1,217
	+0,126	+0,001	+0,067		+0,194
	+0,7657	+0,0666	+0,0639		+0,8962
0,2,2	−0,057		−0,009	−0,006	−0,072
	+0,035		+0,006		+0,041
	+0,003	+0,004	+0,002		+0,009
0,−1,1	−0,006				−0,006
	+0,00799	+0,00059	−0,00045		+0,00813
	+0,004	−0,001			+0,003
0,0,1	−0,00383	−0,00024	−0,00271	−0,00061	−0,00739
	−0,06780	+0,00106	+0,00144		−0,06530
	+0,09267	−0,00029	+0,00121		+0,09359
0,1,1	−0,003		−0,002	−0,002	−0,007
	+0,004	−0,001	+0,002		+0,005
	−0,00107	+0,00216	+0,00106		+0,00215
0,0,0	−0,00004		−0,00005	+0,00002	−0,00007
	−0,00007	+0,00002	+0,00002		−0,00003
	+0,00009	−0,00002	+0,00012		+0,00019
5.					
0,0,2	0				0
	−0,0002				−0,0002
	+0,0002				+0,0002
0,1,2	−0,001				−0,001
	+0,002				+0,002
	+0,0026				+0,0026
0,2,2	+0,022				+0,022
	−0,007				−0,007
	−0,023				−0,023
0,3,2	+0,002				+0,002
	−0,001				−0,001
	−0,001				−0,001
12.					
0,2,−1	−0,001		+0,001		0,000
	+0,001				+0,001
	0,000				0,000
0,3,−1	+0,007		−0,002	−0,002	+0,003
	−0,004		+0,001		−0,003
	−0,005	+0,002	+0,002		−0,001
0,1,−2	0,000				0,000
	−0,001				−0,001
	+0,0003	−0,0003	+0,0002		+0,0002
0,2,−2	−0,021	−0,006	+0,018	+0,010	+0,001
	+0,025		−0,011		+0,014
	0,000	−0,004	−0,007		−0,011

Digitized by Google

42.					
0,3,−2	+0,″447	−0,″004	−0,″098	−0,″064	+0,″281
	−0,215		+0,045		−0,170
	−0,230	+0,066	+0,051		−0,113
0,4,−2	+0,273		−0,176	−0,056	+0,041
	−0,141		+0,088		−0,053
	−0,134	+0,054	+0,087		+0,007
0,5,−2	+0,039		−0,024	−0,005	+0,010
	−0,023		+0,014		−0,009
	−0,012	+0,003	+0,009		0,000
0,3,−3	+0,033		−0,007	−0,005	+0,021
	−0,016		+0,003		−0,013
	−0,016	+0,005	+0,002		−0,009
0,4,−3	+0,026		−0,015	−0,005	+0,006
	−0,014		+0,008		−0,006
	−0,012	+0,005	+0,008		+0,001
43.					
0,1,−3	−0,002				−0,002
	+0,002				+0,002
	+0,0015	−0,0007			+0,0008
0,2,−3	+0,036				+0,036
	−0,013				−0,013
	−0,034				−0,034
0,0,−4	−0,0073	−0,0028	−0,0017	−0,0013	−0,0131
	+0,0046	+0,0023	+0,0002		+0,0071
	+0,0042	+0,0018	+0,0018		+0,0078
0,1,−4	+0,095	−0,002	−0,004	−0,003	+0,086
	+0,022	−0,030	+0,001		−0,007
	−0,0448	+0,0343	+0,0037		−0,0068
0,2,−4	−1,093	+0,003	−0,002	+0,005	−1,087
	+0,365	−0,025	+0,001		+0,341
	+1,160	+0,021	+0,001		+1,182
0,3,−4	−0,104	+0,002			−0,099
	+0,047	−0,002			+0,045
	+0,050	−0,001			+0,049
0,4,−4	−0,006				−0,006
	+0,004				+0,004
	+0,002				+0,002
0,1,−5	+0,040				+0,040
	+0,002	−0,003			−0,001
	−0,0040	+0,0034	+0,0005		−0,0001
0,2,−5	−0,112				−0,112
	+0,037	−0,004			+0,033
	+0,119	+0,004			+0,123
0,3,−5	−0,010				−0,010
	+0,004				+0,004
	+0,004				+0,004

Digitized by Google

16.					
0,4,−4	+0,0008		−0,0004	−0,0001	+0,0003
	−0,0006		+0,0002		−0,0004
	−0,0003		+0,0001		−0,0002
0,5,−4	+0,0010		−0,0007	−0,0002	+0,0001
	−0,0007		+0,0004		−0,0003
	−0,0003	+0,0001	+0,0001		−0,0001
17.					
0,3,−6	−0,0025		+0,0005	+0,0001	−0,0016
	+0,0014		−0,0002		+0,0009
	+0,0011	−0,0001	−0,0003		+0,0007
0,4,−6	−0,0016		+0,0010	+0,0003	−0,0003
	+0,0008		−0,0004		+0,0004
	+0,0008	−0,0003	−0,0004		+0,0001

Hiemit ist zugleich auch der Ausdruck von $\Delta' \Sigma$ gegeben, da

$$\Delta' \Sigma = \Delta' \overline{\Sigma} + \Delta' \overline{\Sigma} (2\nu + \nu^2)$$

ist.

233.

Von den eben berechneten Functionen sind sogleich die richtigen Werthe erhalten worden, da sie von den schon völlig bekannten Functionen $n\delta z$, ν, etc. abhängen. Anders verhält es sich mit den nun zu berechnenden Functionen, die, da sie von den unbekannten $n\Delta z$, $\Delta\nu$, etc. abhängen, nur durch successive Näherungen erhalten werden können. Bei diesen Annäherungen bilden die eben erhaltenen Werthe von $\Delta' T$ und $\Delta' \Sigma$ die Grundlage, die zuerst mit Weglassung aller der Glieder, die von den mit vorgesetztem Δ bezeichneten Störungen abhängen, in die Gleichungen (67), (68), (69), (70) substituirt werden müssen. Die Werthe von $n\Delta z$, $\Delta\nu$, $\Delta \frac{h_0}{h}$, die hieraus hervorgehen, und das Resultat der ersten Annäherung bilden, werden nun nebst denselben Werthen von $\Delta' T$ und $\Delta' \Sigma$ in diese Gleichungen substituirt, wodurch neue Werthe von $n\Delta z$, $\Delta\nu$, $\Delta \frac{h_0}{h}$ erlangt werden, die den wahren Werthen schon näher kommen, und in der folgenden Annäherung substituirt werden müssen. Hiemit muss fortgefahren werden, bis die zuletzt substituirten Werthe mit so geringen Unterschieden wieder erhalten werden, dass eine fernere Substitution keine Aenderung hervor bringen kann.

Digitized by Google

Es ist hier eben so wenig, wie bei den in der ersten Abhandlung berechneten Störungsgliedern, nothwendig, alle diese Näherungen anzuführen, indem die letzte Annäherung, dadurch dass ihr Resultat sich nur wenig von den derselben zu Grunde gelegten Werthen entfernen darf, die Richtigkeit der erhaltenen Coefficienten beweist. Ich werde daher hier, wie in der ersten Abhandlung, die bezüglichen Glieder der in den Mondtafeln angewandten Störungen substituiren, und die Einzelheiten dieser letzten Annäherung ausführlich angeben.

Die Werthe von $n\Delta z$ und Δw, die hier zu Grunde zu legen sind, findet man im Art. 66 angeführt, aber statt Δw wird Δv gebraucht werden, und der Ausdruck jener Grösse muss daher auf den Ausdruck dieser hingeführt werden. Die Gleichung

$$1 + \nu = c^w$$

giebt zu dem Ende

$$\Delta v = \Delta w = v\Delta w$$

und es ist daher zuerst das Product $v\Delta w$ zu berechnen, in welchem von ν nur die Abtheilungen 1, 2, 11, 15 gebraucht werden, die in der ersten Abhandlung gegeben sind. Es wird somit, wenn man zur Vervollständigung auch $n\Delta z$ ansetzt,

g, g'	$n\Delta z$ sin	Δw cos	$v\Delta w$ cos	Δv cos
3.				
0,1	+0″,048	−0″,008	−0″,006	−0″,014
1,1	−0,353	+0,179	−0,001	+0,178
2,1	+0,130	−0,094	+0,003	−0,091
3,1	+0,002	−0,003		−0,003
−1,0	+0,072	+0,030	−0,001	+0,029
0,0	+5,998	+1,122	−0,024	+1,098
1,0	−84,906	+42,572	−0,332	+42,240
2,0	+4,290	−2,824	−0,011	−2,835
3,0	+0,085	−0,106	−0,010	−0,116
0,−1	−0,042	−0,006	+0,003	−0,003
1,−1	+0,276	−0,142	+0,002	−0,140
2,−1	+0,123	−0,094	−0,007	−0,101
3,−1	+0,003	−0,003	−0,001	−0,004
2,−2	+0,005	−0,003		−0,003
4.				
−2,3	+0,040	+0,006	−0,002	+0,004
−1,3	+0,541	+0,220	−0,014	+0,206
0,3	−3,447	+0,382	−0,011	+0,371
1,3	−0,169	+0,102	+0,001	+0,103

Digitized by Google

4.				
−3,2	+0,004	+0,005		+0,005
−2,2	+0,158	+0,129	−0,011	+0,118
−1,2	+10,993	+4,830	−0,191	+4,639
0,2	−81,610	+6,352	−0,200	+6,152
1,2	−4,700	+2,636	−0,007	+2,629
2,2	−0,074	+0,080	+0,001	+0,081
−2,1	−0,005	−0,003		−0,003
−1,1	−0,195	−0,090	+0,005	−0,085
0,1	+2,008	−0,085	+0,002	−0,083
1,1	−0,054	+0,028	−0,001	+0,027
0,0	+0,004	+0,004		+0,004
5.				
1,2	−0,008	+0,005		+0,005
2,2	+0,005	−0,004		−0,004
12.				
2,−1	+0,002	−0,002		−0,002
3,−1	+0,006	−0,005	+0,001	−0,004
1,−2	+0,015	−0,008	−0,011	−0,019
2,−2	−1,085	+0,629	−0,222	+0,407
3,−2	−0,599	+0,442	−0,145	+0,297
4,−2	+0,009	+0,005	+0,004	+0,009
1,−3	+0,002	−0,001		−0,001
2,−3	−0,044	+0,026	−0,008	+0,018
3,−3	−0,041	+0,029	−0,009	+0,020
4,−3	+0,002	−0,001		−0,001
13.				
1,−3	−0,029	+0,011		+0,011
2,−3	−0,044	+0,012		+0,012
0,−4	+0,034	−0,016	−0,014	−0,030
1,−4	+0,193	−0,113	−0,048	−0,161
2,−4	+0,236	−0,191	−0,048	−0,239
3,−4	−0,064	+0,036	−0,021	+0,015
4,−4	−0,003	+0,004	−0,004	+0,003
1,−5	−0,027	+0,004	−0,004	0,000
2,−5	+0,034	−0,024	−0,005	−0,029
3,−5	+0,008	+0,004	−0,002	+0,002
16.				
3,−4	−0,014	+0,010	−0,004	+0,006
4,−4	−0,019	+0,014	−0,006	+0,008
5,−4	−0,006	+0,005	−0,003	+0,002
17.				
2,−6	+0,004	−0,002	+0,001	−0,001
3,−6	+0,007	−0,005	+0,001	−0,004
4,−6	+0,003	−0,003	+0,001	−0,002

Digitized by Google

234.

Es sind jetzt zuerst die Gleichungen (67) und (70) der Artt. 186 und 188, aber mit folgenden Abkürzungen anzuwenden,

$$\frac{d\Delta W_0}{ndt} = (1)n\Delta z + (2)\Delta v + (3)\Delta\frac{h_0}{h} + (4)\frac{d\Delta v}{ndt} + \Delta' T$$

$$\frac{d\Delta\frac{h_0}{h}}{ndt} = (17)n\Delta z + (18)\Delta v - \Delta' \Sigma$$

Substituirt man zuerst mit Anwendung der im Art. 205 gegebenen numerischen Werthe der Coefficienten (17) und (18) die Ausdrücke von $n\Delta z$ und Δv, die im vor. Art. gegeben sind, in die zweite der vorstehenden Gleichungen, so bekommt man die folgenden Werthe,

g, g'	(17) $n\Delta z$ sin	(18) Δv sin	Summe sin
3.			
0,1	−0″,00034	−0″,00020	−0″,00054
1,1	−0,007	−0,002	−0,009
2,1	+0,020	−0,003	+0,017
3,1	+0,002	−0,001	+0,001
−1,0		−0,001	−0,001
0,0	−0,00469	−0,00147	−0,00616
1,0	−0,164	−0,030	−0,194
2,0	+0,647	−0,040	+0,607
3,0	+0,092	−0,023	+0,069
4,0	+0,008	−0,002	+0,006
0,−1	−0,00016	−0,00002	−0,00018
1,−1	−0,007	−0,001	−0,008
2,−1	+0,024	−0,002	+0,022
3,−1	+0,005	−0,001	+0,004
2,−2	+0,001		+0,001
4.			
0,1	−0,0004	−0,0001	−0,0005
−2,3	+0,001	+0,002	+0,003
−1,3	+0,045	+0,023	+0,068
0,3	−0,0083	−0,0057	−0,0140
1,3	−0,002		−0,002
−3,2		+0,001	+0,001
−2,2	+0,009	+0,027	+0,036
−1,2	+0,688	+0,350	+1,038
0,2	−0,1126	−0,0805	−0,1931
1,2	−0,020	+0,008	−0,012
2,2	−0,004	+0,001	−0,003

Digitized by Google

4.			
−1,1	−0,0040	−0,0005	−0,0045
0,1	−0,00106		−0,00106
0,0	−0,00008	−0,00002	−0,00010
12.			
3,−1	−0,005	+0,003	−0,002
1,−2	+0,004	−0,001	+0,003
2,−2	−0,108	+0,049	−0,059
3,−2	+0,698	−0,359	+0,339
4,−2	+0,020	+0,005	+0,025
5,−2	−0,004	+0,004	0,000
2,−3	−0,006	+0,002	−0,004
3,−3	+0,041	−0,021	+0,020
4,−3	+0,001	+0,001	+0,002
13.			
1,−3	−0,001		−0,001
2,−3	+0,025	+0,001	+0,026
0,−4	+0,0024	+0,0026	+0,0050
1,−4	+0,017	−0,013	+0,004
2,−4	−0,691	−0,052	−0,743
3,−4	+0,034	−0,045	−0,011
4,−4	+0,004	−0,003	+0,001
1,−5	+0,002	−0,002	0,000
2,−5	−0,072	−0,007	−0,079
3,−5	+0,005	−0,004	+0,001
16.			
3,−4	−0,002		−0,002
4,−4	+0,017	−0,009	+0,008
5,−4	+0,009	−0,005	+0,004
17.			
3,−6	−0,010		−0,010
4,−6	−0,005	+0,001	−0,004

Addirt man hiezu den im Vorhergehenden enthaltenen Werth von $-\Delta'\Sigma$ und integrirt, so bekommt man den folgenden Werth von $\Delta\frac{h_2}{h}$. Die Integration besteht hier nur darin, dass man mit den im Art. 104 gegebenen, und mit β bezeichneten Integrationsdivisoren dividirt, die Sinuszeichen in die Cosinuszeichen abändert, und alle algebraischen Vorzeichen umkehrt.

Digitized by Google

g, g'	$\Delta\frac{h_0}{h}$ cos	g, g'	$\Delta\frac{h_0}{h}$ cos
3.		5.	
2,2	+0″001	2,2	+0″004
0,1	+0,024	12.	
1,1	−0,021	3,−1	+0,001
2,1	+0,074	1,−2	−0,003
3,1	+0,002	2,−2	+0,029
−1,0	−0,001	3,−2	−0,091
0,0	+2,347	2,−3	+0,002
1,0	−0,932	3,−3	−0,005
2,0	+3,145	13.	
3,0	+0,103	1,−3	+0,001
4,0	+0,004	2,−3	−0,008
0,−1	−0,049	0,−4	+0,036
1,−1	−0,049	1,−4	+0,081
2,−1	+0,082	2,−4	+0,225
3,−1	+0,002	3,−4	−0,005
2,−2	+0,002	1,−5	+0,009
4.		2,−5	+0,026
0,4	−0,004	3,−5	−0,001
−2,3	+0,002	16.	
−1,3	+0,088	4,−4	−0,002
0,3	+0,023	5,−4	−0,001
1,3	−0,011	17.	
−2,2	+0,009	3,−6	+0,002
−1,2	+1,239	4,−6	+0,001
0,2	+0,532		
1,2	−0,185		
2,2	−0,005		
−1,1	−0,046		
0,1	−0,008		
1,1	−0,006		
0,0	+0,012		

235.

Substituirt man nun die Werthe von $n\Delta z$, $\Delta\nu$, $\Delta\frac{h_0}{h}$ in die Gleichung für $d\Delta W_0$, so ergiebt sich das folgende Resultat,

Digitized by Google

γ, g, g'	(1) $n\Delta z$ sin	(2) Δr sin	(3) $\Delta \frac{A_0}{h}$ sin	(4) $\frac{d\Delta r}{ndt}$ sin	Summe sin
3.					
0,2,2	+0″001				+0″001
	−0,001				−0,001
	0,000				0,000
0,0,1	+0,00209	+0″00084	+0″00020	−0″00049	+0,00294
	+0,00131	−0,00013	+0,00020	−0,00026	+0,00112
	−0,00176	−0,00032	−0,00052	+0,00018	−0,00242
0,1,1	+0,020	+0,003	−0,004		+0,022
	−0,020	+0,002	+0,004	+0,001	−0,016
	−0,01466	−0,00354	+0,00109	+0,00220	−0,01491
0,2,1	−0,058	+0,006			−0,052
	+0,026	−0,001	+0,001	−0,002	+0,024
	+0,032	−0,004	−0,004	−0,002	+0,025
0,3,1	−0,010	+0,003			−0,007
	+0,004	−0,001			+0,003
	+0,003	−0,002			+0,001
0,−1,0	+0,002	+0,001	+0,002	−0,001	+0,004
	−0,00015	−0,00066	−0,00056	+0,00002	−0,00135
	−0,003	−0,001	−0,001		−0,005
0,0,0	+0,04860	−0,01051	+0,00203	−0,03018	+0,00964
	+0,03234	−0,01473	+0,03842	−0,03070	+0,02533
	−0,02962	+0,01809	−0,04027	+0,01072	−0,04108
0,1,0	+0,420	+0,092	−0,021	+0,089	+0,500
	−0,511	−0,270	−0,005	+0,373	−0,443
	−0,40285	+0,17791	+0,02587	+0,36792	+0,16885
0,2,0	−1,929	+0,149	−0,040	−0,031	−1,821
	+0,945	−0,039	+0,059	−0,039	+0,926
	+1,011	−0,099	−0,048	−0,079	+0,785
0,3,0	−0,363	+0,079	−0,001	+0,004	−0,281
	+0,200	−0,026	+0,003	−0,004	+0,173
	+0,132	−0,051	−0,003	+0,001	+0,079
0,4,0	−0,042	+0,009			−0,033
	+0,025	−0,003			+0,022
	+0,010	−0,003			+0,007
0,0,−1	+0,00130	+0,00060	+0,00011	+0,00014	+0,00215
	+0,00095	−0,00002	+0,00034	+0,00045	+0,00074
	−0,00095	−0,00054	+0,00034	−0,00012	−0,00127
0,1,−1	+0,018	+0,004	−0,001		+0,021
	−0,016	+0,003	+0,001		−0,012
	−0,01169	−0,00698	+0,00081	−0,00177	−0,01963
0,2,−1	−0,070	+0,007	−0,004		−0,064
	+0,036	−0,001	+0,001	−0,002	+0,034
	+0,035	−0,004	−0,001	−0,002	+0,028
0,3,−1	−0,018	+0,006			−0,012
	+0,010	−0,001			+0,009
	+0,008	−0,003			+0,005

3.					
0,2,−2	−0″002				−0″002
	+0,001				+0,001
	+0,001				+0,001
4.					
0,0,4	+0,0010	+0″0006	+0″0002		+0,0018
	−0,0007	−0,0004	−0,0001		−0,0012
	−0,0010	−0,0002	−0,0001		−0,0013
0,−2,3	−0,011	−0,008	+0,002		−0,017
	0,000	+0,003	−0,001		+0,002
	+0,006	+0,004	−0,001		+0,009
0,−1,3	−0,135	−0,070	−0,001		−0,206
	+0,0695	+0,0448	+0,0019	−0″0014	+0,1148
	+0,067	+0,026	−0,002	−0,001	+0,090
0,0,3	+0,0213	+0,0132	+0,0041		+0,0386
	−0,0221	−0,0101	−0,0016	+0,0004	−0,0334
	−0,0310	−0,0032	−0,0026	+0,0010	−0,0358
0,1,3	+0,008				+0,008
	−0,006	−0,001		+0,001	−0,006
	−0,0018	+0,0010	+0,0004	+0,0010	+0,0006
0,−3,2	−0,006	−0,009	+0,004		−0,011
	−0,001	+0,003	−0,001		+0,001
	+0,005	+0,004	−0,002		+0,007
0,−2,2	−0,113	−0,116	+0,037	+0,003	−0,189
	+0,003	+0,046	−0,020	+0,001	+0,030
	+0,079	+0,050	−0,049	−0,003	+0,107
0,−1,2	−2,045	−1,056	−0,016	−0,001	−3,118
	+1,0779	+0,6804	+0,0291	−0,0359	+1,7515
	+1,031	+0,382	−0,013	−0,031	+1,369
0,0,2	+0,2661	+0,1845	+0,0505	+0,0009	+0,5020
	−0,3087	−0,1534	−0,0157	+0,0015	−0,4763
	−0,4331	−0,0357	−0,0352	+0,0155	−0,4885
0,1,2	+0,083	−0,012	−0,006	−0,001	+0,064
	−0,073	−0,010	−0,001	+0,026	−0,058
	−0,0212	+0,0264	+0,0070	+0,0248	+0,0370
0,2,2	+0,017	−0,001		−0,002	+0,014
	−0,012			+0,002	−0,010
	−0,003	+0,001		−0,001	−0,003
0,−2,1	+0,003	+0,001			+0,004
	0,000				0,000
	−0,003	−0,001			−0,004
0,−1,1	+0,032	+0,016			+0,048
	−0,01375	−0,00875	−0,00015	+0,00060	−0,02205
	−0,018	−0,006		+0,001	−0,023
0,0,1	+0,00473	+0,00074	+0,00075	−0,00008	+0,00614
	−0,00271	+0,00023	−0,00057	−0,00004	−0,00309
	−0,00127	−0,00104	−0,00016	−0,00013	−0,00260
0,1,1	+0,003				+0,003
	−0,003				−0,003
	−0,00117	+0,00008	+0,00012	+0,00019	−0,00078

4.					
0,0,0	+0″,00017	+0″,00006	+0″,00002		+0″,00025
	−0,00008	−0,00002	−0,00001		−0,00011
	−0,00008	−0,00003	−0,00001		−0,00012
12.					
0,3,−1	+0,015	−0,008			+0,007
	−0,009	+0,003			−0,006
	−0,007	+0,004			−0,003
0,1,−2	−0,003		+0,005		+0,002
	+0,010	−0,002	−0,003		+0,005
	−0,0018	+0,0004	−0,0017	−0″,00001	−0,0032
0,2,−2	+0,245	−0,088	−0,044		+0,116
	−0,200	+0,041	+0,021	+0,011	−0,127
	−0,081	+0,032	+0,021	+0,003	−0,005
0,3,−2	−2,142	+1,081	+0,019		−1,042
	+1,073	−0,368	−0,010	+0,008	+0,703
	+1,061	−0,719	−0,009	+0,005	+0,338
0,1,−2	−0,162	+0,019	−0,051		−0,194
	+0,142	−0,018	+0,026		+0,120
	+0,024	+0,014	+0,027		+0,065
0,5,−2	−0,013	−0,003	−0,007		−0,023
	+0,010	+0,001	+0,004		+0,015
	+0,001	+0,003	+0,002		+0,006
0,1,−3	0,000				
	0,000				
	−0,0001	+0,0001	−0,0001	+0,0001	0,0000
0,2,−3	+0,012	−0,005	−0,002		+0,005
	−0,012	+0,002	+0,001		−0,009
	−0,005	+0,003	+0,001		−0,001
0,3,−3	−0,124	+0,062	+0,001		−0,061
	+0,062	−0,022			+0,040
	+0,061	−0,041			+0,020
0,1,−3	−0,007	−0,001	−0,004		−0,012
	+0,005		+0,003		+0,008
	0,000	+0,003	+0,003		+0,006
13.					
0,1,−3	+0,001	+0,001			+0,002
	−0,003				−0,003
	+0,0002	−0,0005			−0,0003
0,2,−3	−0,074	−0,004			−0,078
	+0,039	+0,002			+0,041
	+0,035	+0,002			+0,037
0,0,−4	−0,0028	−0,0050	−0,0004	+0,0001	−0,0031
	+0,0025	+0,0024	+0,0009	−0,0002	+0,0056
	−0,0008	+0,0027	−0,0004	+0,0003	+0,0018
0,1,−4	+0,033	+0,048	+0,003		+0,084
	+0,057	−0,012	−0,001	−0,001	+0,043
	−0,0564	−0,0349	−0,0034	−0,0009	−0,0956

Digitized by Google

13.					
0,2,−4	+2,″100	+0,″167	−0,″006		+2,″261
	−1,063	−0,057	+0,008	−0,″003	−1,115
	−1,030	−0,106		−0,003	−1,139
0,3,−4	−0,017	+0,137	−0,022		+0,098
	−0,021	−0,049	+0,012		−0,058
	+0,063	−0,083	+0,011		−0,009
0,4,−4	−0,011	+0,014	−0,002		+0,001
	+0,004	−0,006	+0,001		−0,001
	+0,007	−0,005	+0,001		+0,003
0,4,−5	+0,003	+0,005			+0,008
	+0,005	−0,002			+0,003
	−0,0061	−0,0032	−0,0003		−0,0096
0,2,−5	+0,220	+0,020	−0,001		+0,239
	−0,114	−0,007			−0,121
	−0,106	−0,013			−0,119
0,3,−5	−0,003	+0,014	−0,002		+0,009
	0,000	−0,005	+0,002		−0,003
	+0,007	−0,008	+0,002		+0,001
16.					
0,3,−4	+0,006	−0,002	−0,001		+0,003
	−0,004	+0,002			−0,002
	0,000	+0,001			+0,001
0,4,−4	−0,054	+0,029			−0,025
	+0,038	−0,013			+0,025
	+0,019	−0,014			+0,005
0,5,−4	−0,023	+0,016	+0,001		−0,006
	+0,017	−0,007			+0,010
	+0,008	−0,006	−0,001		+0,001
17.					
0,2,−6	+0,002	+0,001			+0,030
	−0,001	−0,001			−0,002
	0,000				0,000
0,3,−6	+0,032	−0,001	−0,001		+0,030
	−0,026	−0,001	+0,001		−0,026
	−0,007	+0,002	+0,001		−0,004
0,4,−6	+0,008	−0,003	−0,001		+0,001
	−0,009		+0,002		−0,007
	−0,002	+0,003	+0,002		+0,003

236.

Es ist nun der Ausdruck für $d.fW_0$ vollständig vorhanden, da er aus der Summe der Glieder des vor. Art. und dem Ausdruck von fT des Art. 232 besteht. Die Integration wird wieder so ausgeführt, wie im vorvor. Art. erklärt wurde, nur muss man hier nach der Division mit den Integrationsdivisoren β des Art. 104 die Glieder, die von $\pm\gamma$

Digitized by Google

abhängen, mit den Factoren $\eta^{(2)}$, $\eta^{(3)}$, etc., dessen numerische Werthe auch im Art. 104 gegeben sind, multipliciren, um die Glieder zu erhalten, die von den Vielfachen von γ abhängen. Ich setze neben dem Ausdruck von ΔW_0 sogleich die Differentialquotienten desselben nach γ, die gebraucht werden hin.

γ, g, g'	ΔW_0 cos	$\left(\frac{d\Delta W_0}{d\gamma}\right)$ sin	$\left(\frac{d^2\Delta W_0}{d\gamma^2}\right)$ cos	$\left(\frac{d^3\Delta W_0}{d\gamma^3}\right)$ sin
3.				
0,2,2	−0″,006			
−1,3,2	+0,001	+0″,001		
1,1,2	+0,011	−0,011		
	+0,006	−0,010		
0,0,1	−0,0321			
	−0,0346			
−1,1,1	+0,0017	+0,0017		
−2,2,1	−0,0003	−0,0006		
1,−1,1	−0,0022	+0,0022		
	−0,0354	+0,0033		
0,1,1	+0,036			
−1,2,1	−0,011	−0,011	+0″,011	+0″,011
−2,3,1	+0,001	+0,002	−0,004	−0,008
1,0,1	−0,525	+0,525	+0,525	−0,525
	−0,499	+0,516	+0,532	−0,522
0,2,1	−0,223			
−1,3,1	+0,044	+0,044	−0,044	−0,044
1,1,1	+0,481	−0,481	−0,481	+0,481
2,0,1	−0,014	+0,028	+0,056	−0,112
	+0,288	−0,409	−0,469	+0,325
0,3,1	−0,010			
−1,4,1	+0,002	+0,002		
1,2,1	+0,008	−0,008		
2,1,1	+0,013	−0,026		
3,0,1	−0,001	+0,003		
	+0,012	−0,029		
0,−1,0	+0,003			
−1,0,0	−0,072	−0,072	+0,072	
−2,1,0	+0,001	+0,002	−0,004	
1,−2,0	−0,002	+0,002	+0,002	
	−0,070	−0,068	+0,070	
0,0,0	+0,01868			
	+0,02040			
−1,1,0	+0,04943	+0,04943	−0,049	−0,049
−2,2,0	−0,01080	−0,02160	+0,043	+0,086
−3,3,0	+0,00225	+0,00675	−0,020	−0,060
−4,4,0	+0,00001	+0,00004		
1,−1,0	−0,03547	+0,03547	+0,035	−0,035
2,−2,0	−0,00006	+0,00012		
	+0,02576	+0,07021	+0,009	−0,058

Digitized by Google

3.				
0,1,0	+1″196			
−1,2,0	−0,394	−0″394	+0″394	+0″394
−2,3,0	+0,055	+0,440	−0,220	−0,440
1,0,0	−87,021	+87,021	+87,021	−87,021
2,−1,0	−0,001	+0,002	+0,004	−0,008
	−86,165	+86,739	+87,199	−87,075
0,2,0	−9,480			
−1,3,0	+2,000	+2,000	−2,000	−2,000
−2,4,0	+0,004	+0,008	−0,016	−0,032
1,1,0	+19,792	−19,792	−19,792	+19,792
2,0,0	−2,387	+4,774	+9,548	−19,096
	+9,929	−13,010	−12,260	−1,336
0,3,0	−0,460			
−1,4,0	+0,148	+0,148	−0,148	−0,148
1,2,0	+0,346	−0,346	−0,346	+0,346
2,1,0	+0,543	−1,086	−2,172	+4,344
3,0,0	−0,098	+0,294	+0,882	−2,646
	+0,479	−0,990	−1,784	+1,896
0,4,0	−0,024			
−1,5,0	+0,009	+0,009	−0,009	
1,3,0	+0,010	−0,010	−0,010	
2,2,0	+0,010	−0,020	−0,020	
3,1,0	+0,022	−0,066	−0,198	
4,0,0	−0,005	+0,020	+0,080	
	+0,022	−0,067	−0,141	
0,0,−1	{+0,0251			
	{+0,0216			
−1,1,−1	−0,0005	−0,0005		
−2,2,−1	−0,0002	−0,0004		
−3,3,−1	+0,0001	+0,0003		
1,−1,−1	−0,0010	+0,0010		
	+0,0200	+0,0004		
0,1,−1	+0,009			
−1,2,−1	−0,008	−0,008	+0,008	+0,008
−2,3,−1	+0,001	+0,002	−0,004	−0,008
1,0,−1	+0,398	−0,398	−0,398	+0,398
	+0,400	−0,404	−0,394	+0,398
0,2,−1	−0,218			
−1,3,−1	+0,054	+0,054	−0,054	−0,054
1,1,−1	+0,503	−0,503	−0,503	+0,503
2,0,−1	+0,044	−0,022	−0,044	+0,088
	+0,320	−0,471	−0,601	+0,537
0,3,−1	−0,014			
−1,4,−1	+0,004	+0,004	−0,004	−0,004
1,2,−1	+0,009	−0,009	−0,009	+0,009
2,1,−1	+0,014	−0,028	−0,056	+0,112
	+0,013	−0,033	−0,069	+0,117

Digitized by Google

3.				
0,2,−2	−0,0006			
−1,3,−2	+0,001	+0,0004	−0,0004	
1,1,−2	+0,014	−0,014	−0,014	
	+0,009	−0,013	−0,015	
4.				
0,0,4	0,0000			
	+0,0012			
−1,1,4	−0,0122	−0,0122		
1,−1,4	−0,0262	+0,0262		
	−0,0372	+0,0140		
0,−2,3	−0,007			
−1,−1,3	−0,003	−0,003	+0,003	
−2,0,3	−0,009	−0,018	+0,036	
1,−3,3	+0,003	−0,003	−0,003	
	−0,016	−0,024	+0,036	
0,−1,3	−0,240			
−1,0,3	−0,345	−0,345	+0,345	
−2,1,3	−0,008	−0,016	+0,032	
1,−2,3	+0,044	−0,044	−0,044	
	−0,549	−0,405	+0,333	
0,0,3	+0,0094			
	+0,0073			
−1,1,3	−0,3067	−0,3067	+0,307	+0,307
−2,2,3	−0,0003	−0,0006	+0,001	+0,002
1,−1,3	−0,5570	+0,5570	+0,557	−0,557
2,−2,3	+0,0042	−0,0024	−0,005	+0,010
	−0,8555	+0,2473	+0,860	−0,238
0,1,3	+0,058			
−1,2,3	−0,010	−0,010	+0,010	
1,0,3	−0,238	+0,238	+0,238	
2,−1,3	−0,015	+0,030	+0,060	
	−0,205	+0,258	+0,308	
0,−3,2	−0,002			
−1,−2,2	−0,001	−0,001		
−2,−1,2	−0,001	−0,002		
−3,0,2	−0,009	−0,027		
1,−4,2	+0,001	−0,001		
	−0,012	−0,031		
0,−2,2	−0,065			
−1,−1,2	−0,031	−0,031	+0,031	+0,031
−2,0,2	−0,212	−0,424	+0,848	+1,696
−3,1,2	−0,006	−0,018	+0,054	+0,162
1,−3,2	+0,028	−0,028	−0,028	+0,028
	−0,286	−0,501	+0,905	+1,917
0,−1,2	−3,093			
−1,0,2	−7,742	−7,742	+7,742	+7,742
−2,1,2	−0,150	−0,300	+0,600	+1,200
1,−2,2	+0,652	−0,652	−0,652	+0,652
2,−3,2	+0,004	−0,002	−0,004	+0,008
	−10,332	−8,696	+7,686	+9,602

Digitized by Google

4.				
0,0,2	−0″,4653			
	−0,4672			
−1,1,2	−5,4570	−5″,4570	+5″,457	+5″,457
−2,2,2	−0,0055	−0,0110	+0,022	+0,044
1,−1,2	−8,1622	+8,1622	+8,162	−8,162
2,−2,2	+0,0179	−0,0358	−0,072	+0,144
	−14,0740	+2,6583	+13,569	−2,517
0,1,2	+0,995			
−1,2,2	−0,202	−0,202	+0,202	+0,202
1,0,2	−5,870	+5,870	+5,870	−5,870
2,−1,2	−0,224	+0,448	+0,896	−1,792
3,−2,2	+0,001	−0,003	−0,009	+0,027
	−5,300	+6,113	+6,959	−7,233
0,2,2	+0,027			
−1,3,2	−0,010	−0,010	+0,010	
1,1,2	−0,005	+0,005	+0,005	
2,0,2	−0,161	+0,322	+0,644	
3,−1,2	−0,009	+0,027	+0,081	
	−0,158	+0,344	+0,740	
0,−2,1	+0,002			
−1,−1,1	0,000			
−2,0,1	+0,004	+0,008	−0,016	
1,−3,1	+0,001	−0,001	−0,001	
	+0,007	+0,007	−0,017	
0,−1,1	+0,046			
−1,0,1	+0,163	+0,163	−0,163	−0,163
−2,1,1	+0,002	+0,004	−0,008	−0,016
1,−2,1	−0,010	+0,010	+0,010	−0,010
	+0,201	+0,177	−0,161	−0,189
0,0,1	+0,0150			
	+0,0200			
−1,1,1	+0,0631	+0,0631	−0,063	−0,063
1,−1,1	+0,0993	−0,0993	−0,099	+0,099
2,−2,1	−0,0003	+0,0006	+0,001	−0,002
	+0,1821	−0,0356	−0,161	+0,034
0,1,1	+0,004			
−1,2,1	−0,001	−0,001	+0,001	
1,0,1	−0,017	+0,017	+0,017	
2,−1,1	+0,003	−0,006	−0,012	
	−0,011	+0,010	+0,006	
0,0,0	+0,00073			
−1,1,0	+0,00014	+0,00014		
1,−1,0	+0,00007	−0,00007		
	+0,00094	+0,00007		
5.				
0,1,2	+0,001			
−1,2,2	−0,001	−0,001		
1,0,2	−0,016	+0,017		
	−0,016	+0,016		

Digitized by Google

5.				
0,2,2	−0″,010			
−1,3,2	+0,002	+0″,002		
1,1,2	+0,020	−0,020		
	+0,012	−0,018		
12.				
0,3,−1	−0,003			
−1,4,−1	+0,002	+0,002		
1,2,−1	+0,002	−0,002		
	+0,001	0,000		
0,1,−2	−0,002			
−1,2,−2	−0,002	−0,002	+0″,002	
−2,3,−2	+0,001	+0,002	−0,004	
1,0,−2	−0,028	+0,028	+0,028	
	−0,031	+0,028	+0,026	
0,2,−2	−0,062			
−1,3,−2	+0,039	+0,039	−0,039	
−2,4,−2	−0,004	−0,008	+0,016	
1,1,−2	+0,018	−0 018	−0,018	
	−0,009	+0,013	−0,041	
0,3,−2	+0,263			
−1,4,−2	−0,137	−0,137	+0,137	
1,2,−2	−0,119	+0,119	+0,119	
	+0,007	−0,018	+0,256	
0,4,−2	+0,039			
−1,5,−2	−0,014	−0,014		
1,3,−2	−0,025	+0,025		
2,2,−2	−0,003	+0,006		
	−0,003	+0,017		
0,5,−2	+0,003			
−1,6,−2	−0,001	−0,001		
1,4,−2	−0,002	+0,002		
2,3,−2	−0,001	+0,002		
	−0,001	−0,001		
0.2,−3	−0,003			
−1,3,−3	+0,003	+0,003	−0,003	
1,1,−3	+0,001	−0,001	−0,001	
	+0,001	+0,002	−0,004	
0,3,−3	+0,014			
−1,4,−3	−0,007	−0,007		
1,2,−3	−0,006	+0,006		
	+0,001	−0,001		
0,4,−3	+0,002			
−1,5,−3	0,000			
1,3,−3	−0,002	−0,002		
	0,000	−0,002		

Digitized by Google

13.				
0,1,−3	0″,000			
−1,2,−3	+0,001	+0″,001		
1,0,−3	+0,002	−0,002		
	+0,003	−0,001		
0,2,−3	+0,024			
−1,3,−3	−0,010	−0,010	+0″,010	
1,1,−3	−0,004	+0,004	+0,004	
	+0,010	−0,006	+0,014	
0,0,−4	−0,0675			
	−0,0753			
−1,1,−4	−0,0180	−0,0180		
−2,2,−4	−0,0006	−0,0012		
−3,3,−4	+0,0003	+0,0009		
1,−1,−4	+0,0074	−0,0074		
	−0,0862	−0,0257		
0,1,−4	−0,241			
−1,2,−4	−0,021	−0,021	+0,021	
−2,3,−4	+0,008	+0,016	−0,032	
1,0,−4	−0,349	+0,349	+0,349	
	−0,603	+0,344	+0,338	
0,2,−4	−0,687			
−1,3,−4	+0,286	+0,286	−0,286	
1,1,−4	−0,061	+0,061	+0,061	
2,0,−4	−0,010	+0,020	+0,040	
	−0,472	+0,367	−0,185	
0,3,−4	0,000			
−1,4,−4	+0,004	+0,004	−0,004	
1,2,−4	−0,023	+0,023	+0,023	
2,1,−4	−0,002	+0,004	+0,008	
	−0,021	+0,031	+0,027	
0,4,−4	+0,001			
−1,5,−4	−0,001	−0,001		
1,3,−4	−0,002	+0,002		
2,2,−4	−0,001	+0,002		
	−0,003	+0,003		
0,1,−5	−0,028			
−1,2,−5	−0,001	−0,001	+0,001	
−2,3,−5	+0,001	+0,002	−0,004	
1,0,−5	−0,026	+0,026	+0,026	
	−0,054	+0,027	+0,023	
0,2,−5	−0,078			
−1,3,−5	+0,033	+0,033	−0,033	
1,1,−5	−0,006	+0,006	+0,006	
2,0,−5	−0,001	+0,002	+0,004	
	−0,052	+0,041	−0,023	
0,3,−5	0,000			
−1,4,−5	0,000			
1,2,−5	−0,003	+0,003		
	−0,003	+0,003		

Digitized by Google

16.				
0,3,−4	−0,001			
−1,4,−4	+0,001	+0,001		
1,2,−4	−0,001	+0,001		
	−0,001	+0,002		
0,4,−4	+0,006			
−1,5,−4	−0,004	−0,004		
1,3,−4	−0,001	+0,001		
	+0,001	−0,003		
0,5,−4	+0,001			
−1,6,−4	−0,001	−0,001		
1,4,−4	0,000	0,000		
	0,000	−0,001		
17.				
0,2,−6	−0,002			
−1,3,−6	+0,001	+0,001		
1,1,−6	0,000	0,000		
	−0,001	+0,001		
0,3,−6	−0,005			
−1,4,−6	+0,005	+0,005		
1,2,−6	−0,002	+0,002		
	−0,002	+0,007		
0,4,−6	+0,004			
−1,5,−6	+0,004	+0,004		
1,3,−6	−0,002	+0,002		
	0,000	+0,003		

Die Zahlen, die in jeder Abtheilung dieser Tafel unter dem kurzen Striche angesetzt sind, sind die Summen der darüber stehenden. Sie sind also die Coefficienten der Functionen (ΔW_0), $\left(\frac{d\Delta W_0}{dy}\right)$, etc. Mit den doppelten Zahlen, die neben den Argumenten angesetzt sind, von welchen wenigstens die zwei ersten Indices Nullen sind, hat es dieselbe Bewandniss wie im Art. 106, die obere dieser Zahlen ist ohne Weiteres aus den vorhergehenden Angaben entsprungen, die untere aber durch die Anwendung der Gleichungen (74) und (75) der Artt. 190 und 191. Da die letztere jedenfalls die genauere ist, so ist sie bei den Additionen, gleichwie im Art. 106 geschehen ist, benutzt worden.

237.

Ehe ich weiter gehe, will ich die Einzelheiten der Berechnung der eben genannten Zahlen durch die Gleichungen (74) und (75) angeben. Zuerst ist die Function $-3a\overline{\Omega}$ nach der Formel

$$-3a\bar{\Omega} = -3a\Omega_0 - 3\left(\frac{da\Omega_0}{dg}\right)n\delta z - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2a\Omega_0}{dg^2}\right)(n\delta z)^2 + H\delta P + N\delta Q$$

zu berechnen, und hiebei auf alle merkliche Glieder Rücksicht zu nehmen. Die beiden letzten Producte dieses Ausdrucks sind wieder die Fortsetzung der gleichbenannten Producte des Art. 116, und es sind also dafür dieselben, dort gegebenen Werthe von H und N, die sich auf $-3a\Omega$ beziehen, anzuwenden. Hiemit ergab sich*)

g, g'	$-3a\Omega_0$ cos	$-3a\Omega_1$ cos	$-3a\Omega_2$ cos	$H\delta P$ cos	$+N\delta Q$ cos	$-3a\bar{\Omega}$ cos
3.						
2,2	−0″,007	+0″,001				−0″,006
0,1	−0,0020	−0,0008			+0″,0007	−0,0021
1,1	+0,044	+0,003		+0″,007	−0,002	+0,052
2,1	−0,266	+0,033		−0,036	+0,011	−0,258
3,1	−0,015	+0,007		−0,001		−0,009
0,0	−0,08012	−0,00666	−0″,00005	+0,00120	+0,02944	−0,05619
1,0	+1,748	−0,003	+0,002	+0,047	−0,072	+1,722
2,0	−10,551	+0,007	+0,006	−0,292	+0,340	−10,490
3,0	−0,580	+0,003	+0,003	−0,006	+0,006	−0,574
4,0	−0,032					−0,032
0,−1	−0,0020	+0,0001		+0,0002	+0,0006	−0,0011
1,−1	+0,044	−0,001		−0,002	−0,002	+0,039
2,−1	−0,266	−0,034		+0,014	+0,015	−0,271
3,−1	−0,015	−0,009		+0,001		−0,023
2,−2	−0,007	−0,001				−0,008
4.						
0,1	−0,0256	+0,0006		−0,0019	+0,0014	−0,0255
−1,1	+0,034			+0,001	−0,001	+0,034
0,1	−0,6269	+0,0093	−0,0005	−0,0229	+0,0370	−0,6040
1,1	+0,034	+0,016	−0,001	+0,002	−0,002	+0,049
−2,2	+0,008			+0,015	+0,014	+0,037
−1,2	+0,583	−0,006		−0,024	−0,044	+0,509
0,2	−10,6672	+0,0913	+0,0001	+0,0459	+0,5552	−9,9747
1,2	+0,583	+0,238		+0,002	−0,054	+0,769
2,2	+0,008	+0,018		−0,003	−0,004	+0,019
−1,1	−0,005	−0,001			−0,001	−0,007
0,1	+0,0896	+0,0012	+0,0001	+0,0276	+0,0032	+0,1216
1,1	+0,005	+0,006	+0,001	−0,002	−0,001	+0,001
0,0	0	+0,00005		+0,00010	−0,00010	+0,00005

*) Es ist wieder hier zur Abkürzung gesetzt

$$\left(\frac{da\Omega_0}{dg}\right)n\delta z = a\Omega_1;\ \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2a\Omega_0}{dg^2}\right)(n\delta z)^2 = a\Omega_2$$

Digitized by Google

12.					
3,−4		−0,005	+0,001		−0,004
1,−2			+0,002	−0,002	0,000
2,−2		+0,021	−0,014	+0,014	+0,021
3,−2		−0,220	+0,017	−0,016	−0,219
4,−2		−0,129	−0,046	+0,017	−0,128
5,−2		−0,013	−0,002	+0,001	−0,014
2,−3		+0,001			+0,001
3,−3		−0,015	−0,001		−0,016
4,−3		−0,012	−0,003	+0,003	−0,012
13.					
2,−3			−0,008	−0,009	−0,017
0,−4	−0,0046	−0,0027	+0,0009	+0,0008	−0,0056
1,−4	−0,001	−0,002	−0,059	−0,057	−0,119
2,−4	+0,007	−0,001	+0,292	+0,296	+0,594
3,−4	+0,003		+0,017	+0,018	+0,038
1,−5			−0,005	−0,004	−0,009
2,−5			+0,030	+0,029	+0,059

238.

Hierauf werde ich die ganz ähnliche Berechnung des Ausdrucks für $3\left(\frac{da\overline{\Omega}}{dg'}\right)$ folgen lassen. Die hiezu erforderlichen Ausdrücke von H und N erhalten wir aus dem Art. 209, denn es ist sehr leicht zu finden, dass hier

$$H = R + R_1 + R_2 + \tfrac{1}{2}S\partial P + \tfrac{1}{2}V\partial Q$$
$$N = Y + Y_1 + Y_2 + \tfrac{1}{2}V\partial P + \tfrac{1}{2}Z\partial Q$$

wenn unter R, Y, etc. die dort gegebenen Werthe verstanden werden. Es wird somit zuerst

g, g'	H cos	N sin	g, g'	H cos	N sin
1.			2.		
0,0	−2,45		0,−2	−3,79	−3,49
1,0	+11,16	+10,72	1,−2	+78,16	+77,79
2,0	+0,80	+0,78	2,−2	−469,51	−468,99
−1,−1	+0,41	+0,21	3,−2	−25,68	−25,67
0,−1	−0,06	−11,69	4,−2	−1,41	−1,40
1,−1	+0,95	+1,56	0,−3	−0,32	−0,25
0,−2	+0,03	−0,62	1,−3	+6,89	+6,82
2.			2,−3	−43,14	−42,76
1,−1	−0,23	−0,18	3,−3	−2,65	−2,63
2,−1	+3,71	+3,41	2,−4	−2,42	−2,39

Digitized by Google

11.		
2, −4	+0″91	+0″91
3, −4	−9,92	−9,89
4, −4	−5,46	−5,46
3, −5	−1,33	−1,34
4, −5	−0,87	−0,87
3.		
1,1	+0,99	+0,99
2,1	−6,00	−5,99
1,0	+0,36	+0,36
2,0	−2,82	−2,85
1, −1	−0,95	−0,95
2, −1	+5,71	+5,71

4.		
0,1	−2″31	−2″32
−1,3	+2,32	+2,32
0,3	−42,17	−42,01
1,3	+2,40	+2,41
−2,2	+0,53	+0,52
−1,2	+25,86	+25,77
0,2	−476,32	−474,38
1,2	+26,07	+25,97
0,1	+2,18	+2,16
13.		
0, −1	−0,30	+0,30
1, −1	−0,92	+0,91
2, −1	+3,86	−3,83
3, −1	+0,33	−0,31

Hiemit fand sich nun

g, g'	$3\left(\frac{da\Omega_0}{dg'}\right)$ sin	$3\left(\frac{da\Omega_0}{dg'}\right)_1$ sin	$3\left(\frac{da\Omega_0}{dg'}\right)_2$ sin	$H\partial P$ sin	$N\partial Q$ sin	$3\left(\frac{da\overline{\Omega}_0}{dg'}\right)$ sin
3.						
0,1	−0″0020	−0″0010		+0″0007	+0″0003	−0″0020
1,1	+0,044			−0,002	+0,003	+0,045
2,1	−0,266	+0,001		+0,015	−0,015	−0,265
3,1	−0,015			+0,001	−0,001	−0,015
0,0		−0,01282		+0,0880	−0,0751	−0,01153
1,0		−0,006		−0,069	+0,067	−0,008
2,0		+0,011		+0,506	−0,506	+0,011
3,0		+0,006		+0,023	−0,025	+0,004
4,0				+0,002	−0,002	0,000
0, −1	+0,0020	−0,0005		+0,0003	−0,0010	+0,0008
1, −1	−0,044			−0,005	+0,005	−0,044
2, −1	+0,266			+0,036	−0,039	+0,266
3, −1	+0,015			+0,001	−0,002	+0,014
2, −2	+0,044	+0,001		+0,002	−0,002	+0,015
4.						
0,1	−0,1024	+0,0002		−0,0054	+0,0012	−0,1064
−2,3	+0,001			+0,003	+0,003	+0,007
−1,3	+0,102	+0,002			−0,003	+0,101
0,3	−1,8807	+0,0022		−0,0500	+0,0137	−1,9148
1,3	+0,102	+0,004		+0,003	−0,001	+0,108
−3,2	0,000			+0,002	+0,002	+0,004
−2,2	+0,016			+0,030	+0,027	+0,073
−1,2	+1,116			−0,043	−0,030	+1,093
0,2	−21,3344	−0,0002	−0″0002	+0,0571	−0,0358	−21,3135
1,2	+1,166			−0,005	+0,009	+1,170
2,2	+0,046			−0,001	+0,001	+0,046

Digitized by Google

4.						
−1,1	−0″,005			−0″,003		−0″,008
0,1	+0,0896	−0″,0023		+0,0565	−0″,0137	+0,1301
1,1	−0,005	−0,0006		−0,004	+0,002	−0,013
0,0	0	−0,00012	−0″,00001	+0,00041	−0,00047	−0,00019
12.						
1,−2				−0,005	+0,005	
2,−2				+0,030	−0,030	
3,−2				−0,008	+0,008	
4,−2				+0,047	−0,047	
5,−2				+0,004	−0,004	
2,−3				+0,003	−0,003	
3,−3		+0,006				+0,006
4,−3		+0,003		+0,005	−0,005	+0,003
13.						
2,−3				+0,016	+0,016	+0,032
0,−4		+0,0126		−0,0008	−0,0001	+0,0117
1,−4		+0,006		+0,148	+0,147	+0,241
2,−4		−0,013		−0,595	−0,598	−1,206
3,−4		−0,006		−0,036	−0,034	−0,076
4,−4				−0,002	−0,002	−0,004
1,−5				+0,015	+0,013	+0,028
2,−5		−0,002		−0,079	−0,072	−0,153
3,−5				−0,004	−0,004	−0,008

239.

Da nun

$$-3a\Omega = -3a\overline{\Omega} - 3a\overline{\Omega}(2\nu+\nu^2)$$

$$3\left(\frac{da\Omega}{dg'}\right) = 3\left(\frac{da\overline{\Omega}}{dg'}\right) + 3a\left(\frac{da\overline{\Omega}}{dg'}\right)(2\nu+\nu^2)$$

so sind vor Allem die beiden Producte dieser Ausdrücke zu berechnen. Hiebei braucht man aber nur auf die Argumente Rücksicht zu nehmen, in welchen wenigstens der erste Index Null ist. Es fand sich, wenn die in den beiden vorhergehenden Artt. berechneten Coefficienten mit zugezogen werden,

g, g'	$-3a\overline{\Omega}$ cos	$-3a\overline{\Omega}(2\nu+\nu^2)$ cos	$-3a\Omega$ cos	$3\left(\frac{da\overline{\Omega}}{dg'}\right)$ sin	$3\left(\frac{da\overline{\Omega}}{dg'}\right)(2\nu+\nu^2)$ sin	$3\left(\frac{da\Omega}{dg'}\right)$ sin
3.						
0,1	−0″,0021	−0″,0011	−0″,0032	−0″,0020	−0″,0006	−0″,0026
0,0	−0,05619	−0,00945	−0,06564	−0,01153	−0,00598	−0,01751
0,−1	−0,0011	−0,0002	−0,0013	+0,0008	−0,0002	+0,0006

Digitized by Google

4.						
0,4	−0″,0255	+0″,0005	−0″,0250	−0″,4064	+0″,0042	−0″,4052
0,3	−0,6040	+0,0123	−0,5917	−1,9148	+0,0227	−1,8921
0,2	−9,9747	+0,1850	−9,7897	−21,3135	+0,2680	−21,0455
0,1	+0,1216	−0,0021	+0,1195	+0,1301	−0,0061	+0,1240
0,0	−0,00005	+0,00005	+0,00010	−0,00019	−0,00014	−0,00033
13.						
0,−4	−0,0056	−0,0049	−0,0105	+0,0117	+0,0063	+0,0180

240.

Von den ausserdem zu berechnenden Producten brauchen auch nur die Glieder aufgenommen zu werden, in deren Argumenten wenigstens der erste Index Null ist, und ausser den übrigen vorhandenen, dazu erforderlichen Factoren sind noch die Functionen

$$\Delta f\Upsilon = (\Delta III_{-1} + \Delta III_1)\cos(n\beta t + \theta)$$
$$\Delta f''\Psi = (\Delta III_{-1} - \Delta III_1)\sin(n\beta t + \theta)$$

aus dem Ausdruck von ΔW_0 des Art. 236 zu berechnen. Es fand sich

g, g'	$\Delta f\Upsilon$ cos	$\Delta f''\Psi$ sin	g, g'	$\Delta f\Upsilon$ cos	$\Delta f''\Psi$ sin
3.			4.		
0,4	−0″,525	+0″,525	1,2	−5″,462	−5″,452
1,1	+0,483	−0,479	2,2	−0,202	−0,202
2,1	−0,003	−0,049	3,2	−0,010	−0,010
3,1	+0,044	+0,044	−2,1	−0,010	+0,010
−1,0	−0,035	+0,035	−1,1	+0,099	−0,099
0,0	−87,092	+86,948	0,1	+0,146	+0,180
1,0	+19,841	−19,743	1,1	+0,063	+0,063
2,0	−0,048	−0,740	12.		
3,0	+2,010	+1,990	0,−2	−0,028	+0,028
4,0	+0,448	+0,448	1,−2	+0,048	−0,048
0,−1	+0,398	−0,398	2,−2	−0,121	+0,117
1,−1	+0,503	−0,503	3,−2	+0,014	+0,064
2,−1	+0,004	−0,017	4,−2	−0,139	−0,135
3,−1	+0,054	+0,054	5,−2	−0,014	−0,014
4.			2,−3	−0,006	+0,006
−2,3	+0,044	−0,044	3,−3	+0,001	+0,005
−1,3	−0,560	+0,554	13.		
0,3	−0,583	−0,107	3,−3	−0,010	−0,010
1,3	−0,307	−0,307	0,−4	−0,349	+0,349
2,3	−0,010	−0,010	1,−4	−0,079	+0,043
−3,2	+0,028	−0,028	2,−4	−0,044	+0,002
−2,2	+0,651	−0,653	3,−4	+0,284	+0,288
−1,2	−8,193	+8,131	4,−4	+0,004	+0,004
0,2	−13,612	−1,872			

Digitized by Google

und darauf die folgenden

g, g'	(27) $\Delta\frac{h_0}{h}$ cos	(28) ΔfY cos	(29) $\Delta f''\Psi$ cos	(30) $n\Delta z$ cos	(31) Δv cos	$-3a\Delta\Omega$ cos
3.						
0,1	+0″,0008	−0″,0129	−0″,0215	+0″,0023	+0″,0009	−0″,0032
0,0	+0,05812	−0,15432	+0,11844	+0,05000	+0,02702	−0,06564
0,−1	−0,0002	−0,0128	+0,0349	+0,0012	+0,0006	−0,0013
4.						
0,4	−0,0001	+0,0004	+0,0004	+0,0004	+0,0003	−0,0250
0,3	−0,0031	−0,0011	−0,0008	+0,0134	+0,0006	−0,5917
0,2	−0,0257	−0,2957	−0,3066	+0,1552	+0,0839	−9,7897
0,1	−0,0008	+0,0088	+0,0087	+0,0020	0,0000	+0,1195
0,0	+0,00027	+0,00034	+0,00040	+0,00006	+0,00003	+0,00010
13.						
0,−4	+0,0007	−0,1469	+0,0720	+0,0046	+0,0041	−0,0105

deren Summe $\Delta\Xi - u\Delta X$ giebt. Ferner

g, g'	(34) $n\Delta z$ sin	(35) Δv sin	$3\left(\frac{da\Omega}{dg'}\right)$ sin	$\frac{d.\Delta X}{ndt}$ sin
3.				
0,1	+0″,0026	+0″,0013	−0″,0026	+0″,0013
0,0	+0,01749	+0,00443	−0,01751	+0,00441
0,−1	−0,0005	−0,0006	+0,0006	−0,0005
4.				
0,4	+0,0020	+0,0013	−0,1052	−0,1019
0,3	+0,0348	+0,0230	−1,8921	−1,8343
0,2	+0,3375	+0,2407	−21,0455	−20,4673
0,1	+0,0049	+0,0020	+0,1240	+0,1309
0,0	+0,00028	+0,00010	−0,00033	+0,00005
13.				
0,−4	−0,0074	−0,0080	+0,0180	+0,0026

Nach der Addition der Zahlen der ersten dieser beiden Tafeln und nach der Integration von $d.\Delta X$ erhält man nun

Digitized by Google

$g,\ g'$	$\Delta\Xi - u.\Delta X$ cos	$u.\Delta X$ cos	$\Delta\Xi$ cos
3.			
0,4	−0″0336	−0″0010	−0″0346
0,0	+0,03362	−0,01322	+0,02040
0,−1	+0,0224	−0,0008	+0,0216
4.			
0,4	−0,0236	+0,0248	+0,0012
0,3	−0,5830	+0,5903	+0,0073
0,2	−10,1786	+9,7114	−0,4672
0,1	+0,1382	−0,1182	+0,0200
0,0	+0,00120	−0,00047	+0,00073
13.			
0,−1	−0,0760	+0,0007	−0,0753

welcher Werth von $\Delta\Xi$ im Art. 235 in ΔW_0 aufgenommen worden ist.

241.

Es sind jetzt die Producte zu berechnen, die die Ausdrücke (68) und (69) des Art. 187 erfordern, diese habe ich im Folgenden zusammen gestellt.

$g,\ g'$	$\left(\frac{d\Delta W_0}{dy}\right)n\delta z$ cos	$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\Delta W_0}{dy^2}\right)(n\delta z)^2$ cos	(10) $n\Delta z$ cos	(11) Δv cos	(12) $\Delta\frac{h_0}{h}$ cos	Summe cos
3.						
2,2	−0″001					−0″001
0,4	+0,0275	+0″0006	+0″0243	−0″0133		+0,0391
1,4	+0,133		−0,021	+0,001		+0,113
2,4	−0,040		−0,019	+0,008		−0,021
3,4	−0,005		−0,003	−0,001		−0,009
−1,0	+0,003			−0,001		+0,002
0,0	+0,09764	+0,00497	+0,07812	−0,05970	+0″00035	+0,12135
1,0	+0,015	+0,012	−0,545	−0,684		−1,202
2,0	−0,078	+0,003	−1,107	−0,031		−1,213
3,0	−0,035	−0,001	−0,139	−0,021		−0,196
4,0	−0,003		−0,011	−0,002		−0,016
0,−1	−0,0131		−0,0141	+0,0049		−0,0223
1,−1	−0,135		−0,002	+0,002		−0,135
2,−1	−0,006		−0,070	−0,013		−0,089
3,−1	+0,004		−0,009			−0,005
2,−2	+0,001		−0,002			−0,001

Digitized by Google

4.						
0,4	+0″,0017		+0″,0008	−0″,0006		+0″,0019
−2,3	−0,002		−0,001	−0,003		−0,006
−1,3	+0,023	−0″,001	+0,094	−0,029		+0,087
0,3	+0,0452	−0,0014	+0,0251	−0,0221		+0,0468
1,3			+0,016	+0,002		+0,018
−3,2			−0,001	−0,001		−0,002
−2,2	+0,012			−0,023		−0,011
−1,2	+0,455	+0,002	+1,067	−0,391		+1,133
0,2	+0,8766	+0,0031	+0,6680	−0,4961	+0″,0002	+1,0518
1,2	−0,153	+0,002	−0,009	−0,013		−0,173
2,2	−0,010		+0,005	+0,002		−0,003
−2,1	+0,003		+0,001	+0,001		+0,005
−1,1	+0,007	+0,001	−0,037	+0,007		−0,022
0,1	−0,0146	+0,0016	−0,0024	+0,0058		−0,0096
1,1	−0,014		−0,021	−0,001		−0,036
0,0	−0,00053		−0,00058	+0,00027		−0,00084
12.						
2,−1		+0,002	+0,001	+0,001		+0,004
3,−1	+0,005	+0,001	+0,013	+0,004		+0,023
1,−2	+0,009		+0,057	−0,022		+0,044
2,−2	−0,939	−0,001	−0,661	−0,455		−2,056
3,−2	−0,310	−0,001	−1,138	−0,300		−1,749
4,−2	+0,066		−0,032	+0,007		+0,041
5,−2	+0,008		−0,001	+0,001		+0,008
1,−3			+0,002			+0,002
2,−3	−0,038	−0,002	−0,022	−0,018		−0,080
3,−3	−0,020	−0,001	−0,075	−0,020		−0,116
4,−3	+0,005		−0 001	+0,002		+0,006
13.						
1,−3			−0,022	+0,001		−0,021
2,−3	+0,003		−0,036	+0,002		−0,031
0,−4	+0,0669	+0,0009	+0,0414	−0,0288		+0,0804
1,−4	+0,067	−0,004	+0,782	−0,091		+0,754
2,−4	−0,071	−0,005	+1,044	−0,107		+0,861
3,−4	−0,048	−0,001	−0,065	−0,044		−0,158
4,−4	−0,004		−0,008	−0,003		−0,015
1,−5	+0,008		+0,065	−0,006		+0,067
2,−5	−0,005		+0,115	−0,009		+0,101
3,−5	−0,005		−0,007	−0,006		−0,018
16.						
3,−4	−0,006	+0,005	−0,016	−0,013		−0,030
4,−4	−0,007	+0,004	−0,040	−0,019		−0,062
5,−4	−0,001		−0,017	−0,007		−0,025
17.						
2,−6	−0,004	−0,001	+0,011			+0,006
3,−6	−0,007	−0,001	+0,024			+0,016
4,−6	−0,003		+0,008	−0,001		+0,004

Digitized by Google

g, g'	$\left(\frac{d^2\Delta W_0}{dy^2}\right) n\partial z$	$\frac{1}{4}\left(\frac{d^2\Delta W_0}{dy^2}\right)(n\partial z)^2$	(14) $n.fz$	(15) Δv	Summe
	sin	sin	sin	sin	sin
3.					
2,2	+0,001		−0,001		0,000
0,1	−0,0203	−0,0003	+0,0154	+0,0001	−0,0051
1,1	−0,126		+0,002		−0,124
2,1	+0,011		+0,027		+0,038
3,1	+0,007		+0,005		+0,012
−1,0	+0,010		−0,005	+0,001	+0,006
0,0	+0,08670	−0,00194	−0,11766	+0,01973	−0,01617
1,0	+0,187	−0,013	+0,021	−0,002	+0,193
2,0	+0,144	−0,005	+1,365	−0,020	+1,484
3,0	+0,045		+0,237	+0,001	+0,283
4,0	+0,005		+0,028		+0,033
0,−1	+0,0180	−0,0002	−0,0184	−0,0001	−0,0007
1,−1	+0,144		−0,010		+0,134
2,−1	+0,011		+0,077		+0,088
3,−1	−0,003		+0,015		+0,012
2,−2	−0,001		+0,002		+0,001
4.					
0,1	−0,0032		−0,0001		−0,0033
−2,3	−0,004		+0,007		+0,003
−1,3	−0,052	+0,001	+0,118		+0,067
0,3	−0,0655	+0,0016	−0,0058	−0,0001	−0,0698
1,3	−0,001		−0,025		−0,026
−3,2			+0,006		+0,006
−2,2	−0,014		+0,069	+0,002	+0,057
−1,2	−0,453	+0,001	+1,377	+0,003	+0,928
0,2	−0,8754	−0,0005	+0,1626	−0,0009	−0,7142
1,2	+0,153	−0,001	−0,135	−0,003	+0,014
2,2	+0,019		−0,017	−0,001	+0,001
−2,1	+0,002		−0,002		0,000
−1,1	+0,021	−0,001	−0,036		−0,016
0,1	+0,0377	−0,0016	−0,0136	+0,0001	+0,0226
1,1	+0,020		+0,017		+0,037
0,0	+0,00054	+0,00001	−0,00062		−0,00007
12.					
2,−1		−0,002	−0,001		−0,003
3,−1	−0,006	−0,001	−0,010		−0,017
1,−2	−0,009		−0,051		−0,060
2,−2	+0,946		+0,596		+1,542
3,−2	+0,321		+1,420		+1,741
4,−2	−0,069		+0,111		+0,042
5,−2	−0,013		+0,009		−0,004
1,−3			−0,002		−0,002
2,−3	+0,038	+0,002	+0,019		+0,059
3,−3	+0,018	+0,001	+0,090		+0,109
4,−3	−0,010		+0,006		−0,004

Digitized by Google

13.					
1, −3	−0″003		+0″022		+0″019
2, −3	−0,004		+0,046		+0,042
0, −4	+0,0768	−0″0001	−0,0404		+0,0363
1, −4	+0,189	−0,005	−0,758		−0,574
2, −4	+0,163	−0,005	−1,332		−1,174
3, −4	+0,054	−0,001	+0,011		+0,064
4, −4	+0,006		+0,006		+0,012
1, −5	+0,022		−0,063		−0,041
2, −5	+0,048		−0,149		−0,131
3, −5	+0,005		+0,001		+0,006
16.					
3, −4	+0,006	+0,005	+0,016		+0,027
4, −4	+0,007	+0,005	+0,046		+0,058
5, −4	+0,001	+0,001	+0,022		+0,024
17.					
2, −6	+0,006		−0,012		−0,006
3, −6	+0,001		−0,026		−0,025
4, −6	−0,001		−0,011		−0,012

242.

Addirt man nun die Glieder nach Maassgabe der Gleichungen (68) und (69) und führt die Integrationen aus, so ergiebt sich das folgende Resultat,

g, g'	$n\Delta z$ sin	Diff.	Δv cos	$-v\Delta w$ cos	Δw cos	Diff.
3.						
2, 2	+0″002	—	−0″002		−0″002	—
0, 1	+0,037	+11	−0,009	+0″006	−0,003	−5
1, 1	−0,351	−2	+0,178	+0,001	+0,179	0
2, 1	+0,127	+3	−0,088	−0,003	−0,091	−3
3, 1	+0,001	+1	−0,003		−0,003	0
−1, 0	+0,070	+2	+0,032	+0,001	−0,033	−3
0, 0	+5,846	+152	+1,074	+0,024	+1,098	+24
1, 0	−85,224	+318	+42,400	+0,332	+42,732	−160
2, 0	+4,303	−13	−2,846	+0,011	−2,835	+11
3, 0	+0,094	−9	−0,117	+0,010	−0,107	+1
4, 0	+0,001	—	−0,004		−0,004	—
0, −1	+0,046	−88	+0,004	−0,003	+0,001	−7
1, −1	+0,279	−3	−0,142	−0,002	−0,144	+2
2, −1	+0,119	+4	−0,098	+0 007	−0,091	−3
3, −1	+0,003	0	−0,004	+0,001	−0,003	0
2, −2	+0,004	+1	−0,003		−0,003	0

Digitized by Google

4.						
0,4	−0,″144	—	+0,″017		+0,″017	—
−2,3	+0,012	−2	+0,006	+0,″002	+0,008	−2
−1,3	+0,604	−63	+0,221	+0,014	+0,235	−15
0,3	−3,449	+2	+0,379	+0,011	+0,390	−8
1,3	−0,152	−17	+0,095	−0,001	+0,094	+8
−3,2	+0,005	−1	+0,005		+0,005	0
−2,2	+0,162	−4	+0,121	+0,011	+0,132	−3
−1,2	+10,938	+55	+4,619	+0,191	+4,810	+20
0,2	−81,905	+295	+6,114	+0,200	+6,314	+38
1,2	−4,722	+22	+2,643	+0,007	+2,650	−14
2,2	−0,075	+1	+0,080	−0,001	+0,079	+1
−2,1	−0,006	+1	−0,002		−0,002	−1
−1,1	−0,195	0	−0,088	−0,005	−0,093	+3
0,1	+2,064	−56	−0,079	−0,002	−0,084	−4
1,1	−0,043	−11	+0,022	+0,001	+0,023	+5
0,0	+0,012	−8	0,000		0,000	+4
5.						
1,2	−0,014	+6	+0,007		+0,007	−2
2,2	+0,006	−1	−0,004		−0,004	0
12.						
2,−1	+0,002	0	−0,001		−0,001	−1
3,−1	+0,008	−2	−0,003	−0,001	−0,004	−1
1,−2	+0,015	0	−0,018	+0,011	−0,007	−1
2,−2	−1,092	+7	+0,411	+0,222	+0,633	−4
3,−2	−0,602	+3	+0,298	+0,145	+0,443	−1
4,−2	+0,010	−1	+0,008	−0,004	+0,004	+1
5,−2	+0,001	—	−0,001		−0,001	—
1,−3	+0,002	0	−0,001		−0,001	0
2,−3	−0,044	0	+0,017	+0,008	+0,025	+1
3,−3	−0,041	0	+0,019	+0,009	+0,028	+1
4,−3	+0,002	0	0,000		0,000	−1
13.						
1,−3	−0,023	−6	+0,011		+0,011	0
2,−3	−0,012	−2	+0,010		+0,010	+2
0,−4	+0,020	+14	−0,018	+0,014	−0,004	−12
1,−4	+0,214	−21	−0,163	+0,048	−0,115	+2
2,−4	+0,228	+8	−0,236	+0,048	−0,188	−3
3,−4	−0,066	+2	+0,018	+0,021	+0,039	−3
4,−4	−0,005	+2	+0,002	+0,001	+0,003	+1
1,−5	+0,021	−48	−0,011	+0,004	−0,007	+14
2,−5	+0,030	+4	−0,028	+0,005	−0,023	−1
3,−5	−0,008	+16	+0,002	+0,002	+0,004	0
16.						
3,−4	−0,011	−3	+0,005	+0,004	+0,009	+1
4,−4	−0,046	−3	+0,007	+0,006	+0,013	+1
5,−4	−0,005	−1	+0,002	+0,003	+0,005	0

Digitized by Google

17.						
2,−6	+0″,003	+1	−0″,002	−0″,001	−0″,003	+1
3,−6	+0,005	+2	−0,004	−0,004	−0,005	0
4,−6	+0,001	+2	−0,002	−0,004	−0,003	0

Die »Diff.« überschriebenen Columnen geben den Unterschied mit den der Rechnung zu Grunde gelegten, im Art. 233 angeführten Werthen von $n\Delta z$ und Δv. In einigen der am Schwierigsten zu erhaltenden Coefficienten kommen Unterschiede vor, die ein Paar Zehntheile von Secunden betragen und für die Anwendung von geringem Belang sind. Mehr Einfluss haben indess diese Unterschiede auf die Bestimmung der kleineren Theile der Coefficienten selbst, und dieser ist im Vorhergehenden schon ausreichend bei den Gliedern, die das Quadrat eines kleinen Divisors bekommen, berücksichtigt worden.

243.

Gleichwie im Art. 128 die in der ersten Abhandlung berechneten Störungscoefficienten einer besonderen Prüfung unterworfen wurden, soll dieses auch in Bezug auf die in diesem § berechneten geschehen, und die Gleichung, die dazu dient, ist (71) des Art. 188. Durch Hülfe der Angaben des vor. Art. und der numerischen Werthe der Coefficienten (23), (24), (25) des Art. 206 ergab sich

$g.\ g'$	$\frac{d\Delta z}{dt}$ cos	$2\Delta v$ cos	(23) $n\Delta z$ cos	(24) $\frac{d\Delta z}{dt}$ cos	(25) Δv cos	$\frac{\Delta v''}{h}$ cos	Diff.
3.							
2,2	+0″,005	−0″,005				0″,000	+1
0,1	+0,004	−0,018		+0″,026	+0″,010	+0,022	+2
1,1	−0,386	+0,356		+0,003	−0,005	−0,032	+11
2,1	+0,267	−0,177		−0,004	−0,005	+0,081	−7
3,1	+0,003	−0,006		+0,003	+0,001	+0,004	+1
−1,0	−0,068	+0,064	+0″,002	+0,003	−0,003	−0,002	+1
0,0	+0,147	+2,148	−0,034	+0,067	+0,021	+2,349	−32
1,0	−87,366	+84,800	−0,001	+1,356	+0,275	−0,932	0
2,0	+8,746	−5,694	+0,035	+0,045	+0,061	+3,136	+9
3,0	+0,283	−0,233	−0,001	+0,043	+0,035	+0,127	−24
4,0	+0,006	−0,008		+0,003	+0,002	+0,003	+1
0,−1	−0,002	+0,008		−0,013	−0,005	−0,012	−7
1,−1	+0,265	−0,284		−0,002	+0,001	−0,020	+1
2,−1	+0,231	−0,196		+0,028	+0,016	+0,079	+3
3,−1	+0,008	−0,007		+0,001	+0,001	+0,003	−1
2,−2	+0,008	−0,006				+0,002	0

4.							
0,4	−0″035	+0″034		+0″001		0″000	−1
−2,3	−0,022	+0,012		+0,004	+0″004	−0,002	+4
−1,3	−0,462	+0,442	−0″002	+0,056	+0,037	+0,071	+17
0,3	−0,809	+0,757		+0,042	+0,043	+0,003	+20
1,3	−0,487	+0,489	+0,002	−0,007	−0,003	−0,006	−5
−3,2	−0,014	+0,009		+0,001	+0,001	−0,003	+3
−2,2	−0,297	+0,241	+0,004	+0,029	+0,031	+0,008	+1
−1,2	−9,199	+9,236	−0,038	+0,741	+0,522	+1,262	−23
0,2	−13,022	+12,228	−0,007	+0,962	+0,340	+0,501	+31
1,2	−5,473	+5,287	+0,037	−0,004	−0,030	−0,183	−2
2,2	−0,161	+0,160	+0,003	−0,006	−0,002	−0,006	−1
−2,1	+0,042	−0,004		−0,002	−0,001	+0,005	−5
−1,1	+0,179	−0,176		−0,014	−0,010	−0,021	+5
0,1	+0,173	−0,157		−0,012	−0,005	−0,001	−7
1,1	−0,047	+0,043		+0,001		−0,003	−3
0,0	0,000	0,000				0,000	+12
5.							
1,2	−0,016	+0,014				−0,002	+2
2,2	+0,012	−0,008				+0,004	0
12.							
2,−1	+0,004	−0,002		−0,002	−0,001	−0,001	+1
3,−1	+0,024	−0,006		−0,006	−0,005	+0,007	−6
1,−2	+0,013	−0,036	+0,001	+0,019		−0,003	0
2,−2	−2,065	+0,822		+0,895	+0,378	+0,032	−3
3,−2	−1,742	+0,596		+0,572	+0,480	−0,094	+3
4,−2	+0,038	+0,015		−0,039	−0,014	−0,010	+10
5,−2	+0,007	−0,001		−0,004	−0,001	+0,001	0
1,−3	+0,002	−0,002		+0,001		+0,001	−1
2,−3	−0,079	+0,033		+0,036	+0,014	+0,004	−2
3,−3	−0,115	+0,038		+0,038	+0,030	−0,009	+4
4,−3	+0,006	−0,001		−0,004	−0,001	0,000	0
13.							
1,−3	−0,018	+0,023		−0,003	−0,001	+0,001	0
2,−3	−0,021	+0,020		−0,005	−0,003	−0,009	+1
0,−4	+0,002	−0,036	−0,001	+0,059	+0,022	+0,046	−10
1,−4	+0,151	−0,326		+0,173	+0,084	+0,082	−4
2,−4	+0,389	−0,172		+0,188	+0,122	+0,227	−2
3,−4	−0,179	+0,035		+0,077	+0,063	−0,004	−4
4,−4	−0,018	+0,004		+0,005	+0,003	−0,006	+6
1,−5	+0,013	−0,022		+0,018	+0,008	+0,017	−8
2,−5	+0,049	−0,055		+0,022	+0,014	+0,030	−4
3,−5	−0,021	+0,003		+0,008	+0,006	−0,004	+3
16.							
3,−4	−0,031	+0,044		+0,024	+0,007	+0,011	−11
4,−4	−0,061	+0,045		+0,036	+0,017	+0,007	−9
5,−4	−0,025	+0,005		+0,015	+0,007	+0,002	+3

Digitized by Google

17.							
2, −6	+0″,005	−0″,003		−0″,002		0″,000	0
3, −6	+0,014	−0,007		−0,004	−0″,003	0,000	+2
4, −6	+0,004	−0,003		−0,004	−0,002	−0,002	−3

Die letzte Columne dieser Tafel giebt die Unterschiede zwischen dem hier berechneten Werthe von $\Delta^{\frac{h_0}{h}}$ und dem des Art. 234, sie sind alle befriedigend.

§ 19. Berechnung der Mondstörungen, die den Abtheilungen 6, 7, 14 angehören.

244.

Die hier in der Ueberschrift genannten Störungen werden durch dasselbe Verfahren berechnet werden, wie die des vor. §. Es werden wieder hier unter der Bezeichnung $n\delta z$, ν, etc. die Störungen der Abtheilungen 1, 2, 11, etc., aber unter der Bezeichnung $n\Delta z$, $\Delta\nu$, etc. die der Abtheilungen 6, 7, 14 verstanden. Der Gang der Rechnung ist mit geringer Abweichung derselbe wie im vor. §, und die Erläuterungen, die dort gegeben sind, wären bis auf Weniges hier zu wiederholen. Aus diesem Grunde werde ich sie grösstentheils weglassen, und dafür neben der laufenden Nummer der Artikel die in Klammern eingeschlossene Nummer des Artikels des vor. § anführen, wo sich die bez. Erklärung findet.

245. (230.)

Der schliessliche Ausdruck von $\Delta' T$ ist hier

$$\Delta' T = \Delta' \overline{T} + \Delta' \overline{G}(2\nu + \nu^2) + \Delta' \overline{U}\left\{(1+\nu)^3\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 - 1\right\} + \Delta' \overline{\Sigma}(3\nu + 3\nu^2 + \nu^3)$$

während $\Delta' \overline{T}$, $\Delta' \overline{G}$, $\Delta' \overline{\Sigma}$, $\Delta' \overline{U}$ eben so wie a. a. O. berechnet werden müssen. Der Unterschied im Ausdruck von $\Delta' T$ rührt davon her, dass hier $\Delta' T$ aus $\Omega^{(3)}$ entsteht (s. die Gleichungen (17) des Art. 43). Den Ausdruck der Function $3\nu + 3\nu^2 + \nu^3$ findet man im Art. 68, den von $(1+\nu)^3\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 - 1$ unter der Ueberschrift H wie folgt.

Digitized by Google

g, g'	H cos	g, g'	H cos
1.		2.	
0,0	+2007,66	4,−2	−13,39
1,0	+462,08	5,−2	−0,68
2,0	+24,72	−1,−3	−0,26
3,0	+1,31	0,−3	−2,32
−3,−1	+0,14	1,−3	−225,66
−2,−1	+3,66	2,−3	−437,26
−1,−1	+121,14	3,−3	−19,23
0,−1	+88,51	4,−3	−0,98
1,−1	−140,63	0,−4	−0,22
2,−1	−3,07	1,−4	−7,31
3,−1	−0,10	2,−4	−20,84
−2,−2	+0,05	3,−4	−0,87
−1,−2	+1,55	1,−5	−0,22
0,−2	+2,09	2,−5	−0,84
1,−2	−2,34		
2,−2	−0,02	11.	
		1,−3	−0,11
2.		2,−3	+0,02
1,0	+3,71	3,−3	+0,04
−1,−1	−0,05	4,−3	−0,58
0,−1	+3,87	0,−4	+0,09
1,−1	+39,72	1,−4	−1,16
2,−1	+66,38	2,−4	−12,78
3,−1	+3,01	3,−4	−7,02
4,−1	+0,19	4,−4	+24,44
−2,−2	−0,10	5,−4	+1,51
−1,−2	−3,65	1,−5	−0,05
0,−2	+27,53	2,−5	−1,35
1,−2	−5541,32	3,−5	−1,25
2,−2	−6355,87	4,−5	+3,32
3,−2	−277,78		

246. (231.)

Es wird nunmehr

γ, g, g'	T_0 sin	T_1 sin	T_2 sin	$H\partial P$ sin	$N\partial Q$ sin
6.					
0,0,1	0″	−0″,00001	+0″,00002		
	−0,00008	−0,00006	−0,00001		
	+0,00012	−0,00003	−0,00002		
0,1,1	+0,001	−0,001			
	0,000				
	−0,00207	+0,00036	−0,00005		

Digitized by Google

6.					
0, −1, 0	0″,000		−0″,001		
	+0,00017	+0″,00005	+0,00026		
	0,000				
0, 0, 0	0	+0,00188	−0,00030	−0″,00001	+0″,00002
	−0,00342	−0,00121	+0,00018		−0,00003
	+0,00539	+0,00096	+0,00027		−0,00001
0, 1, 0	+0,054	−0,016	+0,002		
	+0,018	+0,002	−0,001		
	−0,08972	+0,00890	−0,00060	+0,00003	+0,00002
0, 2, 0	−0,003	−0,017	+0,003		
	+0,001	+0,007	−0,002		
	+0,004	+0,010	−0,001		
0, −1, −1	−0,013		−0,010		
	+0,01002	+0,00100	+0,00427	+0,00015	+0,00011
	+0,003	+0,001	+0,006		
0, 0, −1	0	+0,05639	−0,00813	+0,00045	+0,00021
	−0,20364	−0,01634	+0,00343	−0,00075	−0,00052
	+0,32121	+0,01255	+0,00429	−0,00042	+0 00028
0, 1, −1	+3,210	−0,176	−0,001	−0,006	+0,002
	+1,049	+0,065		+0,001	+0,002
	−5,34253	+0,14619	+0,00067	+0,00598	−0,00547
0, 2, −1	−0,175	−0,556		+0,002	
	+0,087	+0,244			
	+0,262	+0,363		−0,002	
0, 3, −1	−0,011	−0,075			
	+0,006	+0,039			
	+0,005	+0,031			
0, −1, −2	−0,001		−0,001		
	+0,0005	−0,0001	+0,0004		
	0,000				
0, 0, −2	0	+0,0047	−0,0011		
	−0,0103	−0,0014	+0,0004		
	+0,0162	+0,0001	+0,0004		
0, 1, −2	+0,162	−0,007	−0,001		
	+0,053	+0,007	+0,001		
	−0,2691	+0,0106	+0,0008	+0,0003	−0,0003
0, 2, −2	−0,009	−0,042	−0,003		
	+0,004	+0,021	+0,002		
	+0,013	+0,028	+0,001		
0, 3, −2	−0,001	−0,006			
	0,000	+0,003			
	0,000	+0,003			
0, 0, −3	0	+0,001			
	−0,0004	−0,001			
	+0,0006	−0,001			
0, 1, −3	+0,006	−0,001			
	+0,002				
	−0,0100	+0,0004			

Digitized by Google

7.					
0,1,−2	−0″,002	+0″,001			
	+0,002	−0,001			
	+0,0024	−0,0008			
0,2,−2	+0,045	−0,005	−0″,001		
	−0,022				
	−0,047	+0,004			
0,3,−2	−0,267	−0,077	−0,001		
	+0,088	+0,033	+0,001		
	+0,269	+0,052			
0,4,−2	−0,029	−0,019			
	+0,012	+0,010			
	+0,017	+0,011			
0,0,−3	0	−0,0001			
	+0,0046				
	+0,0014				
0,1,−3	+0,416	+0,001	+0,001		
	−0,420	−0,002			
	−0,4123	−0,0041	−0,0003		
0,2,−3	−2,651	+0,035	−0,006	−0″,002	
	+1,318	+0,021	+0,003		
	+2,807	−0,001	+0,004	+0,002	
0,3,−3	+15,889	+0,006	−0,023	+0,007	+0″,006
	−5,223	+0,018	+0,013	−0,002	−0,002
	−16,025	+0,008	+0,009	−0,007	−0,006
0,4,−3	+1,751	−0,004	−0,012		
	−0,724	+0,001	+0,008		
	−1,027	+0,001	+0,005		
0,5,−3	+0,150	−0,001	−0,002		
	−0,073		+0,001		
	−0,063				
0,1,−4	+0,010	−0,001			
	−0,010	+0,001			
	−0,0119	+0,0003			
0,2,−4	−0,223	+0,002			
	+0,111	+0,003			
	+0,236	−0,002			
0,3,−4	+1,334	+0,077	−0,003		
	−0,439	−0,032	+0,002		
	−1,346	−0,051	+0,001		
0,4,−4	+0,147	+0,024	−0,004		
	−0,061	−0,012			
	−0,086	−0,013			
0,2,−5	−0,012				
	+0,006	+0,001			
	+0,013				
0,3,−5	+0,071	+0,007			
	−0,023	−0,003			
	−0,072	−0,005			

14.					
0,4,−4		−0″,012	−0″,003		
		+0,005	+0,002		
		+0,008	+0,004		
0,5,−4		−0,008	−0,004		
		+0,004	+0,004		
		+0,006	+0,004		
0,3,−5		−0,062			
		+0,044			
		+0,033			
0,4,−5		+0,487			
		−0,205			
		−0,332			
0,5,−5		+0,323			
		−0,147			
		−0,200			
0,6,−5		+0,052			
		−0,027			
		−0,024			
0,3,−6		−0,008			
		+0,006			
		+0,004			
0,4,−6		+0,062	+0,003		
		−0,026	−0,002		
		−0,042	−0,001		
0,5,−6		+0,048	+0,002		
		−0,022	−0,001		
		−0,030	−0,001		

γ, g, g'	$A'G_0$ sin	$A'G_1$ sin	$A'G_2$ sin	$H\partial P$ sin	$N\partial Q$ sin
6.					
0,0,0	+0″,006	−0″,001			
	−0,006	−0,001			
	+0,004	+0,001			
0,1,0	0,000	−0,001			
	+0,036	−0,007			
	−0,072	+0,006			
0,2,0	−0,003	+0,001			
	+0,002	−0,002			
	+0,004	+0,007	−0″,001		
0,−1,−1	−0,019	−0,003			
	+0,014	+0,001	+0,002		
	+0,003	+0,004			
0,0,−1	+0,351	−0,009			
	−0,350	−0,001	+0,002		
	+0,233	+0,042			

Digitized by Google

6.					
0,1,−1	+0″,010	−0″,020			
	+2,111	−0,004		−0″,001	+0″,002
	−4,274	+0,112		+0,005	−0,003
0,2,−1	−0,174	−0,002			
	+0,116	−0,001			
	+0,233	+0,241			
0,3,−1	−0,010				
	+0,006				
	+0,004	+0,018			
0,0,−2	+0,018	−0,001			
	−0,018	+0,001			
	+0,012	+0,001			
0,1,−2	0,000	−0,002			
	+0,106	+0,007			
	−0,215	+0,008			
0,2,−2	−0,009	−0,001			
	+0,006	+0,002			
	+0,012	+0,019	+0″,001		
0,3,−2		0,000			
		0,000			
		+0,002			
0,1,−3	0,000				
	+0,004				
	−0,008				
7.					
0,1,−2	+0,002				
	0				
	+0,001				
0,2,−2	−0,015	−0,003			
	0				
	−0,030	+0,003			
0,3,−2	−0,001				
	0				
	+0,180	+0,034			
0,4,−2	0				
	0				
	+0,010	+0,007			
0,0,−3	+0,007				
	+0,001				
	+0,001				
0,1,−3	−0,147				
	−0,004	−0,004			
	−0,081	−0,003			
0,2,−3	+0,883		−0,001		
	0	+0,044	+0,002		
	+1,774	−0,001			
0,3,−3	+0,049	−0,004			
	0	+0,026			
	−10,706	+0,007	+0,006	−0,005	−0,005

Digitized by Google

7.					
0,4,−3	+0″,003	−0″,002			
	0	+0,003			
	−0,589	+0,001	+0″,003		
0,5,−3	0				
	0				
	−0,033				
0,4,−4	−0,012				
	0				
	−0,007				
0,2,−4	+0,074	+0,003			
	0	+0,004			
	+0,149	−0,001			
0,3,−4	+0,004				
	0	+0,003			
	−0,899	−0,034	+0,001		
0,4,−4	0				
	0				
	−0,050	−0,009			
0,2,−5	+0,004				
	0				
	+0,008				
0,3,−5	0				
	0				
	−0,048	−0,003			
14.					
0,4,−4		0			
		0			
		+0,005	+0,001		
0,5,−4		0			
		0			
		+0,003			
0,3,−5		+0,018			
		0			
		+0,021			
0,4,−5		+0,011			
		0			
		−0,223			
0,5,−5		+0,001			
		0			
		−0,131			
0,6,−5		0			
		0			
		−0,013			
0,3,−6		+0,003			
		0			
		+0,003			
0,4,−6		+0,002			
		0			
		−0,028	−0,001		

Digitized by Google

14.					
0,5,−6		0 0 −0″018			

g, g'	$\Delta' \Sigma_0$ sin	$\Delta' \Sigma_1$ sin	$\Delta' \Sigma_2$ sin	$H\partial P$ sin	$N\partial Q$ sin
6.					
0,1	−0″00006	+0″00006	+0″00001		
0,0	−0,00246	+0,00087	−0,00011		+0″00001
1,0	+0,018	−0,006			
2,0	0,000	−0,006	+0,001		
−1,−1	+0,004	−0,001	−0,003		
0,−1	−0,14654	+0,02284	−0,00261	+0″00040	
1,−1	+1,072	−0,048	−0,001	−0,002	
2,−1	−0,029	−0,182			
3,−1	−0,001	−0,048			
0,−2	−0,0074	+0,0020	−0,0005		
1,−2	+0,054	−0,002			
2,−2	−0,001	−0,015	−0,004		
0,−3	−0,0003	+0,0001			
1,−3	+0,002	+0,001			
7.					
1,−2	−0,002	+0,001			
2,−2	+0,022				
3,−2	−0,089	−0,025			
4,−2	−0,007	−0,006			
0,−3	−0,0042				
1,−3	+0,116				
2,−3	−1,327	+0,012	−0,002		
3,−3	+5,304	+0,003	−0,007	+0,001	+0,004
4,−3	+0,439		−0,004		
5,−3	+0,030				
1,−4	+0,010				
2,−4	−0,111	+0,004			
3,−4	+0,445	+0,024	−0,004		
4,−4	+0,037	+0,007			
2,−5	−0,006				
3,−5	+0,024	+0,002			
14.					
4,−4		−0,004	−0,004		
5,−4		−0,002			
3,−5		−0,030			
4,−5		+0,158			
5,−5		+0,102			
6,−5		+0,013			
3,−6		−0,003			
4,−6		+0,020	+0,001		
5,−6		+0,016			

Digitized by Google

247. (232.)

γ, g, g'	$\Delta'\bar{T}$	$\Delta'\bar{G}$	$\Delta'\bar{\Sigma}$	$\Delta'\bar{U}$
6.				
0,0,1	−0″,00003		+0″,00001	
	−0,00015			
	+0,00007			
0,1,1	0,000			
	0,000			
	−0,00176			
0,−1,0	−0,001			
	+0,00048			
	0,000			
0,0,0	+0,00159	+0″,005	−0,00169	−0″,002
	−0,00448	−0,007		+0,003
	+0,00661	+0,005		+0,002
0,1,0	+0,040	−0,001	+0,012	+0,029
	+0,019	+0,029		−0,040
	−0,08137	−0,066		−0,015
0,2,0	−0,017	−0,002	−0,005	−0,010
	+0,006			+0,006
	+0,013	+0,010		+0,003
0,−1,−1	−0,023	−0,022		
	+0,01555	+0,017		
	+0,010	+0,007		
0,0,−1	+0,04892	+0,342	−0,12591	−0,467
	−0,21782	−0,349		+0,131
	+0,33794	+0,275		+0,062
0,1,−1	+3,029	−0,010	+1,021	+2,018
	+1,117	+2,108		−0,994
	−5,19516	−4,160		−1,035
0,2,−1	−0,728	−0,176	−0,211	−0,361
	+0,331	+0,115		+0,216
	+0,623	+0,474		+0,149
0,3,−1	−0,086	−0,010	−0,019	−0,057
	+0,045	+0,006		+0,039
	+0,036	+0,022		+0,014
0,−1,−2	−0,002			
	+0,0008			
	0,000			
0,0,−2	+0,0036	+0,017	−0,0059	−0,007
	−0,0113	−0,017		+0,006
	+0,0168	+0,013		+0,004
0,1,−2	+0,154	−0,002	+0,052	+0,104
	+0,061	+0,113		−0,052
	−0,2577	−0,207		−0,051
0,2,−2	−0,054	−0,010	−0,017	−0,027
	+0,027	+0,008		+0,019
	+0,042	+0,032		+0,010

Digitized by Google

6.				
0,3,−2	−0″,007			
	+0,003			
	+0,003	+0″,002		
0,0,−3	+0,0001		−0″,0002	
	−0,0005			
	+0,0005			
0,1,−3	+0,005		+0,003	
	+0,002	+0,004		
	−0,0096	−0,008		
7.				
0,1,−2	−0,001	+0,002	−0,001	−0″,002
	+0,001			+0,001
	+0,0016	+0,001		+0,001
0,2,−2	+0,039	−0,018	+0,022	+0,035
	−0,022			−0,022
	−0,043	−0,027		−0,016
0,3,−2	−0,348	−0,001	−0,114	−0,233
	+0,122			+0,128
	+0,321	+0,214		+0,107
0,4,−2	−0,048		−0,013	
	+0,022			
	+0,028	+0,017		
0,0,−3	−0,0001	+0,007	−0,0042	
	+0,0046	+0,001		
	+0,0014	+0,001		
0,1,−3	+0,118	−0,147	+0,116	+0,149
	−0,122	−0,008		−0,114
	−0,1467	−0,084		−0,063
0,2,−3	−2,624	+0,882	−1,317	−2,189
	+1,342	+0,046		+1,296
	+2,812	+1,773		+1,039
0,3,−3	+15,885	+0,045	+5,302	+10,538
	−5,196	+0,026		−5,322
	−16,021	−10,703		−5,318
0,4,−3	+1,735	+0,001	+0,435	+1,299
	−0,715	+0,003		−0,718
	−1,021	−0,585		−0,436
0,5,−3	+0,147		+0,030	
	−0,072			
	−0,063	−0,033		
0,1,−4	+0,009	−0,012	+0,010	
	−0,009			
	−0,0116	−0,007		
0,2,−4	−0,221	+0,077	−0,110	−0,188
	+0,114	+0,004		+0,110
	+0,234	+0,148		+0,086
0,3,−4	+1,408	+0,004	+0,468	+0,936
	−0,469	+0,003		−0,472
	−1,396	−0,932		−0,464

7.				
0,4,−4	+0,″170		+0,″044	+0,″126
	−0,073			−0,073
	−0,099	−0,″059		−0,040
0,2,−5	−0,012	+0,004	−0,006	
	+0,007			
	+0,013	+0,008		
0,3,−5	+0,078		+0,026	+0,052
	−0,026			−0,026
	−0,077	−0,051		−0,025
14.				
0,4,−4	−0,045		−0,005	
	+0,007			
	+0,009	+0,006		
0,5,−4	−0,009		−0,002	
	+0,005			
	+0,007	+3,003		
0,3,−5	−0,062	+0,018	−0,030	−0,050
	+0,044			+0,044
	+0,033	+0,021		+0,012
0,4,−5	+0,487	+0,011	+0,158	+0,318
	−0,205			−0,205
	−0,332	−0,223		−0,109
0,5,−5	+0,323	+0,001	+0,102	+0,220
	−0,147			−0,147
	−0,200	−0,131		−0,069
0,6,−5	+0,052		+0,013	
	−0,027			
	−0,024	−0,013		
0,3,−6	−0,008	+0,003	−0,003	
	+0,006			
	+0,004	+0,003		
0,4,−6	+0,065	+0,002	+0,021	
	−0,028			
	−0,043	−0,028		
0,5,−6	+0,050		+0,016	
	−0,023			
	−0,034	−0,018		

In der folgenden Tafel ist

$$A = \mathcal{M}'\overline{U}\left\{(1+\nu)^3\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 - 1\right\}$$

$$B = \mathcal{M}'\overline{G}\,(2\nu+\nu^2)$$

$$C = \mathcal{M}'\overline{\Sigma}\,(3\nu+3\nu^2+\nu^3)$$

Digitized by Google

γ, g, g'	$\Delta' T$ sin	A sin	B sin	C sin	$\Delta' T$ sin
6.					
0,0,1	−0,00003	+0,00001	−0,00001		−0,00003
	−0,00015	−0,00003	+0,00001		−0,00017
	+0,00007				+0,00007
0,1,1	0,000	−0,001			−0,001
	0,000				0,000
	−0,00176	+0,00016	+0,00023		−0,00137
0,−1,0	−0,001				−0,001
	+0,00048	+0,00017	+0,00029		+0,00094
	0,000				0,000
0,0,0	+0,00159	+0,00157	−0,00040	+0,00074	+0,00350
	−0,00448	−0,00098	−0,00242		−0,00758
	+0,00661	−0,00068	+0,00151		+0,00744
0,1,0	+0,040	−0,004		−0,001	+0,035
	+0,019	+0,002			+0,021
	−0,08137	+0,00272	+0,00443		−0,07422
0,2,0	−0,017	−0,004		−0,001	−0,022
	+0,006	+0,002			+0,008
	+0,013	+0,002	+0,002		+0,017
0,−1,−1	−0,023	−0,007	−0,001	−0,003	−0,034
	+0,01555	+0,00294	+0,00348		+0,02197
	+0,010	+0,004	+0,001		+0,015
0,0,−1	+0,04892	+0,05057	−0,01070	+0,02610	+0,11489
	−0,21782	−0,02903	−0,03332		−0,28017
	+0,33791	−0,02338	+0,00777		+0,32230
0,1,−1	+3,029	−0,127	−0,006	−0,049	+2,847
	+1,117	+0,058	−0,054		+1,121
	−5,19516	+0,06590	+0,12672		−5,00254
0,2,−1	−0,728	−0,158	+0,004	−0,080	−0,962
	+0,331	+0,078	+0,001		+0,410
	+0,623	+0,077	+0,101		+0,801
0,3,−1	−0,086	−0,017		−0,008	−0,111
	+0,045	+0,010			+0,055
	+0,036	+0,006	+0,009		+0,051
0,−1,−2	−0,002				−0,002
	+0,0008	+0,0002	+0,0002		+0,0012
	0,000				0,000
0,0,−2	+0,0036	+0,0036	−0,0006	+0,0019	+0,0085
	−0,0113	−0,0022	−0,0019		−0,0154
	+0,0168	−0,0014	−0,0004		+0,0150
0,1,−2	+0,154	−0,008		−0,003	+0,143
	+0,061	+0,005	−0,003		+0,063
	−0,2577	+0,0036	+0,0080		−0,2461
0,2,−2	−0,054	−0,015		−0,006	−0,075
	+0,027	+0,006			+0,033
	+0,042	+0,006	+0,008		+0,056

Digitized by Google

6.					
0,3,−2	−0″,007	−0″,002			−0″,009
	+0,003	+0,001			+0,004
	+0,003	+0,001			+0,004
0,0,−3	+0,0001				+0,0001
	−0,0005				−0,0005
	+0,0005				+0,0005
0,1,−3	+0,005	−0,001			+0,004
	+0,002				+0,002
	−0,0096	+0,0003	+0″,0004		−0,0089
7.					
0,4,−2	−0,001	+0,001			0,000
	+0,001				+0,001
	+0,0046	−0,0004	−0,0003		+0,0009
0,2,−2	+0,039	−0,004		−0″,002	+0,033
	−0,022	+0,002			−0,020
	−0,043	+0,002	+0,003		−0,038
0,3,−2	−0,348	+0,004		+0,003	−0,341
	+0,122	−0,002			+0,120
	+0,321	−0,002	−0,004		+0,315
0,4,−2	−0,048	+0,003		+0,001	−0,044
	+0,022	−0,002			+0,020
	+0,028	−0,002	−0,002		+0,024
0,0,−3	−0,0001	+0,0001	−0,0002		−0,0002
	+0,0046		+0,0004		+0,0047
	+0,0014				+0,0014
0,1,−3	+0,118	+0,001	−0,001	−0,001	+0,117
	−0,122	−0,001	+0,003		−0,120
	−0,1467	+0,0005	+0,0006		−0,1456
0,2,−3	−2,624	+0,005	−0,013	+0,013	−2,619
	+1,342	−0,006	−0,019		+1,317
	+2,842	−0,001	+0,014		+2,825
0,3,−3	+15,885	−0,137	+0,003	−0,113	+15,638
	−5,196	+0,068	−0,016		−5,144
	−16,021	+0,069	+0,167		−15,783
0,4,−3	+1,735	+0,002	+0,001	−0,004	+1,734
	−0,715		−0,002		−0,717
	−1,021	−0,002	+0,002		−1,021
0,5,−3	+0,147	+0,003			+0,150
	−0,072	−0,002			−0,074
	−0,063				−0,063
0,1,−4	+0,009				+0,009
	−0,009				−0,009
	−0,0116	+0,0003	+0,0003		−0,0110
0,2,−4	−0,221	+0,004	−0,001	+0,001	−0,217
	+0,114	−0,002	−0,002		+0,110
	+0,234	−0,002			+0,232
0,3,−4	+1,408	−0,010		−0,009	+1,389
	−0,469	+0,006	−0,002		−0,465
	−1,396	+0,006	+0,015		−1,375

Digitized by Google

7.					
0,4,—4	+0″,170	—0″,004		—0″,002	+0″,164
	—0,073	+0,002			—0,071
	—0,099	+0,001	+0″,003		—0,095
0,2,—5	—0,012				—0,012
	+0,007				+0,007
	+0,013				+0,013
0,3,—5	+0,078				+0,078
	—0,026				—0,026
	—0,077		+0,001		—0,076
14.					
0,4,—4	—0,015	+0,003		+0,003	—0,009
	+0,007	—0,003			+0,004
	+0,009	—0,002	—0,004		+0,003
0,5,—4	—0,009	+0,006		+0,002	—0,001
	+0,005	—0,003			+0,002
	+0,007	—0,003	—0,003		+0,001
0,3,—5	—0,062	+0,028	—0,008	+0,017	—0,025
	+0,044	—0,015			+0,029
	+0,033	—0,013	—0,014		+0,006
0,4,—5	+0,487	—0,111	—0,006	—0,068	+0,302
	—0,205	+0,052			—0,153
	—0,332	+0,056	+0,098		—0,178
0,5,—5	+0,323	—0,180		—0,065	+0,078
	—0,147	+0,090			—0,057
	—0,200	+0,088	+0,086		—0,026
0,6,—5	+0,052	—0,027		—0,008	+0,017
	—0,027	+0,015			—0,012
	—0,024	+0,011	+0,008		—0,005
0,3,—6	—0,008	+0,004		+0,003	—0,001
	+0,006	—0,002			+0,004
	+0,004	—0,002	—0,002		0,000
0,4,—6	+0,065	—0,014	—0,001	—0,008	+0,042
	—0,028	+0,006			—0,022
	—0,043	+0,007	+0,012		—0,024
0,5,—6	+0,050	—0,028		—0,009	+0,013
	—0,023	+0,014			—0,009
	—0,031	+0,014	+0,012		—0,005

Ich mache darauf aufmerksam, dass in den Ausdrücken von T_0, G_0, Σ_0 und deren Differentialquotienten, die den Artt. 57, 60, 62 entnommen, und in der vorstehenden Berechnung von ΔT und $\Delta \Sigma$ benutzt worden sind, der Factor λ des Art. 52 schon angebracht ist, und dass folglich die hieraus sich weiter unten ergebenden Störungscoefficienten die vollständigen Werthe derselben sind, die schon den Theil in sich enthalten, welcher durch die Rückwirkung der Mondstörungen der Sonnenbahn entsteht. Dieser Theil wird nemlich, zufolge des zwei-

Digitized by Google

ten Satzes des § 2, durch die Multiplication mit dem eben erwähnten Factor λ vollständig berücksichtigt.

248. (233.)

g, g'	$n\Delta z$	Δw	$\nu\Delta w$	Δv
6.				
0,1	+0″,012	−0″,001	+0″,001	0″,000
1,1	−0,056	+0,030	−0,001	+0,029
−1,0	+0,281	+0,138		+0,138
0,0	+0,562	−0,283	−0,005	−0,288
1,0	+17,489	−8,732	+0,061	−8,671
2,0	+0,260	−0,250	+0,005	−0,245
−1,−1	−0,564	−0,318	−0,014	−0,332
0,−1	−11,692	+0,754	−0,295	+0,459
1,−1	−121,368	+56,948	−0,591	+56,357
2,−1	−1,614	+1,533	−0,004	+1,529
3,−1	−0,037	+0,057	+0,002	+0,059
−1,−2	−0,008	−0,001		−0,001
0,−2	−0,128	+0,031	+0,037	+0,068
1,−2	−0,552	+0,253	+0,018	+0,271
2,−2	−0,079	+0,054	−0,007	+0,047
3,−2	−0,003	+0,003	−0,001	+0,002
0,−3	+0,004	+0,003	+0,002	+0,005
1,−3	+0,042	−0,016	+0,001	−0,015
7.				
1,−2	−0,013	+0,020	+0,001	+0,021
2,−2	+0,269	−0,160	+0,048	−0,112
3,−2	+0,121	−0,088	+0,036	−0,052
4,−2	+0,007	−0,007	+0,002	−0,005
0,−3	+0,018	+0,020	+0,002	+0,023
1,−3	−1,115	+0,537	−0,015	+0,522
2,−3	−3,122	+1,886	−0,301	+1,585
3,−3	+0,625	−0,578	−0,210	−0,788
4,−3	+0,020	−0,026	−0,016	−0,042
5,−3	+0,002	−0,002		−0,002
1,−4	−0,076	+0,037		+0,037
2,−4	−0,230	+0,140	−0,014	+0,126
3,−4	+0,084	−0,072	−0,016	−0,088
4,−4	+0,005	−0,005	−0,001	−0,006
14.				
3,−5	−0,052	+0,035	−0,014	+0,021
4,−5	−0,002	+0,003	−0,006	−0,003
5,−5	+0,008	−0,007	+0,001	−0,006

Digitized by Google

249. (234.)

g, g'	(17) $n\Delta z$ sin	(18) Δv sin	Summe sin
6.			
0,1	+0″,00008	+0″,00010	+0″,00018
−1,0	+0,001		+0,001
0,0	+0,00209	+0,00081	+0,00290
1,0	+0,009	+0,003	+0,012
2,0	+0,005	−0,002	+0,003
−1,−1	+0,005	+0,002	+0,007
0,−1	+0,05787	+0,06436	+0,12223
1,−1	−1,047	−0,482	−1,529
2,−1	−0,215	−0,015	−0,230
3,−1	−0,023	+0,003	−0,020
−1,−2	+0,001	+0,001	+0,002
0,−2	−0,0062	−0,0060	−0,0122
1,−2	+0,080	+0,043	+0,123
2,−2	+0,004	+0,004	+0,008
3,−2	+0,002	−0,001	+0,001
0,−3	−0,0003	−0,0004	−0,0007
1,−3	+0,006	+0,004	+0,010
7.			
1,−2	−0,002		−0,002
2,−2	+0,006	−0,010	−0,004
3,−2	−0,158	+0,078	−0,080
4,−2	−0,015	+0,006	−0,009
0,−3	−0,0006	−0,0001	−0,0007
1,−3	−0,004	+0,001	−0,003
2,−3	+0,003	+0,065	+0,068
3,−3	+1,002	−0,469	+0,533
4,−3	+0,095	−0,039	+0,056
5,−3	+0,007	−0,002	+0,005
2,−4	+0,004	+0,005	+0,009
3,−4	+0,069	−0,031	+0,038
4,−4	+0,007	−0,003	+0,004
3,−5	+0,003	−0,001	+0,002
11.			
2,−5	−0,001	+0,001	0,000
3,−5	+0,008	−0,001	+0,007
4,−5	+0,039	−0,022	+0,017
5,−5	+0,002	+0,002	+0,004
3,−6	+0,002		+0,002
4,−6	+0,005	−0,003	+0,002
5,−6	0,000	+0,001	+0,001

Digitized by Google

g, g'	$\Delta\frac{h_0}{h}$ cos	g, g'	$\Delta\frac{h_0}{h}$ cos
6.		7.	
0,1	−0″002	0,−3	+0″017
−1,0	+0,004	1,−3	+0,148
0,0	−0,453	2,−3	−0,762
1,0	−0,001	3,−3	+1,664
2,0	−0,004	4,−3	+0,099
−1,−1	+0,009	5,−3	+0,005
0,−1	+3,322	1,−4	+0,014
1,−1	+2,681	2,−4	−0,069
2,−1	−0,032	3,−4	+0,155
3,−1	−0,002	4,−4	+0,010
−1,−2	+0,002	2,−5	−0,004
0,−2	−0,057	3,−5	+0,009
1,−2	−0,086	44.	
2,−2	−0,017	3,−5	−0,007
0,−3	−0,002	4,−5	+0,020
1,−3	−0,009	5,−5	+0,007
7.		3,−6	−0,001
1,−2	+0,001	4,−6	+0,003
2,−2	+0,013	5,−6	+0,001
3,−2	−0,011		
4,−2	−0,001		

250. (235.)

γ, g, g'	(1) $n\Delta z$ sin	(2) Δv sin	(3) $\Delta\frac{h_0}{h}$ sin	(4) $\frac{d.\Delta v}{ndt}$ sin	Summe sin
6.					
0,0,1	−0″00046	−0″00019	−0″00004	−0″00002	−0″00071
	+0,00009	+0,00006		+0,00012	+0,00027
	+0,00044	+0,00010	+0,00006	−0,00014	+0,00046
0,1,1	−0,002				−0,002
	+0,003	−0,001			+0,002
	+0,00109	+0,00086	−0,00010	+0,00027	+0,00212
0,−1,0	−0,004				−0,004
	+0,00255	+0,00014	+0,00011	−0,00123	+0,00157
	+0,003	+0 001			+0,004
0,0,0	−0,01040	+0,00168	−0,00047	+0,00620	−0,00299
	+0,00486	+0,00403	−0,00761	+0,00596	+0,00124
	+0,00729	−0,00376	+0,00787	−0,00178	+0,00962
0,1,0	−0,028	−0,008	+0,004	−0,001	−0,033
	+0,056	+0,037	−0,002	−0,076	+0,035
	+0,05074	−0,04952	−0,00192	−0,07396	−0,07466

Digitized by Google

6.					
0,2,0	−0″,019	+0″,002	+0″,002	+0″,006	−0″,009
	+0,014	+0,002		−0,006	+0,010
	+0,003	−0,004		+0,002	+0,001
0,−1,−1	−0,006	−0,014	+0,004	−0,001	−0,017
	+0,00652	+0,00895	−0,00454	+0,00343	+0,01706
	−0,004	+0,003	−0,002	+0,003	0,000
0,0,−1	−0,01743	−0,14383	−0,00266	−0,03750	−0,20142
	+0,12472	+0,05474	+0,05930	−0,04236	+0,19640
	−0,10785	+0,08566	−0,05564	+0,04710	−0,06073
0,1,−1	+3,203	+1,454	−0,014	+0,004	+4,650
	−1,908	−0,824	+0,055	+0,443	−2,234
	−1,92923	−0,63748	−0,03977	+0,45165	−2,15483
0,2,−1	+0,806	+0,416	−0,063	−0,037	+0,822
	−0,462	−0,069	+0,033	+0,037	−0,461
	−0,289	−0,011	+0,031	−0,012	−0,281
0,3,−1	+0,108		−0,005	−0,003	+0,100
	−0,067	−0,001	+0,003	+0,002	−0,063
	−0,029	+0,004	+0,002	−0,001	−0,024
0,−1,−2	−0,003	−0,001			−0,004
	+0,0009	+0,0008	−0,0001		+0,0016
	+0,001				+0,001
0,0,−2	+0,0092	+0,0111	−0,0004	−0,0001	+0,0198
	−0,0131	−0,0050	−0,0007	−0,0011	−0,0199
	−0,0043	−0,0062	+0,0014	+0,0009	−0,0052
0,1,−2	−0,239	−0,129	−0,001		−0,369
	+0,106	+0,043		+0,003	+0,152
	+0,1131	+0,0848	+0,0020	+0,0010	+0,2009
0,2,−2	−0,018	−0,019	+0,005		−0,032
	+0,010	+0,007	−0,002	+0,001	+0,016
	+0,006	+0,009	−0,002	+0,001	+0,014
0,3,−2	−0,007	+0,002	+0,001		−0,004
	+0,004				+0,004
	+0,004	−0,002			+0,002
0,0,−3	+0,0004	+0,0007			+0,0011
	−0,0007	−0,0004			−0,0011
	+0,0001	−0,0005			−0,0004
0,1,−3	−0,018	−0,010			−0,028
	+0,009	+0,004			+0,013
	+0,0084	+0,0063	+0,0002	−0,0001	+0,0148
7.					
0,1,−2	+0,006	+0,004	−0,001		+0,009
	−0,003		+0,001		−0,002
	−0,0043	−0,0025	+0,0004	+0,0002	−0,0062
0,2,−2	0,000	+0,018	+0,009		+0,027
	+0,017	−0,008	−0,004	−0,003	+0,002
	−0,007	−0,010	−0,004	−0,001	−0,022
0,3,−2	+0,476	−0,236	+0,002		+0,242
	−0,239	+0,080		−0,001	−0,160
	−0,236	+0,457		−0,001	−0,080

7.					
0,4,−2	+0″,068	−0″,025			+0″,043
	−0,039	+0,011			−0,028
	−0,020	+0,011			−0,009
0,0,−3	+0,0018	+0,0011	−0″,0001	−0″,0003	+0,0025
	−0,0011	−0,0007	+0,0002	−0,0003	−0,0019
	−0,0008	−0,0005	−0,0003	+0,0001	−0,0015
0,1,−3	+0,001	−0,008	+0,006	−0,002	−0,003
	−0,008	−0,002	−0,001	+0,002	−0,009
	+0,0015	+0,0086	−0,0044	+0,0041	+0,0098
0,2,−3	−0,128	−0,120	−0,049	+0,002	−0,295
	−0,069	+0,043	+0,012	+0,031	+0,017
	+0,129	+0,084	+0,038	+0,019	+0,270
0,3,−3	−3,041	+1,416	−0,049	−0,002	−1,676
	+1,499	−0,473	+0,055	−0,015	+1,066
	+1,520	−0,948	−0,004	−0,023	+0,545
0,4,−3	−0,415	+0,157	−0,004	+0,002	−0,260
	+0,238	−0,066	+0,006	−0,001	+0,177
	+0,132	−0,066	−0,001	+0,001	+0,066
0,5,−3	−0,043	+0,013			−0,030
	+0,027	−0,007			+0,020
	+0,009	−0,004			+0,005
0,1,−4	−0,001	−0,001			−0,002
	0,000				0,000
	+0,0001	+0,0006	−0,0004	+0,0002	+0,0005
0,2,−4	−0,016	−0,008	−0,002		−0,026
	+0,001	+0,002	+0,001	+0,002	+0,006
	+0,011	+0,005	+0,003	+0,002	+0,021
0,3,−4	−0,206	+0,095	−0,002		−0,113
	+0,104	−0,032	+0,003	−0,002	+0,073
	+0,100	−0,063	−0,003	−0,002	+0,032
0,4,−4	−0,032	+0,012			−0,020
	+0,018	−0,005			+0,013
	+0,010	−0,006			+0,004
0,3,−5	−0,008	+0,004			−0,004
	+0,003	−0,001			+0,002
	+0,003	−0,002			+0,001
14.					
0,4,−4	+0,015	−0,007			+0,008
	−0,010	+0,003			−0,007
	−0,004	+0,003			−0,001
0,5,−4	+0,005	−0,002			+0,003
	−0,004	+0,001			−0,003
	−0,002	+0,001			−0,001
0,3,−5	−0,029	+0,008	−0,004		−0,025
	+0,014	−0,001	+0,002		+0,015
	+0,015	−0,006	+0,001		+0,010
0,4,−5	−0,123	+0,069	+0,016		−0,038
	+0,079	−0,028	−0,008		+0,043
	+0,047	−0,037	−0,008		+0,002

Digitized by Google

14.					
0,5,−5	−0″,004	−0″,008	−0″,027		−0″,039
	+0,011		+0,013		+0,024
	−0,005	+0,010	+0,014		+0,019
0,6,−5	−0,002	−0,002	−0,005		−0,009
	+0,003		+0,003		+0,006
	−0,001	+0,002	+0,002		+0,003
0,3,−6	−0,004	+0,002			−0,002
	+0,002				+0,002
	+0,002	−0,002			0,000
0,4,−6	−0,015	+0,008	+0,002		−0,005
	+0,009	−0,004	−0,001		+0,004
	+0,006	−0,005	−0,001		0,000
0,5,−6	0,000	−0,002	−0,005		−0,007
	+0,001		+0,002		+0,003
	0,000	+0,002	+0,002		+0,004

251. (236.)

γ, g, g'	ΔW_0 cos	$\left(\frac{d.\Delta W_0}{dy'}\right)$ sin	$\left(\frac{d^2\Delta W_0}{dy'^2}\right)$ cos	$\left(\frac{d^3\Delta W_0}{dy'^3}\right)$ sin
6.				
0,0,1	+0″,0088			
	+0,0066			
−1,1,1	−0,0001	−0″,0001		
1,−1,1	+0,006	−0,0006		
	+0,0071	−0,0007		
0,1,1	+0,003			
−1,2,1	−0,001	−0,001		
1,0,1	−0,009	+0,009		
	−0,007	+0,008		
0,−1,0	−0,005			
−1,0,0	−0,294	−0,294	+0″,294	+0″,294
1,−2,0	+0,002	−0,002	−0,002	+0,002
	−0,297	−0,296	+0,292	+0,296
0,0,0	−0,05867			
	−0,06496			
−1,1,0	+0,00331	+0,00331	−0,003	−0,003
−2,2,0	−0,00076	−0,00152	+0,003	+0,006
−3,3,0	−0,00004	−0,00003		
1,−1,0	+0,01721	−0,01721	−0,017	+0,017
2,−2,0	+0,00006	−0,00012	−0,002	+0,004
	−0,04515	−0,01557	−0,019	+0,024
0,1,0	−0,002			
−1,2,0	−0,028	−0,028	+0,028	+0,028
1,0,0	+17,467	−17,467	−17,467	+17,467
	+17,437	−17,495	−17,439	+17,495

Digitized by Google

6.				
0,2,0	+0,015			
−1,3,0	−0,006	−0,006	+0,006	+0,006
1,1,0	−0,018	+0,018	+0,018	−0,018
2,0,0	+0,479	−0,958	−1,916	+3,832
	+0,470	−0,946	−1,892	+3,820
0,−1,−1	−0,048			
−1,0,−1	+0,583	+0,583	−0,583	−0,583
−2,1,−1	+0,002	+0,004	−0,008	−0,016
−3,2,−1	+0,001	+0,003	−0,009	−0,027
1,−2,−1	+0,007	−0,007	−0,007	+0,007
	+0,545	+0,583	−0,607	−0,619
0,0,−1	−1,2932 −1,2910			
−1,1,−1	+0,0898	+0,0898	−0,090	−0,090
−2,2,−1	+0,0158	+0,0316	−0,063	−0,126
1,−1,−1	+0,2451	−0,2451	−0,245	+0,245
2,−2,−1	+0,0002	−0,0004	−0,001	+0,002
	−0,9401	−0,1244	−0,399	+0,031
0,1,−1	−8,035			
−1,2,−1	+0,576	+0,576	−0,576	−0,576
1,0,−1	−106,962	+106,962	+106,962	−106,962
2,−1,−1	+0,007	−0,014	−0,028	+0,056
	−114,414	+107,524	+106,358	−107,482
0,2,−1	+0,072			
−1,3,−1	+0,017	+0,017	−0,017	−0,017
1,1,−1	−0,557	+0,557	+0,557	−0,557
2,0,−1	−2,934	+5,868	+11,736	−23,472
	−3,402	+6,442	+12,276	−24,046
0,3,−1	+0,004			
−1,4,−1	+0,002	+0,002	−0,002	−0,002
1,2,−1	−0,014	+0,014	+0,014	−0,014
2,1,−1	−0,015	+0,030	+0,060	−0,120
3,0,−1	−0,121	+0,363	+1,089	−3,267
	−0,144	+0,409	+1,161	−3,403
0,−1,−2	−0,005			
−1,0,−2	+0,020	+0,020		
−2,1,−2	+0,001	+0,002		
1,−2,−2	0,000			
	+0,016	+0,022		
0,0,−2	+0,1974 +0,1934			
−1,1,−2	+0,0442	+0,0442	−0,044	
−2,2,−2	−0,0032	−0,0064	+0,128	
1,−1,−2	+0,0086	−0,0086	−0,086	
	+0,2400	+0,0262	+0,001	
0,1,−2	+0,263			
−1,2,−2	−0,116	−0,116	+0,116	+0,116
1,0,−2	−0,315	+0,315	+0,315	−0,315
	−0,168	+0,199	+0,431	−0,199

Digitized by Google

6.				
0,2,−2	+0″058			
−1,3,−2	−0,017	−0″017	+0″017	+0″017
1,1,−2	−0,082	+0,082	+0,082	−0,082
2,0,−2	−0,009	+0,018	+0,036	−0,072
	−0,050	+0,083	+0,135	−0,137
0,3,−2	+0,005			
−1,4,−2	−0,002	−0,002		
1,2,−2	−0,003	+0,003		
2,1,−2	−0,002	+0,004		
	−0,002	+0,005		
0,0,−3	+0,0055			
	+0,0081			
−1,1,−3	+0,0021	+0,0021		
−2,2,−3	−0,0002	−0,0004		
1,−1,−3	+0,0001	−0,0001		
	+0,0101	+0,0016		
0,1,−3	+0,031			
−1,2,−3	−0,008	−0,008	+0,008	
1,0,−3	+0,027	−0,027	−0,027	
	+0,050	−0,035	−0,019	
7.				
0,1,−2	−0,010			
−1,2,−2	+0,001	+0,001	−0,001	
1,0,−2	−0,042	+0,042	+0,042	
	−0,051	+0,043	+0,041	
0,2,−2	−0,032			
−1,3,−2	+0,006	+0,006	−0,006	
1,1,−2	+0,069	−0,069	−0,069	
2,0,−2	−0,001	+0,002	+0,004	
	+0,042	−0,061	−0,071	
0,3,−2	+0,035			
−1,4,−2	+0,010	+0,010	−0,010	
1,2,−2	−0,126	+0,126	+0,126	
2,1,−2	+0,002	−0,004	−0,008	
	−0,079	+0,132	+0,108	
0,4,−2	0,000			
−1,5,−2	+0,002	+0,002		
1,3,−2	−0,005	+0,005		
2,2,−2	+0,004	−0,008		
	+0,001	−0,001		
0,0,−3	+0,0115			
	+0,0096			
−1,1,−3	−0,0035	−0,0035		
−2,2,−3	+0,0020	+0,0040		
−3,3,−3	−0,0005	−0,0015		
−4,4,−3	+0,0001	+0,0004		
1,−1,−3	−0,0001	+0,0001		
	+0,0076	−0,0005		

Digitized by Google

7.				
0,1,−3	−0,143			
−1,2,−3	+0,072	+0,072	−0,072	−0,072
−2,3,−3	−0,043	−0,026	+0,052	+0,104
−3,4,−3	+0,001	+0,003	−0,009	−0,027
1,0,−3	−0,677	+0,677	+0,677	−0,677
	−0,760	+0,726	+0,648	+0,672
0,2,−3	+1,620			
−1,3,−3	−0,476	−0,476	+0,476	+0,476
−2,4,−3	+0,029	+0,058	−0,146	−0,292
1,1,−3	−3,873	+3,873	+3,873	−3,873
2,0,−3	−0,019	+0,038	+0,076	−0,152
	−2,719	+3,493	+4,309	−3,784
0,3,−3	−4,988			
−1,4,−3	+1,074	+1,074	−1,074	−1,074
−2,5,−3	+0,003	+0,006	−0,042	−0,084
1,2,−3	+8,470	−8,470	−8,470	+8,470
2,1,−3	−0,106	+0,212	+0,424	−0,848
3,0,−3	−0,001	+0,003	+0,009	−0,027
	+4,452	−7,475	−9,123	+6,497
0,4,−3	−0,388			
−1,5,−3	+0,112	+0,112	−0,112	−0,112
1,3,−3	+0,344	−0,344	−0,344	+0,344
2,2,−3	+0,232	−0,464	−0,928	+1,856
3,1,−3	−0,005	+0,015	+0,045	−0,135
	+0,292	−0,678	−1,336	+1,950
0,5,−3	−0,025			
−1,6,−3	+0,009	+0,009		
1,4,−3	+0,015	−0,015		
2,3,−3	+0,009	−0,018		
3,2,−3	+0,010	−0,030		
	+0,018	−0,054		
0,1,−4	−0,040			
−1,2,−4	+0,005	+0,005	−0,005	
−2,3,−4	−0,001	−0,002	+0,004	
−3,4,−4	+0,001	+0,003	−0,009	
1,0,−4	−0,038	+0,038	+0,038	
	−0,043	+0,044	+0,028	
0,2,−4	+0,144			
−1,3,−4	−0,043	−0,043	+0,043	+0,043
−2,4,−4	+0,003	+0,006	−0,012	−0,024
1,1,−4	−0,349	+0,349	+0,349	−0,349
2,0,−4	−0,001	+0,002	+0,004	−0,008
	−0,249	+0,314	+0,384	−0,338
0,3,−4	−0,469			
−1,4,−4	+0,105	+0,105	−0,105	−0,105
1,2,−4	+0,780	−0,780	−0,780	+0,780
2,1,−4	−0,040	+0,020	+0,040	−0,080
	+0,406	−0,655	−0,845	+0,595

7.				
0,4,−4	−0″039			
−1,5,−4	+0,012	+0″042	−0″012	−0″012
1,3,−4	+0,033	−0,033	−0,033	+0,033
2,2,−4	+0,021	−0,042	−0,084	+0,168
	+0,027	−0,063	−0,129	+0,189
0,2,−5	+0,007			
−1,3,−5	−0,003	−0,003	+0,003	
1,1,−5	−0,020	+0,020	+0,020	
	−0,016	+0,047	+0,023	
0,3,−5	−0,028			
−1,1,−5	+0,007	+0,007		
1,2,−5	+0,046	−0,046		
	+0,025	−0,039		
14.				
0,3,−5	+0,019			
−1,4,−5	−0,012	−0,012		
−2,5,−5	+0,001	+0,002		
1,2,−5	−0,010	+0,010		
	−0,002	0,000		
0,4,−5	−0,072			
−1,5,−5	+0,024	+0,024		
1,3,−5	+0,066	−0,066		
	+0,018	−0,042		
0,5,−5	−0,008			
−1,6,−5	+0,006	+0,006		
1,4,−5	+0,002	−0,002		
2,3,−5	+0,002	−0,004		
	+0,002	0,000		
0,3,−6	+0,001			
−1,4,−6	−0,002	−0,002		
1,2,−6	0,000	0,000		
	−0,001	−0,002		
0,4,−6	−0,010			
−1,5,−6	+0,004	+0,004		
1,3,−6	+0,009	−0,009		
	+0,003	−0,005		
0,5,−6	−0,004			
−1,6,−6	+0,001	+0,001		
1,4,−6	0,000	0,000		
	0,000	+0,001		

Digitized by Google

252. (237.)

g, g'	$-3a\Omega_0$ cos	$-3a\Omega_1$ cos	$-3a\Omega_2$ cos	$H\delta P$ cos	$N\delta Q$ cos	$-3a\overline{\Omega}$ cos
6.						
0,1	+0″,0002					+0″,0002
1,1	−0,001					−0,001
0,0	+0,00737	+0″,00189	−0″,00016		+0″,00003	+0,00913
1,0	−0,054	+0,010				−0,044
2,0	+0,001	+0,007				+0,008
−1,−1	−0,013					−0,013
0,−1	+0,4389	+0,0249	−0,0023	−0″,0003	+0,0005	+0,4617
1,−1	−3,210	+0,071		+0,004	−0,006	−3,141
2,−1	+0,087	+0,182				+0,269
3,−1	+0,004	+0,017				+0,021
0,−2	+0,0224	+0,0008	−0,0005			+0,0224
1,−2	−0,162					−0,162
2,−2	+0,004	+0,014				+0,018
0,−3	+0,0008					+0,0008
1,−3	−0,006					−0,006
7.						
1,−2	+0,002	−0,001				+0,001
2,−2	−0,022	−0,001				−0,023
3,−2	+0,089	+0,025				+0,114
4,−2	+0,007	+0,006				+0,013
0,−3	+0,0039	+0,0001				+0,0040
1,−3	−0,116					−0,116
2,−3	+1,325	−0,035	−0,001			+1,289
3,−3	−5,296	−0,013	+0,007	−0,002	−0,002	−5,306
4,−3	−0,438	+0,001	+0,001			−0,436
5,−3	−0,030					−0,030
1,−4	−0,010					−0,010
2,−4	+0,111	−0,003				+0,108
3,−4	−0,446	−0,026	+0,001			−0,471
4,−4	−0,037	−0,007				−0,044
14.						
4,−4		+0,004				+0,004
5,−4		+0,002				+0,002
3,−5		+0,030				+0,030
4,−5		−0,158				−0,158
5,−5		−0,102				−0,102
6,−5		−0,011				−0,011
3,−6		+0,003				+0,003
4,−6		−0,021				−0,021
5,−6		−0,016				−0,016

Digitized by Google

253. (238.)

$g,\ g'$	$3\left(\frac{da\,\Omega_2}{dg'}\right)$ sin	$3\left(\frac{da\,\Omega_2}{dg'}\right)_1$ sin	$3\left(\frac{da\,\Omega_2}{dg'}\right)_2$ sin	$H\partial P$ sin	$N\partial Q$ sin	$3\left(\frac{da\,\overline{\Omega}}{dg'}\right)$ sin
6.						
0, 4	+0″,0002	+0″,0003				+0″,0005
1, 4	−0,001	−0,001				−0,002
0, 0		+0,00460	−0″,00060	−0″,00001	+0″,00001	+0,00400
1, 0		−0,015	+0,002			−0,013
2, 0		−0,020	+0,003			−0,017
−1, −1	+0,013		−0 009			+0,004
0, −1	−0,4389	+0,0685	−0,0077	+0,0007	−0,0005	−0,3779
1, −1	+3,240	−0,148	−0,001	−0,004	+0,004	+3,061
2, −1	−0,687	−0,547		−0,002		−0,636
3, −1	−0,004	−0,052				−0,056
0, −2	−0,0442	+0,0060	−0,0010	+0,0001	−0,0001	−0,0392
1, −2	+0,324	−0,010	−0,001			+0,313
2, −2	−0,008	−0,057	−0,003			−0,068
3, −2	0,000	−0,006				−0,006
0, −3	−0,0024					−0,0024
1, −3	+0,018					+0,018
7.						
1, −2	−0,004	+0,002				−0,002
2, −2	+0,044					+0,044
3, −2	−0,178	−0,076	−0,001			−0,255
4, −2	−0,014	−0,016				−0,030
0, −3	−0,0117	−0,0002				−0,0119
1, −3	+0,348		+0,001			+0,349
2, −3	−3,975	+0,035	−0,006	−0,003	−0,001	−3,950
3, −3	+15,888	+0,005	−0,021	+0,004	+0,004	+15,880
4, −3	+1,314	−0,003	−0,011			+1,300
5, −3	+0,090					+0,090
1, −4	+0,040	−0,001				+0,039
2, −4	−0,444	+0,001				−0,443
3, −4	+1,784	+0,078	−0,003			+1,859
4, −4	+0,448	+0,021				+0,469
11.						
4, −4		−0,009				−0,009
5, −4		−0,006				−0,006
3, −5		−0,089				−0,089
4, −5		+0,475				+0,475
5, −5		+0,304				+0,304
6, −5		+0,034				+0,034
3, −6		−0,014				−0,014
4, −6		+0,073	+0,003			+0,076
5, −6		+0,055	+0,002			+0,057

Digitized by Google

254. (239.)

g, g'	$-3a\overline{\Omega}$ cos	*) cos	$-3a\Omega$ cos	$3\left(\frac{da\overline{\Omega}}{dg'}\right)$ sin	**) sin	$3\left(\frac{da\Omega}{dg'}\right)$ sin
6.						
0,1	+0″,0002	0″,0000	+0″,0002	+0″,0005	+0″,0003	+0″,0008
0,0	+0,00913	+0,00239	+0,01152	+0,00400	+0,00439	+0,00839
0,−1	+0,4617	+0,0228	+0,4845	−0,3779	+0,0783	−0,2996
0,−2	+0,0224	+0,0003	+0,0227	−0,0392	+0,0058	−0,0334
0,−3	+0,0008	+0,0002	+0,0010	−0,0024	+0,0002	−0,0022
7.						
0,−3	+0,0040	0,0000	+0,0040	−0,0119	+0,0004	−0,0115

255. (240.)

g, g'	$\Delta f Y$ cos	$\Delta f'' \Psi$ sin	g, g'	$\Delta f Y$ cos	$\Delta f'' \Psi$ sin
6.			7.		
−1,0	+0″,017	−0″,017	0,−3	−0″,677	+0″,677
0,0	+17,173	−17,761	1,−3	−3,877	+3,869
1,0	−0,015	+0,021	2,−3	+8,542	−8,398
2,0	−0,028	−0,028	3,−3	−0,135	−0,847
−1,−1	+0,244	−0,244	4,−3	+1,089	+1,059
0,−1	−106,379	+107,545	5,−3	+0,112	+0,112
1,−1	−0,466	+0,648	0,−4	−0,038	+0,038
2,−1	+0,562	+0,590	1,−4	−0,349	+0,349
3,−1	+0,017	+0,017	2,−4	+0,785	−0,775
0,−2	−0,295	+0,335	3,−4	+0,291	−0,377
1,−2	−0,041	+0,123	4,−4	+0,105	+0,105
2,−2	−0,119	−0,113	14.		
3,−2	−0,017	−0,017	2,−5	−0,010	+0,010
0,−3	+0,027	−0,027	3,−5	+0,066	−0,066
7.			4,−5	−0,010	−0,014
0,−2	−0,042	+0,042	5,−5	+0,024	+0,024
1,−2	+0,069	−0,069			
2,−2	−0,125	+0,127			
3,−2	+0,001	+0,011			

*) $-3a\overline{\Omega}\left\{3\nu+3\nu^2+\nu^3\right\}$

**) $3\left(\frac{da\overline{\Omega}}{dg'}\right)\left\{3\nu+3\nu^2+\nu^3\right\}$

Digitized by Google

g, g'	(27) $\Delta\frac{h_0}{h}$ cos	(28) $\Delta\Gamma$ cos	(29) $\Delta\Gamma'\Psi$ cos	(30) $n\Delta z$ cos	(31) Δv cos	$-3a\Omega$ cos
6.						
0,1	−0″,0001	+0″,0011	+0″,0058	+0″,0003	−0″,0001	+0″,0002
0,0	−0,01023	−0,01747	−0,03719	−0,00665	−0,00268	+0,01152
0,−1	+0,0996	−0,6525	−0,7428	+0,1476	+0,1230	+0,4845
0,−2	−0,0005	+0,0772	+0,1480	−0,0086	−0,0102	+0,0227
0,−3	0,0000	+0,0037	+0,0040	−0,0005	−0,0006	+0,0010
7.						
0,−3	+0,0020	−0,6627	+0,6680	+0,0016	−0,0004	+0,0040

g, g'	(34) $n\Delta z$ sin	(35) Δv sin	$3\left(\frac{da\Omega}{dg'}\right)$ sin	$\frac{d\Delta X}{ndt}$ sin
6.				
0,1	−0″,0005	−0″,0003	+0″,0008	0″,0000
0,0	−0,00547	−0,00263	+0,00839	+0,00029
0,−1	−0,1733	−0,1926	−0,2996	−0,6655
0,−2	+0,0120	+0,0116	−0,0334	−0,0098
0,−3	+0,0020	+0,0016	−0,0022	+0,0014
7.				
0,−3	−0,0020	+0,0019	−0,0115	−0,0076

g, g'	$\Delta Z - u\Delta X$ cos	$u\Delta X$ cos	ΔZ cos
6.			
0,1	+0″,0066	0″,0000	+0″,0066
0,0	−0,06240	−0,00256	−0,06496
0,−1	−0,5406	−0,7504	−1,2910
0,−2	+0,1986	−0,0052	+0,1934
0,−3	+0,0076	+0,0005	+0,0081
7.			
0,−3	+0,0125	−0,0029	+0,0096

Digitized by Google

256. (241.)

g, g'	$\left(\frac{d\Delta W_0''}{dy}\right) n\delta z$	$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\Delta W_0''}{dy^2}\right)(n\delta z)^2$	(10) $n\Delta z$	(11) Δv	(12) $\Delta\frac{h_0}{h}$	Summe
	cos	cos	cos	cos	cos	cos
6.						
0, 1	−0″,0052	−0″,0001	−0″,0049	+0″,0026		−0″,0076
1, 1	−0,026		−0,001			−0,027
−1, 0	+0,003		+0,008	−0,002		+0,009
0, 0	+0,02585	+0,00154	+0,03342	−0,01292	−0″,00004	+0,04785
1, 0	+0,167	−0,003	−0,011	+0,126		+0,279
2, 0	+0,026	−0,001	+0,013	+0,012		+0,050
−1, −1	+0,064		+0,016	−0,024		+0,056
0, −1	+1,2274	+0,0062	+1,0800	−0,6141	+0,0007	+1,7029
1, −1	+0,589	+0,017	+1,791	−1,217		+1,480
2, −1	−0,054	+0,008	+0,336	−0,019		+0,271
3, −1	−0,003	+0,001	+0,035	+0,003		+0,036
−1, −2	−0,007		−0,002	+0,003		+0,006
0, −2	−0,1577	−0,0017	−0,1346	+0,0751		−0,2489
1, −2	−0,223	+0,001	−0,132	+0,040		−0,314
2, −2	−0,053		−0,036	−0,012		−0,101
3, −2	−0,009		−0,005	−0,001		−0,015
0, −3	−0,0068	+0,0002	−0,0047	+0,0028		−0,0085
1, −3	−0,007		−0,015	+0,004		−0,018
7.						
1, −2	+0,005		+0,009	+0,004		+0,018
2, −2	+0,196	+0,002	+0,170	+0,098		+0,466
3, −2	+0,096	+0,001	+0,260	+0,075		+0,432
4, −2	+0,006		+0,023	+0,006		+0,035
0, −3	−0,0050	−0,0007	−0,0041	+0,0026		−0,0072
1, −3	+0,047	−0,007	−0,093	−0,030		−0,143
2, −3	−1,145	−0,006	−1,179	−0,626		−2,956
3, −3	−0,620	−0,002	−1,654	−0,438		−2,714
4, −3	−0,055		−0,135	−0,033		−0,223
5, −3	−0,003		−0,010	−0,001		−0,014
1, −4	0,000	+0,001	−0,006			−0,005
2, −4	−0,055	−0,002	−0,060	−0,028		−0,145
3, −4	−0,040		−0,121	−0,033		−0,194
4, −4	−0,001		−0,011	−0,003		−0,015
2, −5	−0,002		−0,001	−0,001		−0,004
3, −5	−0,001		−0,004	−0,001		−0,006
11.						
3, −5	−0,050	−0,006	−0,057	−0,032		−0,145
4, −5	+0,051	−0,007	−0,069	−0,023		−0,048
5, −5	+0,041	−0,003	−0,007	−0,002		+0,029
3, −6	−0,005		−0,006	−0,003		−0,014
4, −6	+0,006		−0,008	−0,003		−0,005
5, −6	+0,010			−0,001		+0,009

Digitized by Google

g, g'	$\left(\frac{d^2 \Delta W_0}{dy^2}\right) n\delta z$ sin	$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 \Delta W_0}{dy^2}\right)(n\delta z)^2$ sin	(14) $n \Delta z$ sin	(15) Δv sin	Summe sin
6.					
0, 1	+0″0032	+0″0001	−0″0021		+0″0012
1, 1	+0,026		+0,005		+0,031
−1, 0	+0,003		+0,007		+0,010
0, 0	−0,03187	+0,00293	+0,04492	−0″00409	+0,01189
1, 0	−0,176	+0,003	+0,093		−0,080
2, 0	−0,036	+0,001	+0,008	+0,004	−0,027
−1, −1	+0,124		−0,016	+0,001	+0,109
0, −1	+1,1855	−0,0061	−1,1518	+0,0263	+0,0540
1, −1	+0,523	−0,017	−2,878	+0,001	−2,371
2, −1	+0,104	−0,010	−0,642	−0,026	−0,544
3, −1	+0,011	−0,001	−0,078	−0,002	−0,070
−1, −2	−0,015				−0,015
0, −2	−0,1270	−0,0024	+0,0832	+0,0004	−0,0461
1, −2	+0,120	−0,002	+0,144		+0,262
2, −2	+0,060		+0,041		+0,101
3, −2	+0,012		+0,007		+0,019
0, −3	−0,0069	+0,0002	+0,0039		−0,0028
1, −3	−0,002		+0,014		+0,012
7.					
1, −2	+0,003		−0,010		−0,007
2, −2	−0,201	−0,002	−0,162		−0,365
3, −2	−0,105	−0,001	−0,325		−0,431
4, −2	−0,040		−0,014		−0,054
0, −3	−0,0058	−0,0015	+0,0042	+0,0002	−0,0029
1, −3	−0,009	−0,007	+0,087		+0,071
2, −3	+1,161	−0,006	+1,141		+2,296
3, −3	+0,682	−0,002	+2,076	−0,001	+2,755
4, −3	+0,092		+0,273		+0,365
5, −3	+0,008		+0,028		+0,036
1, −4	0,000	+0,001	+0,005		+0,006
2, −4	+0,060	+0,002	+0,058		+0,120
3, −4	+0,035	+0,001	+0,149		+0,185
4, −4	+0,003		+0,022		+0,025
2, −5	+0,003				+0,003
3, −5	+0,001				+0,001
14.					
3, −5	+0,057	+0,006	+0,060		+0,123
4, −5	−0,067	+0,007	+0,085		+0,025
5, −5	−0,057	+0,003	+0,010		−0,044
3, −6	+0,006		+0,005		+0,011
4, −6	−0,009		+0,011		+0,002
5, −6	−0,043				−0,043

Digitized by Google

257. (242.)

g, g'	$n\Delta z$ sin	Diff.	Δv cos	$-v\Delta w$ cos	Δw cos	Diff.
6.						
0,1	+0″007	+5	+0″003	−0″001	+0″002	−3
1,1	−0,034	−25	+0,018	+0,001	+0,019	+11
−1,0	+0,290	−9	+0,145		+0,145	−7
0,0	+0,316	+246	−0,246	+0,005	−0,241	−72
1,0	+17,566	−77	−8,713	−0,061	−8,774	+42
2,0	+0,259	+1	−0,242	−0,005	−0,247	−3
−1,−1	−0,564	0	−0,325	+0,014	−0,311	−7
0,−1	−11,400	−292	+0,524	+0,295	+0,819	−65
1,−1	−124,335	−33	+56,338	+0,591	+56,929	+19
2,−1	−1,649	−5	+1,525	+0,004	+1,529	+1
3,−1	−0,037	0	+0,058	−0,002	+0,056	+1
−1,−2	−0,009	+1	−0,003		−0,003	+2
0,−2	−0,147	+19	+0,070	−0,037	+0,033	−2
1,−2	−0,562	+10	+0,270	−0,018	+0,252	+1
2,−2	−0,081	+2	+0,050	+0,007	+0,057	−3
3,−2	−0,006	+3	+0,004	+0,001	+0,005	−2
0,−3	−0,007	+11	+0,003	−0,002	+0,001	+2
1,−3	+0,044	+1	−0,015	−0,001	−0,016	0
7.						
1,−2	−0,038	−5	+0,024	−0,004	+0,020	0
2,−2	+0,272	−3	−0,114	−0,048	−0,162	+2
3,−2	+0,123	−2	−0,052	−0,036	−0,088	0
4,−2	+0,009	−2	−0,007	−0,002	−0,009	+2
0,−3	−0,002	+20	+0,009	−0,002	+0,007	+14
1,−3	−4,092	−23	+0,499	+0,045	+0,544	+23
2,−3	−3,154	+32	+1,609	+0,301	+1,910	−24
3,−3	+0,621	+4	−0,790	+0,240	−0,580	+2
4,−3	+0,018	+2	−0,041	+0,016	−0,025	−4
5,−3	+0,001	+1	−0,002		−0,002	0
1,−4	−0,066	−10	+0,035		+0,035	+2
2,−4	−0,229	−4	+0,126	+0,014	+0,140	0
3,−4	+0,078	+6	−0,086	+0,016	−0,070	−2
4,−4	+0,003	+2	−0,005	+0,001	−0,004	−4
2,−5	−0,042	—	+0,006		+0,006	—
3,−5	+0,007	—	−0,007		−0,007	—
14.						
3,−5	−0,056	+4	+0,023	+0,014	+0,037	−2
4,−5	−0,005	+3	−0,003	+0,006	+0,003	0
5,−5	+0,007	+1	−0,005	−0,001	−0,006	−4
3,−6	−0,006	—	+0,002		+0,002	—
4,−6	−0,001	—	−0,001		−0,001	—
5,−6	+0,002	—	−0,002		−0,002	—

Digitized by Google

258. (243.)

$g.\ g'$	$\frac{d.\Delta z}{dt}$ cos	$2.\Delta v$ cos	(23) $n.\Delta z$ cos	(24) $\frac{d.\Delta z}{dt}$ cos	(25) Δv cos	$\frac{\Delta r_0}{h}$ cos	Diff.
6.							
0,1	+0″001	+0″006		−0″005	−0″002	0″000	−2
1,1	−0,034	+0,036		+0,002	+0,001	+0,005	−5
−1,0	−0,288	+0,289		+0,007		+0,008	−7
0,0	+0,003	−0,432	+0″008	+0,034	+0,018	−0,369	−84
1,0	+17,716	−17,427		−0,254	−0,047	−0,012	+11
2,0	+0,520	−0,484	−0,008	−0,024	−0,005	−0,001	−3
−1,−1	+0,601	−0,619	−0,008	+0,056	+0,006	+0,006	+3
0,−1	+0,762	+1,047	−0,057	+1,140	+0,488	+3,380	−58
1,−1	−113,234	+112,676	+0,004	+2,317	+0,894	+2,657	+24
2,−1	−3,131	+3,050	+0,056	−0,010	−0,009	−0,044	+12
3,−1	−0,108	+0,116	+0,003	−0,008	−0,006	−0,003	+1
−1,−2	+0,040	−0,006		−0,008		−0,004	+6
0,−2	+0,021	+0,139		−0,149	−0,067	−0,056	−1
1,−2	−0,482	+0,539		−0,078	−0,067	−0,088	+2
2,−2	−0,151	+0,099		+0,027	+0,008	−0,047	0
3,−2	−0,017	+0,008		+0,003	+0,002	−0,004	+1
0,−3	+0,002	+0,006		−0,006	−0,003	−0,001	−1
1,−3	+0,032	−0,029		−0,006	−0,005	−0,008	−1
7.							
1,−2	−0,033	+0,041		−0,002	+0,002	+0,008	−7
2,−2	+0,508	−0,228		−0,193	−0,080	+0,007	+6
3,−2	+0,372	−0,104		−0,149	−0,143	+0,006	−17
4,−2	+0,036	−0,044		−0,010	−0,007	+0,005	−6
0,−3	0,000	+0,017		−0,006	−0,003	+0,008	+9
1,−3	−0,873	+0,997		+0,028	−0,005	+0,147	+1
2,−3	−5,675	+3,217	+0,001	+1,198	+0,501	−0,758	−5
3,−3	+1,738	−1,579	+0,001	+0,823	+0,677	+1,660	+4
4,−3	+0,069	−0,082		+0,062	+0,046	+0,095	+4
5,−3	+0,004	−0,004		+0,004	+0,003	+0,007	−2
1,−4	−0,048	+0,069		+0,001		+0,022	−8
2,−4	−0,394	+0,252		+0,058	+0,021	−0,063	−6
3,−4	+0,212	−0,172		+0,063	+0,048	+0,151	+4
4,−4	+0,042	−0,010		+0,006	+0,004	+0,042	−2
2,−5	−0,020	+0,012		+0,002		−0,006	+2
3,−5	+0,049	−0,044		+0,003	+0,002	+0,010	−1
14.							
3,−5	−0,147	+0,046		+0,068	+0,026	−0,007	0
4,−5	−0,030	−0,005		+0,030	+0,024	+0,019	+1
5,−5	+0,031	−0,009		−0,011	−0,004	+0,007	0
3,−6	−0,015	+0,003		+0,006	+0,004	−0,005	+4
4,−6	−0,002	−0,004		+0,004	+0,002	+0,003	0
5,−6	+0,009	−0,003		−0,003	−0,002	+0,004	0

Digitized by Google

§ 20. Berechnung der Mondstörungen, die den Abtheilungen 8, 9, 10 angehören.

Berechnung der Erdmasse und der Sonnenparallaxe, die aus der Vergleichung der Mondstörungen mit den Beobachtungen folgt.

259.

Die in der Ueberschrift genannten Störungen können wieder nach der in den beiden vorhergehenden §§ angewandten Methode berechnet werden, nur müssen hier nicht nur die den Abtheilungen 1, 2, 11, etc. zugehörigen Störungen unter den Zeichen $n\delta z$, ν, etc. verstanden werden, sondern auch die, welche den Abtheilungen 3, 4, 6, 7 angehören, da die Verbindung dieser Glieder derselben Ordnung geben, wie die jener. Die den Abtheilungen 8, 9, 10 zukommenden Störungen werden hier durch die Zeichen $n\Delta z$, $\Delta\nu$, etc. ausgedrückt. Diese Störungen sind übrigens sehr klein, und dieser Umstand erlaubt, das Verfahren in einigen seiner Theile abzukürzen.

260.

Es darf gesetzt werden

$$\Delta' T = T_0 + \left(\frac{dT_0}{dg}\right) n\delta z + (2T_0 - G_0)\,\nu - 2\,(T_0 - G_0 - \Sigma_0)\,\delta\frac{h_0}{h} - \\ + H\delta P + N\delta Q$$

und bez.

$$\Delta' T = T_0 + \left(\frac{dT_0}{dg}\right) n\delta z + (3T_0 - G_0)\,\nu - 2\,(T_0 - G_0 - \Sigma_0)\,\delta\frac{h_0}{h} \\ + H\delta P + N\delta Q$$

Der erste dieser Ausdrücke muss für die Abtheilungen 3 und 4 von T_0 angewandt werden, und giebt in Verbindung mit den Störungen der Abtheilungen 6 und 7 die verlangten Argumente, indem nach Art. 86

$$\begin{aligned} 8. &= \ \ 3. - 6. \\ &= \ \ 4. + 6. \\ 9. &= \ \ 3. + 6. \\ &= \ \ 4. + 7. \\ 10. &= -\ 3. + 7. \\ &= -\ 4. + 6. \end{aligned}$$

Digitized by Google

ist. Der zweite Ausdruck von $\Delta' T$ dient für die Abtheilungen 6 und 7 von T_0, die wiederum mit den Abtheilungen 3, 4, 12, 13 der Störungen die verlangten Argumente, theils durch die vorstehenden, theils durch die folgenden Gleichungen geben.

$$\begin{aligned} 8. &= 12. - 7. \\ &= - 13. + 7. \\ 9. &= 12. - 6. \\ 10. &= 13. - 6. \end{aligned}$$

Die Producte $H\partial P$ und $N\partial Q$ sind wieder hier die Fortsetzung der früher eben so benannten Producte. Es fand sich

γ, g, g'	$\Delta' T_0$ sin	(1) sin	(2) sin	(3) sin	(4) sin	(5) sin	$\Delta' T$ sin
8.							
0,0,1	0	−0,45	−0,62	+0,07	−0,34	+0,35	−0,99
	−2,50	+0,41	+0,74	−0,02	+0,83	+0,28	−0,26
	+3,95	−0,44	−0,07		−0,14	−0,98	+2,32
0,1,1	+39	+10	+4		+4	−6	+54
	+13	−7	−1		−2	+2	+5
	−65,63	−7,31	−3,36	+0,05	−2,93	+6,28	−72,90
0,0,0	0	+0,06	+0,10		−0,01	+0,01	+0,16
	−0,04	−0,09	−0,07		+0,02		−0,18
	+0,07	+0,02	−0,05			−0,02	+0,02
0,1,0	+1	−2	−1				−2
	0	+1	0				+1
	−1,10	+0,73	+0,48		+0,06	−0,05	+0,12
9.							
0,2,−1	−16	+2	−1		+2		−13
	+8	−3					+5
	+17	−2			−2		+13
0,3,−1	+96	−21	+5	+1	−6	−2	+73
	−32	+10	−1		+2	+1	−20
	−97	+12	−4		+6	+2	−81
10.							
0,1,−3	+33	0			+4	+2	+39
	+11	−1	+1			−1	+10
	−54,8	−1,4	+0,6	−0,1	−4,4	+1,2	−5,86
0,2,−3	−2	+10	+5				+13
	+1	−4	−2				−5
	+2	−7	−4				−9

Um Platz zu gewinnen, habe ich hier 0"001 zur Einheit angenommen,

Digitized by Google

und die Producte der vorstehenden Ausdrücke der Reihe nach mit (1), (2), etc. bezeichnet.

Aus demselben Grunde wie oben wird

$$\Delta'\Sigma' = \Sigma_0 + \left(\frac{d\Sigma_0}{dg}\right) n\delta z + 2\Sigma\nu + H\delta P + N\delta Q$$

und bez.

$$\Delta'\Sigma' = \Sigma_0 + \left(\frac{d\Sigma_0}{dg}\right) n\delta z + 3\Sigma\nu + H\delta P + N\delta Q$$

wo dieselben Bemerkungen gelten. Hiefür fand sich

g, g'	$\Delta'\Sigma_0$	(1)	(2)	(3)	(4)	$\Delta'\Sigma'$
8.						
0,1	−1,80	−0,19	−0,10	−0,19	+0,23	−2,05
1,1	+3			+1	−1	+13
0,0	−0,03		+0,01			−0,02
9.						
3,−1	+32	−3		−2		+27
10.						
1,−3	+11					+11

wo die obigen Bemerkungen wieder gelten.

261.

Die der weiteren Rechnung zu Grunde zu legenden Grössen sind

g, g'	$n\Delta z$ sin	Δw cos	$\nu\Delta w$ cos	Δv cos
8.				
0,1	+0″,084	−0″,018	+0″,006	−0″,012
1,1	+0,760	−0,412	+0,003	−0,409
1,0	+0,083	−0,043		−0,043
9.				
2,−1	−0,007	+0,004	+0,008	+0,012
3,−1	+0,008	−0,008	+0,002	−0,006
10.				
1,−3	−0,295	+0,097	−0,001	+0,096

und hiemit ergiebt sich zuerst

Digitized by Google

g, g'	(17) $n.\Delta z$ sin	(18) Δv sin	Summe sin
8.			
0,1	+0″,00043	+0″,00033	+0″,00076
1,1	−0,002		−0,002
0,0	+0,00010	+0,00002	+0,00012
9.			
3,−1	−0,006	+0,003	−0,003
10.			
1,−3	+0,006	+0,002	+0,008

woraus mit Zuziehung des im vor. Art. gefundenen Werthes von $\Delta' \Sigma$ folgt,

g, g'	$\Delta \frac{h_0}{h}$ cos
8.	
0,1	−0″,031
1,1	+0,014
0,0	−0,009
9.	
3,−1	+0,008
10.	
1,−3	+0,004

262.

Man bekommt ferner

γ, g, g'	(1) $n.\Delta z$ sin	(2) Δv sin	(3) $\Delta \frac{h_0}{h}$ sin	(4) $\frac{d\Delta v}{ndt}$ sin	Summe sin
8.					
0,0,1	−0″,00138	−0″,00067	+0″,00005	+0″,00031	−0″,00169
	+0,00093	+0,00058	−0,00053	+0,00030	+0,00128
	+0,00092	+0,00017	+0,00052	−0,00011	+0,00150
0,1,1	+0,006	+0,002			+0,008
	−0,002	+0,101		−0,004	−0,005
	−0,00123	−0,00401	−0,00022	−0,00380	−0,00926

8.					
0,0,0	−0″,00043	−0″,00001		+0″,00003	−0″,00011
	+0,00004	+0,00002	−0″,00015	+0,00003	−0,00006
	+0,00008		+0,00015	−0,00001	+0,00022
0,1,0	0,000				
	0,000				
	+0,00042	−0,00025		−0,00033	−0,00046
9.					
0,2,−1	+0,001	+0,001			+0,002
	0,000	−0,001			−0,001
	−0,001	−0,001			−0,002
0,3,−1	+0,019	−0,010			+0,009
	−0,009	+0,003			−0,006
	−0,010	+0,007			−0,003
10.					
0,1,−3	−0,019	−0,010			−0,029
	+0,008	+0,003		+0,001	+0,012
	+0,0085	+0,0069	+0,0001	+0,0006	+0,0161

und hieraus in Verbindung mit dem Werthe von $\Delta' T$ des vor. Art. ergiebt sich

γ, g, g'	ΔW_0 cos	$\left(\frac{d\Delta W_0}{d\gamma}\right)$ sin	$\left(\frac{d^2\Delta W_0}{d\gamma^2}\right)$ cos
8.			
0,0,1	+0″,0291		
	+0,0339		
−1,1,1	−0,0010	−0″,0016	
−2,2,1	−0,0004	−0,0002	
1,−1,1	+0,0043	−0,0043	
	+0,0371	−0,0055	
0,1,1	−0,054		
−1,2,1	−0,005	−0,005	+0″,005
1,0,1	+0,893	−0,893	−0,893
	+0,834	−0,898	−0,888
0,0,0	−0,00304		
	−0,00581		
−1,1,0	+0,00024	+0,00024	
−2,2,0	−0,00004	−0,00002	
1,−1,0	+0,00024	−0,00024	
	−0,00534	−0,00002	
0,1,0	+0,002		
−1,2,0	0,000		
1,0,0	+0,021	−0,021	
	+0,023	−0,021	

9.			
0,2,−1	+0″,006		
−1,3,−1	−0,001	−0″,001	+0″,001
1,1,−1	−0,011	+0,011	+0,011
	−0,006	+0,010	+0,012
0,3,−1	−0,021		
−1,4,−1	+0,005	+0,005	−0,005
1,2,−1	+0,043	−0,043	−0,043
	+0,027	−0,038	−0,048
10.			
0,1,−3	−0,013		
−1,2,−3	−0,012	−0,012	+0,012
1,0,−3	−0,188	+0,188	+0,188
	−0,213	+0,176	+0,200
0,2,−3	−0,007		
−1,3,−3	+0,002	+0,002	
1,1,−3	+0,012	−0,012	
2,0,−3	−0,005	+0,010	
	+0,002	0,000	

263.

Es ist nun auf ähnliche Weise wie vorher

$$-3a\Delta l'\Omega = -3a\Delta l'\Omega_0 - 3a\left(\frac{\Delta.l'\Omega_0}{dg}\right) n\delta z - 6a\Omega_0\,\nu + H\delta P + N\delta Q$$

und bez.

$$-3a\Delta l'\Omega = -3a\Delta l'\Omega_0 - 3a\left(\frac{\Delta.l'\Omega_0}{dg}\right) n\delta z - 9a\Omega_0\,\nu + H\delta P + N\delta Q$$

und eben so

$$3\left(\frac{\Delta a.l'\Omega}{dg'}\right) = 3\left(\frac{\Delta a.l'\Omega_0}{dg'}\right) + 3\left(\frac{\Delta^2 a.l'\Omega_0}{dg\,dg'}\right) n\delta z + 6\left(\frac{\Delta a.l'\Omega_0}{dg'}\right)\nu + H\delta P + N\delta Q$$

und bez.

$$3\left(\frac{\Delta a.l'\Omega}{dg'}\right) = 3\left(\frac{\Delta a.l'\Omega_0}{dg'}\right) + 3\left(\frac{\Delta^2 a.l'\Omega_0}{dg\,dg'}\right) n\delta z + 9\left(\frac{\Delta a.l'\Omega_0}{dg'}\right)\nu + H\delta P + N\delta Q$$

und hienach wurde erhalten

g, g'	$-3a\Omega_0$ cos	(1) cos	(2) cos	(3) cos	(4) cos	$-3a\Omega$ cos
8.						
0,1	+5,4	−0,1	−0,5	−0,5	−1,0	+3,0
0,0	+0,09	0,00	+0,01	−0,02	−0,03	+0,05

Digitized by Google

g, g'	$3\left(\frac{da\Omega_0}{dg'}\right)$ sin	(1) sin	(2) sin	(3) sin	(4) sin	$3\left(\frac{da\Omega}{dg'}\right)$ sin
8.						
0,1	+5,4	+0,4	+0,6	−1,3	+0,1	+5,2
0,0	0	+0,06	+0,07	−0,03	+0,03	+0,13

Es ist hier die Bezeichnung der Producte der oben eingeführten analog, auch ist wieder, um Platz zu gewinnen, 0″,001 zur Einheit gemacht worden.

In Bezug auf die Producte (27) $\Delta\frac{h_0}{h}$, (28) $\Delta f\Upsilon$, (29) $\Delta f''\Psi$ ist zu bemerken, dass in denselben alle Glieder aufgenommen werden müssen, die die obigen Argumente geben, also nicht blos die den Abtheilungen 8, 9, 10 angehörigen, sondern auch die 3, 4, 6, 7 zukommenden; auf die übrigen Producte bezieht sich diese Bemerkung nicht. Alle diese Producte wurden wie folgt gefunden,

g, g'	(27) $\Delta\frac{h_0}{h}$ cos	(28) $\Delta f\Upsilon$ cos	(29) $\Delta f''\Psi$ cos	(30) $n.\Delta z$ cos	(31) Δv cos	$-3a\Omega$ cos
8.						
0,1	−0″,0004	+0″,0173	+0″,0161	+0″,0003	+0″,0004	+0″,0030
0,0	−0,00006	−0,00288	−0,00322	−0,00011	−0,00009	+0,00005

g, g'	(34) $n.\Delta z$ sin	(35) Δv sin	$3\left(\frac{da\Omega}{dg'}\right)$ sin	$\frac{d\Delta X}{ndt}$ sin
8.				
0,1	−0″,0011	−0″,0007	+0″,0052	+0″,0034
0,0	−0,00015	−0,00009	+0,00013	−0,00011

und hieraus wie früher

g, g'	$\Delta\Xi - u.\Delta X$ cos	$u.\Delta X$ cos	$\Delta\Xi$ cos
8.			
0,1	+0″,0367	−0″,0028	+0″,0339
0,0	−0,00631	+0,00050	−0,00581

die oben in der Tafel für ΔW_0 angesetzt sind.

Digitized by Google

264.

Die noch erforderlichen Producte sind die folgenden.

g, g'	$\left(\frac{d.\Delta W_0}{dy}\right) n\partial z$ cos	(10) $n.\Delta z$ cos	(11) Δv cos	Summe cos
8.				
0,1	−0″,0482	+0″,0030	+0″,0127	−0″,0325
1,1	−0,048	+0,003	+0,005	−0,040
0,0	+0,00777	+0,00029	−0,00189	+0,00617
1,0	+0,001			+0,001
9.				
2,−1	+0,057	+0,008	+0,014	+0,079
3,−1	+0,001	+0,010	+0,003	+0,014
10.				
1,−3	−0,028	−0,011	+0,002	−0,037
2,−3	+0,007	−0,001	+0,001	+0,007

g, g'	$\left(\frac{d^2.\Delta W_0}{dy^2}\right) n\partial z$ sin	(14) $n.\Delta z$ sin	(15) Δv sin	Summe sin
8.				
0,1	+0″,0061	−0″,0011	−0″,0002	+0″,0048
1,1	−0,025	−0,001		−0,026
0,0	+0,00001	+0,00015	−0,00002	+0,00014
1,0	+0,001			+0,001
9.				
2,−1	−0,039	−0,007		−0,046
3,−1	+0,009	−0,013		−0,004
10.				
1,−3	+0,022	+0,012		+0,034
2,−3	−0,005	+0,003		−0,002

265.

Hiemit ergiebt sich nun das folgende Resultat.

Digitized by Google

g, g'	$n.\Delta z$ sin	Diff.	Δv	$-\nu.\Delta w$	Δw	Diff.
8.						
0,1	+0″050	+34	−0″001	−0″006	−0″010	−8
1,1	+0,757	+3	−0,125	−0,003	−0,128	+16
0,0	+0,049	—	+0,003		+0,003	—
1,0	+0,024	+59	−0,010		−0,010	−33
9.						
2,−1	+0,037	−44	−0,009	−0,008	−0,017	+21
3,−1	+0,010	−2	−0,006	−0,002	−0,008	0
10.						
1,−3	−0,324	+29	+0,136	+0,001	+0,137	−40
2,−3	+0,005	—	−0,001		−0,001	—

Wegen der Kleinheit dieser Störungsglieder habe ich nicht für nöthig erachtet, $\Delta\frac{b_0}{h}$ daraus zur Controlle zu berechnen.

266.

Man hat in der ersten Abhandlung gesehen, dass alle in diesem und dem nächst vorhergehenden Paragraphen berechneten Störungsglieder von dem Verhältniss $\frac{a}{a'}$, oder dem Verhältnisse der grossen Halbachse der Mondbahn zu der der Sonnenbahn abhängen, und diesem proportional sind. Die Genauigkeit dieser Störungsglieder hängt also wesentlich von der Genauigkeit ab, mit welcher dieses Verhältniss erhalten werden kann. Nun hängt aber dieses Verhältniss von der Sonnenparallaxe ab, und der Werth dieser letzteren, der bis dahin im Gebrauch ist, kann nicht als so genau bezeichnet werden, dass er für eine ausreichend genaue Berechnung dieser Störungsglieder dienen könnte. Es blieb daher bei der Bearbeitung der Mondtafeln nichts weiter übrig, als zu den mit dem im Art. 52 vorläufig angenommenen Werthe von $\frac{a}{a'}$ berechneten Störungsgliedern durch die Vergleichung mit den Mondbeobachtungen den erforderlichen Verbesserungsfactor zu bestimmen, welcher zugleich der Verbesserungsfactor von $\frac{a}{a'}$ ist.

Für dieses Verfahren ist noch ein anderer Grund vorhanden. Ausser dem Factor $\frac{a}{a'}$ sind alle Grössen, die man zur Berechnung der genannten Störungsglieder bedarf, mit mehr wie ausreichender Genauig-

Digitized by Google

keit gegeben, die einzige Unsicherheit, die in den berechneten Werthen vorhanden sein kann, rührt also von der Unsicherheit dieses Factors her, und die genaue Bestimmung desselben, die durch Hülfe der Mondtheorie geboten wird, bietet unter allen vorhandenen Mitteln zur Bestimmung der Sonnenparallaxe eins der sichersten dar. Schon aus diesem Grunde durfte die Bestimmung dieses Factors bei der Vergleichung der Mondbeobachtungen mit der Theorie nicht unterlassen werden. Der Hauptcoefficient, auf den es hiebei ankommt, ist der der sogenannten parallactischen Ungleichheit, und ist grösser wie 120″, während die Sonnenparallaxe nur 8″ bis 9″ beträgt, und hieraus folgt, dass 0″,1 Unsicherheit in der Bestimmung dieses Coefficienten nur 0″,007 Unsicherheit in der daraus sich ergebenden Sonnenparallaxe hervorbringt. Es wurde daher bei der Bestimmung der Verbesserung der angenommenen Werthe der elliptischen Elemente der Mondbahn durch die Vergleichung der aus der Theorie berechneten Mondörter mit den Beobachtungen die von $\frac{a}{a'}$ abhängigen Störungsglieder mit einem unbestimmten Factor versehen eingeführt, dieser wurde in die Bedingungsgleichungen mit aufgenommen, und nebst den übrigen Unbekannten bestimmt. Zufolge der Mondtafeln S 16 ergab sich der Factor, mit welchem die genannten Störungen multiplicirt werden mussten, um den Beobachtungen Gnüge zu leisten,

$$= 1{,}03573$$

und in den Tafeln selbst sind diese Störungen auch mit diesem Factor multiplicirt worden. Nach Art. 52 ist bei der Berechnung dieser Störungen

$$\log \frac{a}{a'} = 7{,}4034757$$

angenommen worden, und dieser Werth muss folglich mit dem obigen Factor multiplicirt werden. Hiemit wird

$$\log \frac{a}{a'} = 7{,}4187223$$

der Werth dieses Verhältnisses, welcher sich mir aus der Mondtheorie ergeben hat, und hieraus erhält man die Sonnenmasse (oder die Erdmasse) und die mittlere Sonnenparallaxe auf die folgende Art.

Digitized by Google

267.

Man würde die mittlere Sonnenparallaxe sogleich aus dem vorstehenden Werthe von $\frac{a}{a'}$ bekommen, wenn man diesen mit dem Werthe der Mondparallaxe für $r = a$ multiplicirte, allein man kann die Entwickelungen auch so stellen, dass die Mondparallaxe gar nicht erscheint, und dieses Verfahren, welches übersichtlicher und directer ist wie jenes, soll hier angewandt werden.

Bezeichnet man wie früher die Erdmasse mit M, die Mondmasse mit m, und die Sonnenmasse mit m', so giebt das, beides auf den Mond und die Sonne angewandte, dritte Keppler'sche Gesetz

$$\frac{a}{a'} = \sqrt[3]{u^2 \frac{M+m}{M+m'}}$$

und aus diesem Ausdruck ist zufolge des Art. 52 mit Anwendung des bisher angenommenen Werthes der Sonnenmasse, der den Störungsrechnungen zu Grunde gelegte Werth von $\frac{a}{a'}$ berechnet worden. Es folgt aus diesem Ausdruck

$$\frac{m'}{M} = \frac{u^2\left(1+\frac{m}{M}\right)}{\left(\frac{a}{a'}\right)^3} - 1$$

und wendet man nun den im vor. Art. gefundenen verbesserten Werth von $\frac{a}{a'}$ an, und setzt wie früher $m = \frac{M}{80}$, so erhält man

$$m' = 319455\,M$$

für die Sonnenmasse oder

$$M = \frac{m'}{319455}$$

für die Erdmasse, die sich aus der Mondtheorie ergeben hat. Dieser Werth ist beträchtlich von dem bisher angenommenen Werthe derselben verschieden.

268.

Um aus dem eben gefundenen Werthe der Sonnenmasse die mittlere Sonnenparallaxe zu finden, dienen die folgenden Betrachtungen. Sei P die Länge des einfachen Pendels, welches auf dem Parallel, dessen Sinus der geocentrischen Breite $= \sqrt{\frac{1}{3}}$ ist, in t Secunden mittlerer Zeit Eine Oscillation ausführen würde, wenn die Centrifugalkraft nicht

Digitized by Google

vorhanden wäre, D der Radius der Erde für diesen Parallel, und π das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser, dann zeigt die Dynamik, dass

$$t = \pi \sqrt{\frac{P}{k^2 \frac{M}{D^2}}}$$

ist, und hieraus folgt

$$k^2 M = \frac{\pi^2 P D^2}{t^2}$$

Nennt man aber T' die siderische Umlaufszeit der Erde, und wie früher n' die mittlere siderische Bewegung derselben, so ist, abgesehen von den n' und T' zu Grunde liegenden Einheiten $2\pi = n'T'$, nennt man ferner p' die mittlere Horizontalparallaxe der Sonne auf demselben Parallel, dann wird $D = a' \sin p'$, und hiemit geht die vorstehende Gleichung über in

$$k^2 M = \frac{a'^3 n'^2 T'^2 P \sin^2 p'}{4 t^2 D}$$

Das dritte Keppler'sche Gesetz giebt aber

$$a'^3 n'^2 = k^2 (M + m')$$

und hiemit wird

$$\sin p' = \sqrt[3]{\frac{4 t^2 D M}{T'^2 P (M + m')}}$$

Man macht diesen Ausdruck homogen, wenn man T' in mittleren Zeitsecunden, und P und D in einerlei Maass, z. B. Metern, ausdrückt. Nennt man endlich, immer für den oben genannten Parallel, P' die wirklich statt findende Länge des einfachen Pendels, welches in t Secunden mittlerer Zeit Eine Oscillation vollbringt, und g das Verhältniss der verticalen Componente der Centrifugalkraft zur Schwerkraft, so ist

$$P = P' (1 + g)$$

und für g giebt die Dynamik den folgenden Ausdruck

$$g = \frac{4 t^2 D}{\tau^2 P'} \cos^2 \varphi$$

wo φ die geocentrische Breite des Parallels überhaupt, und τ die Anzahl von Secunden mittlerer Zeit bedeutet, die während einer Umdrehung der Erde um ihre Axe verfliesst.

269.

Die Sonnentafeln geben

$$T' = 31558149^s, \quad \tau = 86164^s$$

Digitized by Google

und nach Bessel habe ich den Logarithmus des in Metern ausgedrückten Aequatorealhalbmessers der Erde = 6,8046271 angenommen. Da ferner der Logarithmus der Reduction dieses Halbmesser auf den oben genannten Parallel = 9,9995166 ist, so wird

$$D = 6370063^m$$

Für die Länge des einfachen Secundenpendel nehme ich

$$0^m{,}990941 + 0^m{,}005176 \sin^2\varphi$$

an, woraus

$$P' = 0^m{,}992666 \text{ und } l = 1^s$$

folgt. Es folgt hieraus

$$g = \frac{\cos^2\varphi}{289{,}44} = \frac{1}{433{,}86}$$

$$P = 0^m{,}992666\,\frac{434{,}86}{433{,}86}$$

das sind die Zahlenwerthe, die ich immer in den betreffenden Rechnungen angewandt habe. Substituirt man nun diese Zahlen in die Formel des vor. Art., so bekommt man

$$p' = 8''{,}9060$$

für den oben genannten Parallel, dessen Sinus der Breite $= \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist, durch Anwendung des oben gegebenen Reductionsfactors auf den Aequator reducirt, wird daher die mittlere

Aequatoreal-Horizontalparallaxe der Sonne = 8″,9159

sehr nahe mit den Werthen übereinstimmend, die man in neuerer Zeit auf andere Weise erhalten hat.

270.

Es verdient endlich noch untersucht zu werden, in wie weit der Werth der Gaussischen Constante k sich durch die vorstehenden Werthe ändert. Der Ausdruck ist

$$k = \frac{2\pi}{T'\sqrt{1+M}}$$

wo T' in mittleren Tagen und M in Theilen der Sonnenmasse ausgedrückt werden muss. Aus den Sonnentafeln ist

$$T' = 365{,}2563582$$

und aus dem Art. 267

$$M = \frac{1}{319455}$$

Digitized by Google

Hiemit wird in 12 Decimalen

$$\begin{aligned} \log 2\pi &= 0{,}79817\ 98683\ 58 \\ \text{Compl. } \log T' &= 7{,}43740\ 22153\ 47 \\ \log \sqrt{1+M} &= 0{,}00000\ 06797\ 42 \\ \log k &= 8{,}23558\ 14039\ 63 \end{aligned}$$

in Theilen des Kreisradius, oder da der Logarithmus des Kreisbogens, welcher dem Radius gleich ist

$$\begin{aligned} &= 5{,}31442\ 51331\ 77 \\ \log k &= 3{,}55000\ 65371\ 40 \end{aligned}$$

in Secunden. Der Unterschied dieses Resultats mit dem Gaussischen beträgt 374 Einheiten der zehnten Decimale, und ist also unerheblich.

§ 21. Berechnung der von der Figur der Erde abhängigen Mondstörungen.

271.

Die im § 11 ausgeführte Berechnung dieser Störungen ist dort nur als eine vorläufige bezeichnet worden, und es sollen daher hier dieselben durch Anwendung der im Vorhergehenden auseinander gesetzten allgemeinen Methoden genauer berechnet werden. Es brauchen hiefür von der im Art. 152 entwickelten Störungsfunction nur das constante Glied und die von der einfachen Knotenlänge abhängigen Glieder aufgenommen zu werden, da die von der doppelten Knotenlänge abhängigen Glieder zu klein sind, als dass das Product derselben mit der störenden Kraft der Sonne merklich werden könnte. Auch von jenen Gliedern kann das mit $\cos(2f + 2\omega + \Theta)$ multiplicirte übergangen werden, da der Coefficient desselben allzu klein ist, um Berücksichtigung zu verdienen. Von dieser Störungsfunction, die zufolge der hier eingeführten Bezeichnungen von nun an $\mathit{\Omega}'$ zu nennen ist, kommen also nur die folgenden Glieder in Betracht,

$$\begin{aligned} \mathit{\Omega}' = {} & \frac{\mathit{A}}{2r^3}(1 - \tfrac{3}{2}\sin^2\varepsilon)(1 - 6\sin^2\tfrac{1}{2}J\cos^2\tfrac{1}{2}J) \\ & - \frac{3\mathit{A}}{r^3}\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}J(1 - \tfrac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J)\cos\Theta \\ & + \frac{3\mathit{A}}{r^3}\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}J\cos^3\tfrac{1}{2}J\cos(2f + 2\omega - \Theta) \end{aligned}$$

Die übrigen Bezeichnungen sind hier wie a. a. O., und ich führe davon

Digitized by Google

nur an, dass ε die Schiefe der Ecliptik, und Θ das Supplement der tropischen Länge des aufsteigenden Mondknotens auf der Ecliptik bedeuten, also

$$\Theta = n\,(\alpha + \eta - p)\,t + N - K - \pi'$$

ist, wo np den Coefficienten der allgemeinen Präcession bezeichnet.

272.

Wenden wir uns nun wieder zuerst zu den Breitenstörungen, so bekommen wir wie früher

$$\begin{aligned}
n_0 a' B &= \tfrac{3h_0 A}{r^3}\,(1 - \tfrac{3}{2}\sin^2\varepsilon)\sin\tfrac{1}{2}J\cos^2\tfrac{1}{2}J\cos J \\
&\quad + \tfrac{3h_0 A}{2r^3}\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos^2\tfrac{1}{2}J\,(1 - \tfrac{1.5}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J)\cos\Theta \\
&\quad - \tfrac{3h_0 A}{2r^3}\sin\varepsilon\cos\varepsilon\,(1 - \tfrac{1.1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J)\cos(2\overline{f} + 2\omega - \Theta) \\
n_0 a' C &= \tfrac{3h_0 A}{2r^3}\sin\varepsilon\cos\varepsilon\,(1 - \tfrac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J)\sin\Theta \\
&\quad - \tfrac{3h_0 A}{2r^3}\sin\varepsilon\cos\varepsilon\,(1 - \tfrac{1.1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J)\sin(2\overline{f} + 2\omega - \Theta)
\end{aligned}$$

In diesen Ausdrücken muss der Strenge nach sowohl auf die Veränderlichkeit von nz, r, h, wie auf die von J, N, K Rücksicht genommen werden, die Störungen der letztgenannten drei Functionen können jedoch hier übergangen werden, da sie nichts Merkliches hervorbringen können. Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
G &= \tfrac{3A}{a^3}\,(1 - \tfrac{3}{2}\sin^2\varepsilon)\sin\tfrac{1}{2}J\cos^2\tfrac{1}{2}J\cos J \\
H &= \tfrac{3A}{2a^3}\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos^2\tfrac{1}{2}J\,(1 - \tfrac{1.5}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J) \\
K &= \tfrac{3A}{2a^3}\sin\varepsilon\cos\varepsilon\,(1 - \tfrac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J) \\
L &= -\tfrac{3A}{2a^3}\sin\varepsilon\cos\varepsilon\,(1 - \tfrac{1.1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J)
\end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned}
n_0 a' B &= \tfrac{a^3 h}{r^3}\left\{G + H\cos\Theta + L\cos(2\overline{f} + 2\omega - \Theta)\right\} \\
n_0 a' C &= \tfrac{a^3 h}{r^3}\left\{K\sin\Theta + L\sin(2\overline{f} + 2\omega - \Theta)\right\}
\end{aligned}$$

In diesen Ausdrücken sind zuerst die elliptischen Werthe von f, r, h, und dann die Störungen derselben zu berücksichtigen.

Digitized by Google

273.

Man findet auf bekannte Art

$$\frac{a^3}{r^3} = \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + 3e\cos g$$

$$\frac{a^3}{r^3}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(2f+2\omega-\Theta\right) = -\tfrac{1}{2}e\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(g+2\omega-\Theta\right)$$
$$+\left(1-\tfrac{3}{4}e^2\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(2g+2\omega-\Theta\right)$$
$$+\tfrac{7}{4}e\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(3g+2\omega-\Theta\right)$$

$$h = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}$$

und hiemit wird zuerst

$$\mathit{\Delta}B_0 = \frac{G}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + \left\{\frac{H}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + 3e\,H\cos g\right\}\cos\Theta$$
$$-\tfrac{1}{2}e\,L\cos\left(g+2\omega-\Theta\right)$$
$$+\left(1-\tfrac{3}{4}e^2\right)L\cos\left(2g+2\omega-\Theta\right)$$
$$+\tfrac{7}{4}e\,L\cos\left(3g+2\omega-\Theta\right)$$

$$\mathit{\Delta}C_0 = \left\{\frac{K}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + 3e\,K\cos g\right\}\sin\Theta$$
$$-\tfrac{1}{2}e\,L\sin\left(g+2\omega-\Theta\right)$$
$$+\left(1-\tfrac{3}{4}e^2\right)L\sin\left(2g+2\omega-\Theta\right)$$
$$+\tfrac{7}{4}e\,L\sin\left(3g+2\omega-\Theta\right)$$

274.

Um diese Ausdrücke in Zahlen zu verwandeln, setze ich

$$\varepsilon = 23^0\,27'\,55''; \quad \frac{\mathit{\Delta}}{a^2} = 0''{,}0624\,(1+\mu)$$

wo μ ein Correctionsfactor ist, welcher später bestimmt werden wird. Hiemit ergiebt sich

$$\log\frac{G}{1+\mu} = 7{,}80394; \quad \log\frac{H}{1+\mu} = 8{,}52640$$
$$\log\frac{K}{1+\mu} = 8{,}53170; \quad \log\frac{L}{1+\mu} = 8{,}52905n$$

$$\mathit{\Delta}B_0 = +\,0''{,}006406\,(1+\mu)$$
$$\left.\begin{matrix}+\,0{,}033808\\ +\,0{,}0055\cos g\end{matrix}\right\}(1+\mu)\cos\Theta$$
$$\left.\begin{matrix}+\,0{,}0009\cos\left(g+2\omega-\Theta\right)\\ -\,0{,}0337\cos\left(2g+2\omega-\Theta\right)\\ -\,0{,}0065\cos\left(3g+2\omega-\Theta\right)\end{matrix}\right\}(1+\mu)$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} \Delta' C_0 = &+ 0''{,}034223 \\ &+ 0{,}0056 \cos g \end{aligned}\right\} (1+\mu) \sin \Theta$$
$$\left.\begin{aligned} &+ 0{,}0009 \sin (g+2\omega-\Theta) \\ &- 0{,}0337 \sin (2g+2\omega-\Theta) \\ &- 0{,}0065 \sin (3g+2\omega+\Theta) \end{aligned}\right\} (1+\mu)$$

Um hievon zu $\Delta' B$ und $\Delta' C$ überzugehen, wird mit ausreichender Genauigkeit

$$\Delta' B = \Delta' B_0 + \left(\frac{d.\Delta' B_0}{dg}\right) n\delta z + \Delta' B_0 \left[(1+\nu)^{-3} + \delta\frac{h}{h_0} - 1\right]$$
$$\Delta' C = \Delta' C_0 + \left(\frac{d.\Delta' C_0}{dg}\right) n\delta z + \Delta' C_0 \left[(1+\nu)^{-3} + \delta\frac{h}{h_0} - 1\right]$$

indem die von δP, δQ, δK abhängigen Glieder hier unmerklich sind. Die Ausdrücke für $n\delta z$ und $\delta\frac{h}{h_0}$ findet man in den Artt. 66 und 69, und da

$$(1+\nu)^{-3} = 1 - 3\nu + 6\nu^2 - 10\nu^3 \pm \text{etc.}$$
$$= 1 - 3w + \tfrac{9}{2}w^2 - \tfrac{9}{2}w^3 + \text{etc.}$$

ist, so geben die Artt. 66 und 67

$$\begin{aligned} (1+\nu)^{-3} - 1 = &+ 416{,}0 \\ &- 187{,}2 \cos g \\ &- 115{,}6 \cos (-1,-1,1) \\ &- 67{,}3 \cos (0,-1,1) \\ &+ 162{,}8 \cos (1,-1,1) \\ &- 41{,}9 \cos (1,-1,2) \\ &- 52{,}7 \cos (2,-1,2) \\ &+ 155{,}1 \cos (0,-2,2) \\ &+ 6378{,}0 \cos (1,-2,2) \\ &+ 4654{,}4 \cos (2,-2,2) \\ &+ 209{,}0 \cos (3,-2,2) \\ &+ 269{,}2 \cos (1,-3,2) \\ &+ 330{,}4 \cos (2,-3,2) \\ &+ 18{,}5 \cos (3,-3,2) \\ &- 130{,}7 \cos (1,0,3) \\ &+ 8{,}3 \cos (2,0,3) \\ &- 16{,}3 \cos (-1,2,4) \\ &- 21{,}5 \cos (0,2,4) \\ &- 8{,}2 \cos (1,2,4) \end{aligned}$$

wo in der abgekürzten Bezeichnung der Argumente die erste Zahl den

Digitized by Google

Factor von g, die zweite den von g', und die dritte die Abtheilung bedeutet. Hieraus

$$\left(\frac{d\mathcal{A}B_0}{dg}\right) n\delta z = \left.\begin{array}{l} -\,0'',00036 \cos(0,2,4) \\ -\,0,0008 \cos(1,2,4) \end{array}\right\} (1+\mu)\cos\Theta$$
$$\left.\begin{array}{l} -\,0,00036 \sin(0,2,4) \\ -\,0,0008 \sin(1,2,4) \end{array}\right\} (1+\mu)\sin\Theta$$

$$\left(\frac{d\mathcal{A}C_0}{dg}\right) n\delta z = \left.\begin{array}{l} +\,0,00036 \cos(0,2,4) \\ +\,0,0008 \cos(1,2,4) \end{array}\right\} (1+\mu)\sin\Theta$$
$$\left.\begin{array}{l} -\,0,00036 \sin(0,2,4) \\ -\,0,0008 \sin(1,2,4) \end{array}\right\} (1+\mu)\cos\Theta$$

$$\mathcal{A}B_0\left[(1+\nu)^{-3} + \delta\frac{h}{h_0} - 1\right] = \left.\begin{array}{l} +\,0'',000160\,(1+\mu) \\ +\,0,000840 \\ +\,0,0001 \cos g \\ +\,0,00013 \cos(0,-2,2) \\ +\,0,0011 \cos(1,-2,2) \\ +\,0,0007 \cos(2,-2,2) \\ -\,0,0008 \cos(2,0,3) \\ -\,0,0002 \cos(3,0,3) \\ -\,0,00030 \cos(0,2,4) \\ -\,0,0006 \cos(1,2,4) \end{array}\right\} (1+\mu)\cos\Theta$$
$$\left.\begin{array}{l} -\,0,0008 \sin(2,0,3) \\ -\,0,0002 \sin(3,0,3) \\ -\,0,00030 \sin(0,2,4) \\ -\,0,0006 \sin(1,2,4) \end{array}\right\} (1+\mu)\sin\Theta$$

$$\mathcal{A}C_0\left[(1+\nu)^{-3} + \delta\frac{h}{h_0} - 1\right] = \left.\begin{array}{l} +\,0'',000850 \\ +\,0,0001 \cos g \\ +\,0,00013 \cos(0,-2,2) \\ +\,0,0011 \cos(1,-2,2) \\ +\,0,0007 \cos(2,-2,2) \\ +\,0,0008 \cos(2,0,3) \\ +\,0,0002 \cos(3,0,3) \\ +\,0,00030 \cos(0,2,4) \\ +\,0,0006 \cos(1,2,4) \end{array}\right\} (1+\mu)\sin\Theta$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{ll} -\,0{,}0008 & \sin(2,0,3) \\ -\,0{,}0002 & \sin(3,0,3) \\ -\,0{,}00030 & \sin(0,2,4) \\ -\,0{,}0006 & \sin(1,2,4) \end{array}\right\} (1+\mu)\cos\Theta$$

Aus den vorstehenden Werthen wird nun

$$\begin{array}{rl} \Delta' B = & +\,0''{,}006566\,(1+\mu) \\ & \left.\begin{array}{ll} +\,0{,}034648 & \\ +\,0{,}0056 & \cos g \\ +\,0{,}00013 & \cos(0,-2,2) \\ +\,0{,}0011 & \cos(1,-2,2) \\ +\,0{,}0007 & \cos(2,-2,2) \\ +\,0{,}0009 & \cos(1,0,3) \\ -\,0{,}0345 & \cos(2,0,3) \\ -\,0{,}0067 & \cos(3,0,3) \\ -\,0{,}00066 & \cos(0,2,4) \\ -\,0{,}0014 & \cos(1,2,4) \end{array}\right\} (1+\mu)\cos\Theta \\ & \left.\begin{array}{ll} +\,0{,}0009 & \sin(1,0,3) \\ -\,0{,}0345 & \sin(2,0,3) \\ -\,0{,}0067 & \sin(3,0,3) \\ -\,0{,}00066 & \sin(0,2,4) \\ -\,0{,}0014 & \sin(1,2,4) \end{array}\right\} (1+\mu)\sin\Theta \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \Delta' C = & +\,0''{,}035073 \\ & \left.\begin{array}{ll} +\,0{,}0057 & \cos g \\ +\,0{,}00013 & \cos(0,-2,2) \\ +\,0{,}0011 & \cos(1,-2,2) \\ +\,0{,}0007 & \cos(2,-2,2) \\ -\,0{,}0009 & \cos(1,0,3) \\ +\,0{,}0345 & \cos(2,0,3) \\ +\,0{,}0067 & \cos(3,0,3) \\ +\,0{,}00066 & \cos(0,2,4) \\ +\,0{,}0014 & \cos(1,2,4) \end{array}\right\} (1+\mu)\sin\Theta \\ & \left.\begin{array}{ll} +\,0{,}0009 & \sin(1,0,3) \\ -\,0{,}0345 & \sin(2,0,3) \\ -\,0{,}0067 & \sin(3,0,3) \\ -\,0{,}00066 & \sin(0,2,4) \\ -\,0{,}0014 & \sin(1,2,4) \end{array}\right\} (1+\mu)\cos\Theta \end{array}$$

Digitized by Google

275.

Die eben ermittelten Ausdrücke von $\Delta'B$ und $\Delta'C$ müssen nun in die Gleichungen (76) und (77) des Art. 193, nemlich mit Weglassung der hier nicht gebraucht werdenden Glieder, in die Gleichungen

$$\frac{d.\Delta P}{ndt} = (38)n.\Delta z + (41).\Delta\alpha + (42).\Delta P + (43).\Delta Q + \Delta'B$$
$$\frac{d.\Delta Q}{ndt} = (46)n.\Delta z \qquad\qquad + (50).\Delta P + (51).\Delta Q + \Delta'C$$

substituirt werden, wobei von den numerischen Werthen der Coefficienten, die in den Artt. 211 und 212 gegeben sind, Gebrauch zu machen ist. Der Strenge nach hätten auch in die vorstehenden Gleichungen die mit $\Delta\nu$ und $\Delta\frac{h}{h_0}$ multiplicirten Glieder mit aufgenommen werden müssen, allein die Wirkung derselben ist im gegenwärtigen Falle unmerklich, weshalb sie weggelassen werden durften. Von den oben angesetzten Functionen brauchen auch nur die grössten Glieder aufgenommen zu werden, und zu diesem Zwecke setze ich

$$\Delta P = \lambda \sin\Theta;\ \Delta Q = \lambda_1 \cos\Theta$$

wo λ und λ_1 unbestimmte Coefficienten sind. Das grösste Glied in $n.\Delta z$ könnten wir auch mit unbestimmtem Coefficienten einführen, allein es ist einfacher, statt dessen den im Art. 179 gefundenen genäherten Werth $-7''533 \sin\Theta$ anzuwenden, welcher für diese Substitution jedenfalls hinreichend genau ist. Um nicht Glieder verschiedener Gattung zu erhalten, habe ich einen vorläufigen Werth von μ gesucht, und $\mu = -0{,}028$ gefunden, hiemit wird

$$n.\Delta z = -7''75\,(1+\mu)\sin\Theta$$

Die Substitution giebt nun

$$\begin{aligned}
\frac{d.\Delta P}{ndt} = &- 1855''76\,\Delta\alpha + 0''006566\,(1+\mu)\\
&+ \{\quad 14''2\lambda_1 + 0''034648\,(1+\mu)\}\\
&+ \{-120{,}2\lambda_1 + 0{,}0056\,(1+\mu)\ \}\cos g\\
&+ \{\quad -2{,}8\lambda_1\ \}\cos(-1,-1,1)\\
&+ \{\quad 42{,}1\lambda_1\ \}\cos(0,-1,1)\\
&+ \{\quad -4{,}4\lambda_1\ \}\cos(1,-1,1)\\
&+ \{\quad 0{,}5\lambda_1\ \}\cos(1,-1,2)\\
&+ \{\quad -10{,}2\lambda_1\ \}\cos(2,-1,2)\\
&+ \{\quad 8{,}2\lambda_1 + 0{,}00013\,(1+\mu)\}\cos(0,-2,2)\\
&+ \{-156{,}4\lambda_1 + 0{,}0011\,(1+\mu)\}\cos(1,-2,2)
\end{aligned}$$

Digitized by Google

+	$839{,}7\lambda_1$	$+ 0{,}0007\,(1+\mu)$	$\cos(2,-2,2)$	$\cos\Theta$
+	$47{,}2\lambda_1$		$\cos(3,-2,2)$	
+	$-9{,}0\lambda_1$		$\cos(1,-3,2)$	
+	$51{,}6\lambda_1$		$\cos(2,-3,2)$	
+	$3{,}2\lambda_1$		$\cos(3,-3,2)$	
+	$148{,}9\lambda_1$	$+ 0{,}0009\,(1+\mu)$	$\cos(1,0,3)$	
+	$-844{,}3\lambda_1$	$- 0{,}0345\,(1+\mu)$	$\cos(2,0,3)$	
+	$-47{,}2\lambda_1$	$- 0{,}0067\,(1+\mu)$	$\cos(3,0,3)$	
+	$45{,}7\lambda_1$		$\cos(-1,2,4)$	
+	$-848{,}4\lambda_1$	$- 0{,}00066\,(1+\mu)$	$\cos(0,2,4)$	
+	$+74{,}3\lambda_1$	$- 0{,}0014\,(1+\mu)$	$\cos(1,2,4)$	
+	$-29{,}1\lambda$	$- 0{,}0005\,(1+\mu)$	$\sin g$	$\sin\Theta$
+	$1{,}0\lambda$		$\sin(-1,-1,1)$	
+	$0{,}2\lambda$		$\sin(0,-1,1)$	
+	$-1{,}6\lambda$		$\sin(1,-1,1)$	
+	$0{,}8\lambda$		$\sin(1,-1,2)$	
+	$-10{,}0\lambda$	$- 0{,}0001\,(1+\mu)$	$\sin(2,-1,2)$	
+	$6{,}3\lambda$	$- 0{,}00001\,(1+\mu)$	$\sin(0,-2,2)$	
+	$-144{,}4\lambda$	$- 0{,}0005\,(1+\mu)$	$\sin(1,-2,2)$	
+	$870{,}2\lambda$	$+ 0{,}0057\,(1+\mu)$	$\sin(2,-2,2)$	
+	$48{,}2\lambda$	$+ 0{,}0005\,(1+\mu)$	$\sin(3,-2,2)$	
+	$-8{,}2\lambda$		$\sin(1,-3,2)$	
+	$54{,}1\lambda$	$+ 0{,}0004\,(1+\mu)$	$\sin(2,-3,2)$	
+	$3{,}3\lambda$		$\sin(3,-3,2)$	
+	$-149{,}6\lambda$	$+ 0{,}0014\,(1+\mu)$	$\sin(1,0,3)$	
+	$850{,}7\lambda$	$- 0{,}0402\,(1+\mu)$	$\sin(2,0,3)$	
+	$47{,}5\lambda$	$- 0{,}0072\,(1+\mu)$	$\sin(3,0,3)$	
+	$-46{,}3\lambda$	$- 0{,}0002\,(1+\mu)$	$\sin(-1,2,4)$	
+	$858{,}5\lambda$	$- 0{,}00053\,(1+\mu)$	$\sin(0,2,4)$	
+	$-75{,}0\lambda$	$- 0{,}0011\,(1+\mu)$	$\sin(1,2,4)$	
$\frac{d\Delta Q}{ndt} =$	$-24{,}3\lambda$	$+ 0{,}035192\,(1+\mu)$		
+	$120{,}6\lambda$	$+ 0{,}0059\,(1+\mu)$	$\cos g$	
+	$2{,}8\lambda$		$\cos(-1,-1,1)$	
+	$-42{,}7\lambda$		$\cos(0,-1,1)$	
+	$+4{,}4\lambda$		$\cos(1,-1,1)$	
+	$-0{,}5\lambda$		$\cos(1,-1,2)$	
+	$10{,}4\lambda$	$+ 0{,}0001\,(1+\mu)$	$\cos(2,-1,2)$	

Digitized by Google

+	−8,7 λ	+ 0,00013 (1 + μ)	cos (0,−2,2)	
+	158,6 λ	+ 0,0016 (1 + μ)	cos (1,−2,2)	
+	−853,2 λ	− 0,0050 (1 + μ)	cos (2,−2,2)	
+	−47,9 λ	− 0,0005 (1 + μ)	cos (3,−2,2)	
+	9,1 λ		cos (1,−3,2)	sin Θ
+	−52,5 λ	− 0,0004 (1 + μ)	cos (2,−3,2)	
+	−3,3 λ		cos (3,−3,2)	
+	149,2 λ	− 0,0014 (1 + μ)	cos (1,0,3)	
+	−850,6 λ	+ 0,0402 (1 + μ)	cos (2,0,3)	
+	−47,5 λ	+ 0,0072 (1 + μ)	cos (3,0,3)	
+	45,7 λ	+ 0,0001 (1 + μ)	cos (−1,2,4)	
+	−868,3 λ	+ 0,00053 (1 + μ)	cos (0,2,4)	
+	75,7 λ	+ 0,0011 (1 + μ)	cos (1,2,4)	
+	−29,7 λ₁		sin g	
+	1,0 λ₁		sin (−1,−1,1)	
+	0,2 λ₁		sin (0,−1,1)	
+	−1,6 λ₁		sin (1,−1,1)	
+	0,7 λ₁		sin (1,−1,2)	
+	−9,9 λ₁		sin (2,−1,2)	
+	6,2 λ₁		sin (0,−2,2)	
+	−141,9 λ₁		sin (1,−2,2)	
+	856,1 λ₁		sin (2,−2,2)	
+	47,5 λ₁		sin (3,−2,2)	cos Θ
+	−8,0 λ₁		sin (1,−3,2)	
+	53,2 λ₁		sin (2,−3,2)	
+	3,3 λ₁		sin (3,−3,2)	
+	148,6 λ₁	+ 0,0009 (1 + μ)	sin (1,0,3)	
+	−844,3 λ₁	− 0,0345 (1 + μ)	sin (2,0,3)	
+	−47,2 λ₁	− 0,0067 (1 + μ)	sin (3,0,3)	
+	45,1 λ₁		sin (−1,2,4)	
+	−858,4 λ₁	− 0,00066 (1 + μ)	sin (0,2,4)	
+	74,8 λ₁	− 0,0014 (1 + μ)	sin (1,2,4)	

276.

Die beiden ersten Glieder des eben erhaltenen Ausdrucks für $d.IP$ bilden zuerst für sich die Gleichung

$$0 = -18556,6\, \Delta\alpha + 0,006566\,(1+\mu)$$

Digitized by Google

woraus

$$\Delta\alpha = + 0''07297\,(1+\mu)$$

folgt. Da ferner aus den oben eingeführten Ausdrücken für ΔP und ΔQ

$$\frac{d\Delta P}{ndt} = x\lambda\cos\Theta\,;\quad \frac{d\Delta Q}{ndt} = -x\lambda_1\sin\Theta$$

folgt, wo

$$x = \alpha + \eta - p$$

ist, so geben die vorstehenden Differentialgleichungen ferner

$$x\lambda = + 14''2\lambda_1 + 0''034648\,(1+\mu)$$
$$-x\lambda_1 = - 24,3\lambda_1 + 0,035192\,(1+\mu)$$

Es ist dem Vorhergehenden zufolge

$$nx = + 69629''$$

und folglich in Theilen des Kreisradius

$$x = + 0,0040531$$

verwandelt man auch die Coefficienten 14''2 und 24''3 in Theile des Kreisradius, so werden die vorstehenden Gleichungen

$$+ 0''0040531\,\lambda = + 0''0000689\lambda_1 + 0''034648\,(1+\mu)$$
$$- 0,0040531\,\lambda_1 = - 0,0001178\lambda + 0,035192\,(1+\mu)$$

deren Auflösung

$$\lambda = + 8''406\,(1+\mu)$$
$$\lambda_1 = - 8,424\,(1+\mu)$$

giebt.

277.

Die eben gefundenen Werthe von λ und λ_1 sind nun in die übrigen Glieder der Differentialgleichungen zu substituiren, und diese zu integriren. Hiebei ist zu beachten, dass der Coefficient x von nt in dem Ausdruck von Θ viel kleiner ist, wie die Coefficienten von nt in den Ausdrücken der übrigen Argumente. Nimmt man blos auf die erste Potenz von x Rücksicht, so findet man leicht

$$nfdt\cos(n_i\beta t + \theta)\cos\Theta = \frac{1}{\beta}\sin(n_i\beta t + \theta)\cos\Theta$$
$$- \frac{x}{\beta^2}\cos(n_i\beta t + \theta)\sin\Theta$$
$$nfdt\sin(n\beta t + \theta)\sin\Theta = - \frac{1}{\beta}\cos(n_i\beta t + \theta)\sin\Theta$$
$$+ \frac{x}{\beta^2}\sin(n_i\beta t + \theta)\cos\Theta$$

Digitized by Google

$$n\int dt \cos(n\beta t + \theta) \sin \Theta = \frac{1}{\beta} \sin(n\beta t + \theta) \sin \Theta + \frac{x}{\beta^2} \cos(n\beta t + \theta) \cos \Theta$$

$$n\int dt \sin(n\beta t + \theta) \cos \Theta = -\frac{1}{\beta} \cos(n\beta t + \theta) \cos \Theta - \frac{x}{\beta^2} \sin(n\beta t + \theta) \sin \Theta$$

Im gegenwärtigen Falle ist x so klein, dass man sich in diesen Ausdrücken mit den ersten Gliedern derselben begnügen, oder mit anderen Worten bei der Integration Θ constant setzen kann, gleichwie in der Analyse des § 17 angenommen wurde. Man bekommt nun

$$\begin{aligned}
\Delta P = \lambda \sin \Theta \\
&+ 0,0017 \cos g \\
&+ 0,0003 \cos(2,-1,2) \\
&+ 0,0019 \cos(0,-2,2) \\
&+ 0,0074 \cos(1,-2,2) \\
&- 0,0221 \cos(2,-2,2) \\
&- 0,0009 \cos(3,-2,2) \\
&+ 0,0004 \cos(1,-3,2) \\
&- 0,0015 \cos(2,-3,2) \\
&+ 0,0046 \cos(1,0,3) \\
&+ 0,0027 \cos(2,0,3) \\
&+ 0,0018 \cos(3,0,3) \\
&- 0,0025 \cos(-1,2,4) \\
&- 0,2167 \cos(0,2,4) \\
&+ 0,0035 \cos(1,2,4) \\
&\quad (1+\mu) \sin \Theta \\
&+ 0,0105 \sin g \\
&+ 0,0228 \sin(0,-1,1) \\
&+ 0,0002 \sin(1,-1,1) \\
&+ 0,0002 \sin(2,-1,2) \\
&+ 0,0016 \sin(0,-2,2) \\
&+ 0,0087 \sin(1,-2,2) \\
&- 0,0180 \sin(2,-2,2) \\
&- 0,0007 \sin(3,-2,2) \\
&+ 0,0005 \sin(1,-3,2) \\
&- 0,0012 \sin(2,-3,2) \\
&- 0,0051 \sin(1,0,3) \\
&+ 0,0000 \sin(2,0,3) \\
&\quad (1+\mu) \cos \Theta
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$
\left.\begin{array}{l}
-\ 0''{,}0016 \sin (3,0,3) \\
+\ 0{,}0022 \sin (-1,2,4) \\
+\ 0{,}2138 \sin (0,2,4) \\
-\ 0{,}0038 \sin (1,2,4)
\end{array}\right\}
$$

$$
\Delta Q = \lambda_1 \cos \Theta
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
-\ 0''{,}0012 \cos g \\
-\ 0{,}0002 \cos (2,-1,2) \\
-\ 0{,}0019 \cos (0,-2,2) \\
-\ 0{,}0067 \cos (1,-2,2) \\
+\ 0{,}0188 \cos (2,-2,2) \\
+\ 0{,}0007 \cos (3,-2,2) \\
-\ 0{,}0004 \cos (1,-3,2) \\
+\ 0{,}0012 \cos (2,-3,2) \\
+\ 0{,}0051 \cos (1,0,3) \\
+\ 0{,}0000 \cos (2,0,3) \\
+\ 0{,}0016 \cos (3,0,3) \\
-\ 0{,}0022 \cos (-1,2,4) \\
-\ 0{,}2163 \cos (0,2,4) \\
+\ 0{,}0039 \cos (1,2,4)
\end{array}\right\} (1+\mu) \cos \Theta
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
+\ 0{,}0108 \sin g \\
+\ 0{,}0230 \sin (0,-1,1) \\
+\ 0{,}0002 \sin (1,-1,1) \\
+\ 0{,}0003 \sin (2,-1,2) \\
+\ 0{,}0016 \sin (0,-2,2) \\
+\ 0{,}0093 \sin (1,-2,2) \\
-\ 0{,}0213 \sin (2,-2,2) \\
-\ 0{,}0009 \sin (3,-2,2) \\
+\ 0{,}0005 \sin (1,-3,2) \\
-\ 0{,}0015 \sin (2,-3,2) \\
+\ 0{,}0046 \sin (1,0,3) \\
+\ 0{,}0027 \sin (2,0,3) \\
+\ 0{,}0018 \sin (3,0,3) \\
-\ 0{,}0024 \sin (-1,2,4) \\
-\ 0{,}2193 \sin (0,2,4) \\
+\ 0{,}0036 \sin (1,2,4)
\end{array}\right\} (1+\mu) \sin \Theta
$$

Diese Ausdrücke bedürfen einer Verbesserung, die dadurch erhalten wird, dass man sie vollständig in die Differentialgleichungen substi-

Digitized by Google

tuirt, statt dass oben nur das erste Glied einer jeden derselben substituirt wurde. Auf die kleinen Glieder kann hieraus nur eine unmerkliche Wirkung erfolgen, und man kann sich daher begnügen, jetzt in den Producten

$$(42).\Delta P + (43).\Delta Q$$
$$\text{und } (50).\Delta P + (51).\Delta Q$$

nur die Verbindungen zu berücksichtigen, die die blos mit $\cos\Theta$ und $\sin\Theta$ multiplicirten Glieder geben. So erhält man

$$\text{in } \tfrac{d.\Delta P}{ndt} \ldots + 0''{,}000894\,(1+\mu)\cos\Theta$$
$$\text{in } \tfrac{d.\Delta Q}{ndt} \ldots + 0{,}000899\,(1+\mu)\sin\Theta$$

woraus durch die Integration

$$\text{zu } \lambda \ldots + 0''{,}221\,(1+\mu)$$
$$\text{zu } \lambda_1 \ldots - 0{,}222\,(1+\mu)$$

kommt. Wir haben also vollständig

$$\lambda = + 8''{,}627\,(1+\mu)$$
$$\lambda_1 = - 8{,}646\,(1+\mu)$$

erhalten.

278.

Die Gleichung (51) des Art. 135 wird hier

$$\Delta s = \tfrac{\cos J}{\cos^2\frac{1}{2}J}\Delta Q \sin(f+\omega) + \tfrac{\cos J}{\cos^2\frac{1}{2}J}\Delta P \cos(f+\omega)$$

wo Δs die von der Figur der Erde bewirkten Störungen des Sinus der Mondbreite bezeichnet. Substituirt man hierin fürerst die ersten Glieder von ΔP und ΔQ mit Anwendung der eben gefundenen Werthe von λ und λ_1, so erhält man

$$\Delta s = - 8''{,}618\,(1+\mu)\sin(f+\omega-\Theta)$$

wogegen die Beobachtungen

$$\Delta s = - 8''{,}382\sin(f+\omega-\Theta)$$

gegeben haben. Hieraus folgt die Gleichung

$$8{,}618\,(1+\mu) = 8{,}382$$

woraus

$$\mu = - 0{,}02738$$

folgt. Substituirt man diesen Werth in die im Vorhergehenden erhaltenen Ausdrücke, so wird erstens

Digitized by Google

$$\Delta u = +\ 0''.07097$$

sehr nahe mit dem im Art. 159 gefundenen Werthe übereinstimmend, und ferner bekommt man

$$\begin{aligned}
\Delta P = &+ 8''.391 \\
&+ 0,0017 \cos g \\
&+ 0,0003 \cos (2,-1,2) \\
&+ 0,0019 \cos (0,-2,2) \\
&+ 0,0072 \cos (1,-2,2) \\
&- 0,0215 \cos (2,-2,2) \\
&- 0,0009 \cos (3,-2,2) \\
&+ 0,0004 \cos (1,-3,2) \\
&- 0,0015 \cos (2,-3,2) \quad \Big\} \sin \Theta \\
&+ 0,0045 \cos (1,0,3) \\
&+ 0,0026 \cos (2,0,3) \\
&+ 0,0018 \cos (3,0,3) \\
&- 0,0024 \cos (-1,2,4) \\
&- 0,2108 \cos (0,2,4) \\
&+ 0,0034 \cos (1,2,4) \\
&+ 0,0102 \sin g \\
&+ 0,0222 \sin (0,-1,1) \\
&+ 0,0002 \sin (1,-1,1) \\
&+ 0,0002 \sin (2,-1,2) \\
&+ 0,0016 \sin (0,-2,2) \\
&+ 0,0085 \sin (1,-2,2) \\
&- 0,0175 \sin (2,-2,2) \\
&- 0,0007 \sin (3,-2,2) \quad \Big\} \cos \Theta \\
&+ 0,0005 \sin (1,-3,2) \\
&- 0,0012 \sin (2,-3,2) \\
&- 0,0049 \sin (1,0,3) \\
&- 0,0016 \sin (3,0,3) \\
&+ 0,0021 \sin (-1,2,4) \\
&+ 0,2081 \sin (0,2,4) \\
&- 0,0037 \sin (1,2,4) \\
\Delta Q = &- 8''.409 \\
&- 0,0012 \cos g \\
&- 0,0002 \cos (2,-1,2)
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l}
-\ 0''{,}0019 \cos(0,-2,2) \\
-\ 0{,}0065 \cos(1,-2,2) \\
+\ 0{,}0183 \cos(2,-2,2) \\
+\ 0{,}0007 \cos(3,-2,2) \\
-\ 0{,}0004 \cos(1,-3,2) \\
+\ 0{,}0012 \cos(2,-3,2) \\
+\ 0{,}0050 \cos(1,0,3) \\
+\ 0{,}0016 \cos(3,0,3) \\
-\ 0{,}0021 \cos(-1,2,4) \\
-\ 0{,}2104 \cos(0,2,4) \\
+\ 0{,}0038 \cos(1,2,4)
\end{array}\right\} \cos\Theta$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\ 0{,}0105 \sin g \\
+\ 0{,}0224 \sin(0,-1,1) \\
+\ 0{,}0002 \sin(1,-1,1) \\
+\ 0{,}0003 \sin(2,-1,2) \\
+\ 0{,}0016 \sin(0,-2,2) \\
+\ 0{,}0090 \sin(1,-2,2) \\
-\ 0{,}0208 \sin(2,-2,2) \\
-\ 0{,}0009 \sin(3,-2,2) \\
+\ 0{,}0005 \sin(1,-3,2) \\
-\ 0{,}0015 \sin(2,-3,2) \\
+\ 0{,}0045 \sin(1,0,3) \\
+\ 0{,}0027 \sin(2,0,3) \\
+\ 0{,}0018 \sin(3,0,3) \\
-\ 0{,}0024 \sin(-1,2,4) \\
-\ 0{,}2133 \sin(0,2,4) \\
+\ 0{,}0035 \sin(1,2,4)
\end{array}\right\} \sin\Theta$$

und hiemit durch die oben angeführte Gleichung (51)

$$\begin{aligned}
\Delta s = &-\ 8''{,}382 \sin(f+\omega-\Theta) \\
&-\ 0{,}011 \sin(\omega-\Theta) \\
&+\ 0{,}011 \sin(g-g'+\omega-\Theta) \\
&-\ 0{,}011 \sin(g+g'+\omega-\Theta) \\
&-\ 0{,}024 \sin(g-\omega+\Theta) \\
&+\ 0{,}022 \sin(\quad -2g'+\omega-2\omega'+\Theta) \\
&-\ 0{,}231 \sin(\ g-2g'+\omega-2\omega'+\Theta) \\
&-\ 0{,}014 \sin(2g-2g'+\omega-2\omega'+\Theta) \\
&+\ 0{,}082 \sin(g+\omega-2\Theta)
\end{aligned}$$

Digitized by Google

dessen letztes Glied ich aus dem Art. 159 entnommen habe, da es dort mit hinreichender Genauigkeit erhalten worden ist.

279.

Zur Berechnung der Längenstörungen werde ich nun die Methode des § 17 anwenden. Zuerst ist $\mathcal{A}'T$ zu entwickeln, und zu dem Ende setze ich

$$R = k + k' \cos \Theta + k' \cos (2f + 2\omega - \Theta)$$

wo

$$k = -\tfrac{3}{2}\frac{\mathcal{A}}{a^3}(1 - \tfrac{3}{2}\sin^2\epsilon)(1 - 6\sin^2\tfrac{1}{2}J\cos^2\tfrac{1}{2}J)$$

$$k' = \quad 9\frac{\mathcal{A}}{a^3}\sin\epsilon\cos\epsilon\sin\tfrac{1}{2}J(1 - \tfrac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J)$$

$$k'' = -9\frac{\mathcal{A}}{a^3}\sin\epsilon\cos\epsilon\sin\tfrac{1}{2}J\cos^2\tfrac{1}{2}J$$

ist. Hiemit wird

$$\mathcal{A}'a\Omega = -\frac{a^3}{3r^3}R$$

und

$$\left(\frac{d.\mathcal{A}'a\Omega}{dv}\right) = -\frac{a^3}{3r^3}\left(\frac{dR}{df}\right) : r\left(\frac{d.\mathcal{A}'a\Omega}{dr}\right) = \frac{a^3}{r^3}R$$

Substituirt man diese in den Ausdruck des Art. 24 für T_0, so bekommt man

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'T_0 = {} & \frac{2a^3\varrho\sin(f-q)}{r^4\sqrt{1-e^2}}(k + k'\cos\Theta) \\ & + \frac{2a^3}{3r^3\sqrt{1-e^2}}\left\{2\frac{\varrho}{r}\cos(f-q) - 1\right. \\ & \qquad \left. + \frac{2\varrho}{a(1-e^2)}[\cos(f-q)-1]\right\} k''\sin(2f+2\omega-\Theta) \\ & + \frac{2a^3\sin(f-q)}{r^4\sqrt{1-e^2}}k''\cos(2f+2\omega-\Theta)\end{aligned}$$

Der Ausdruck für G_0 des Art. 29 giebt, wenn man nur auf das mit k'' multiplicirte Glied Rücksicht nimmt,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'G_0 = {} & \frac{4a^3\varrho\cos(f-q)}{3r^4\sqrt{1-e^2}}k''\sin(2f+2\omega-\Theta) \\ & + \frac{2a^3\varrho\sin(f-q)}{r^4\sqrt{1-e^2}}k''\cos(2f+2\omega-\Theta)\end{aligned}$$

Ferner wird

$$\mathcal{A}'\Sigma_0 = -\frac{2a^3}{3r^3\sqrt{1-e^2}}k''\sin(2f+2\omega-\Theta)$$

Entwickelt man nun die Factoren dieser Ausdrücke nach bekannten Regeln, so ergiebt sich mit ausreichender Genauigkeit,

Digitized by Google

$$\begin{aligned}
\tfrac{2a^2\varrho\sin(f-q)}{r^4\sqrt{1-e^2}} &= -(2+4e^2)\sin(\gamma-g)\\
&\quad -3e\sin g\\
&\quad +6e\sin(-\gamma+2g)\\
&\quad -(2e+\tfrac{1\,0}{4}e^3)\sin\gamma\\
\tfrac{2a^2}{3r^3\sqrt{1-e^2}}\left\{2\tfrac{\varrho}{r}\cos(f-q)-1+\tfrac{2\varrho}{a(1-e^2)}[\cos(f-q)-1]\right\} &=\\
&\quad -(2+9e^2)\\
&\quad +(\tfrac{5}{2}+\tfrac{2\,0}{3}e^2)\cos(\gamma-g)\\
&\quad -10e\cos g\\
&\quad +\tfrac{2\,3}{3}e\cos(-\gamma+2g)\\
&\quad +\tfrac{1\,0}{3}e\cos\gamma\\
\tfrac{4a^2\varrho\cos(f-q)}{3r^4\sqrt{1-e^2}} &= \tfrac{1}{2}\cos(\gamma-g)\\
&\quad -2e\cos g\\
&\quad +4e\cos(-\gamma+2g)\\
&\quad +\tfrac{1}{2}e\cos\gamma
\end{aligned}$$

Wendet man ausserdem die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(2f+2\omega-\Theta) &= -2e\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(g+2\omega-\Theta)\\
&\quad +(1-4e^2)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(2g+2\omega-\Theta)\\
&\quad +2e\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(3g+2\omega-\Theta)
\end{aligned}$$

an, so bekommt man leicht,

$$\left.\begin{aligned}
\Delta T_0 = &-(2+4e^2)\sin(\gamma-g)\\
&-3e\sin g\\
&+6e\sin(-\gamma+2g)\\
&-(2e+\tfrac{1\,0}{4}e^3)\sin\gamma
\end{aligned}\right\}(k+k'\cos\Theta)$$

$$\begin{aligned}
&+\tfrac{1}{2}e\,k''\sin(\quad g+2\omega-\Theta)\\
&-2e\,k''\sin(-\gamma+2g+2\omega-\Theta)\\
&+0e\,k''\sin(\quad\gamma\quad+2\omega-\Theta)\\
&-(2-\tfrac{5}{2}e^2)\,k''\sin(\quad 2g+2\omega-\Theta)\\
&+(\tfrac{7}{2}-14e^2)\,k''\sin(-\gamma+3g+2\omega-\Theta)\\
&+(\tfrac{1}{2}+2e^2)\,k''\sin(\quad\gamma+\quad g+2\omega-\Theta)\\
&-\tfrac{3\,1}{8}e\,k''\sin(\quad 3g+2\omega-\Theta)\\
&+\tfrac{3\,4}{8}e\,k''\sin(-\gamma+4g+2\omega-\Theta)\\
&+\tfrac{1}{3}e\,k''\sin(\quad\gamma+2g+2\omega-\Theta)
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}'G_0 = &+\tfrac{1}{2}ek'' \sin(\quad g+2\omega-\Theta)\\
&-\tfrac{3}{2}ek'' \sin(-\gamma+2g+2\omega-\Theta)\\
&-\tfrac{1}{2}ek'' \sin(\quad \gamma\quad +2\omega-\Theta)\\
&+0\ k'' \sin(\quad 2g+2\omega-\Theta)\\
&+\tfrac{3}{2}\ k'' \sin(-\gamma+3g+2\omega-\Theta)\\
&-\tfrac{1}{2}\ k'' \sin(\quad \gamma+g\ +2\omega-\Theta)\\
&-\tfrac{3}{2}ek'' \sin(\quad 3g+2\omega-\Theta)\\
&+\tfrac{25}{8}ek'' \sin(-\gamma+4g+2\omega-\Theta)\\
&-\quad ek'' \sin(\quad \gamma+2g+2\omega-\Theta)\\
\mathcal{A}'\Sigma_0 = &+\tfrac{1}{2}ek'' \sin(\quad g+2\omega-\Theta)\\
&-(\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{4}e^2)k'' \sin(\quad 2g+2\omega-\Theta)\\
&-\tfrac{7}{8}ek'' \sin(\quad 3g+2\omega-\Theta)
\end{aligned}
$$

280.

Um die Coefficienten der eben entwickelten Functionen in Zahlen zu verwandeln, bedarf es vor Allem des numerischen Werthes von $\frac{\mathcal{A}}{a^2}$. Im Art. 274 wurde angenommen

$$\frac{\mathcal{A}}{a^2} = 0{,}0624(1+\mu)$$

substituirt man hierin den im Art. 278 gefundenen Werth von μ, so erhält man

$$\frac{\mathcal{A}}{a^2} = 0{,}060691$$

Hiemit und mit den bekannten numerischen Werthen der übrigen Grössen ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
\log k &= 8{,}83599n\\
\log k' &= 7{,}95003\\
\log k'' &= 7{,}95090n
\end{aligned}
$$

und hiemit

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}'T_0 = &+0{,}13792 \sin(\gamma-g)\\
&+0{,}007580 \sin\gamma\\
&\left.\begin{aligned}
&-0{,}017934 \sin(\gamma-g)\\
&-0{,}00147 \sin g\\
&+0{,}00294 \sin(-\gamma+2g)\\
&-0{,}000986 \sin\gamma
\end{aligned}\right\}\cos\Theta\\
&-0{,}00025 \sin(\quad g+2\omega-\Theta)\\
&+0{,}00098 \sin(-\gamma+2g+2\omega-\Theta)
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
&0 \sin(\ \gamma\ +2\omega-\Theta)\\
&+0,01772 \sin(\ 2g+2\omega-\Theta)\\
&-0,02046 \sin(-\gamma+3\gamma+2\omega-\Theta)\\
&-0,00303 \sin(\ \gamma+\ g+2\omega-\Theta)\\
&+0,00515 \sin(\ 3g+2\omega-\Theta)\\
&-0,00556 \sin(-\gamma+4g+2\omega-\Theta)\\
&-0,00065 \sin(\ \gamma+2g+2\omega-\Theta)\\
\Delta' G_0 = &-0,00025 \sin(\ g+2\omega-\Theta)\\
&+0,00082 \sin(-\gamma+2g+2\omega-\Theta)\\
&+0,00016 \sin(\ \gamma\ +2\omega-\Theta)\\
&0 \sin(\ 2g+2\omega-\Theta)\\
&-0,01489 \sin(-\gamma+3g+2\omega-\Theta)\\
&+0,00298 \sin(\ \gamma+\ g+2\omega-\Theta)\\
&+0,00123 \sin(\ 3g+2\omega-\Theta)\\
&-0,00418 \sin(-\gamma+4g+2\omega-\Theta)\\
&+0,00049 \sin(\ \gamma+2g+2\omega-\Theta)\\
\Delta' \Sigma_0 = &-0,00016 \sin(\ g+2\omega-\Theta)\\
&+0,00592 \sin(\ 2g+2\omega-\Theta)\\
&+0,00114 \sin(\ 3g+2\omega-\Theta)
\end{aligned}
$$

281.

Beim Uebergange von $\Delta' T_0$ zu $\Delta' T$ wollen wir die drei verschiedenen Gattungen von Gliedern, die $\Delta' T_0$ darbietet, von einander abgesondert betrachten. Nimmt man zuerst die beiden ersten Glieder vor, so findet man leicht, dass in Bezug auf diese

$$\Delta' T = \Delta' T_0 (1+\nu)^{-4}$$

gesetzt werden darf, indem die übrigen Veränderlichen hier nichts Merkliches geben können. Da nun

$$(1+\nu)^{-4} = 1 - 4w + 8w^2 - \tfrac{32}{3} w^3 + \ldots$$

ist, so erhält man leicht aus den Artt. 66 und 67

$$
\begin{aligned}
(1+\nu)^{-4} - 1 = &+5599,8\\
&-217,7 \cos g\\
&-14,8 \cos 2g\\
&-154,2 \cos(-1,-1,1)\\
&-87,5 \cos(0,-1,1)
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

$$+220''.7 \cos(1,-1,1)$$
$$-56,0 \cos(1,-1,2)$$
$$-71,8 \cos(2,-1,2)$$
$$+207,1 \cos(0,-2,2)$$
$$+8560,8 \cos(1,-2,2)$$
$$+6246,6 \cos(2,-2,2)$$
$$+279,8 \cos(3,-2,2)$$
$$+13,5 \cos(4,-2,2)$$
$$+360,3 \cos(1,-3,2)$$
$$+444,3 \cos(2,-3,2)$$
$$+25,6 \cos(3,-3,2)$$
$$-175,6 \cos(1,0,3)$$
$$+10,8 \cos(2,0,3)$$
$$-22,4 \cos(-1,2,4)$$
$$-29,6 \cos(0,2,4)$$
$$-11,1 \cos(1,2,4)$$

wo ich mehr Glieder angesetzt habe, wie hier überhaupt gebraucht werden. Für die in Rede stehenden Glieder von $\Delta' T_0$ brauchen wir vom vorstehenden Ausdruck nur die beiden ersten Glieder, substituirt man diese und behält nur das mit $\sin\gamma$ multiplicirte Glied bei, indem das andere nichts Merkliches geben kann, so erhält man

$$\Delta' T = +0''.007713 \sin\gamma$$

Um sogleich hieraus das Resultat zu ziehen, bemerke ich, dass von der Gleichung (67) des Art. 186 nur die folgenden Glieder aufzunehmen sind,

$$\frac{d\Delta W_0}{ndt} = (5)\Delta y + \Delta' T$$

und hieraus Δy so zu bestimmen ist, dass das in $d\Delta W_0$ mit $\sin\gamma$ multiplicirte Glied verschwindet. Es ist daher auch in dem Coefficienten (5) nur das mit $\sin\gamma$ multiplicirte Glied aufzunehmen, und da zufolge des Art. 201

$$(5) = -22374''.8 \sin\gamma$$

ist, so ergiebt sich die Gleichung

$$0 = -22374''.8\,\Delta y + 0''.007713$$

woraus

$$\Delta y = +0''.07113$$

folgt, sehr nahe mit dem Art. 159 übereinstimmend.

Digitized by Google

282.

Gehen wir nun zu den mit $\cos\Theta$ multiplicirten Gliedern über, oder mit andern Worten, setzen wir

$$\left.\begin{aligned} \Delta' T_0 = & -0'',017934 \sin(\gamma - g) \\ & -0,00147 \sin g \\ & +0,00294 \sin(-\gamma + 2g) \\ & -0,000986 \sin\gamma \end{aligned}\right\} \cos\Theta$$

Hier muss, um $\Delta' T$ zu erhalten, der folgende Ausdruck angewandt werden,

$$\Delta' T = \Delta' T_0 + \left(\frac{d.\Delta' T_0}{dg}\right) n\delta z + \Delta' T_0 \left[(1+\nu)^{-4} - 1\right]$$
$$+ \left(\frac{d.\Delta' T_0}{dP}\right) \delta P + \left(\frac{d.\Delta' T_0}{dQ}\right) \delta Q$$

Der hier erforderliche Differentialquotient nach g wird, wie früher, durch directe Differentiation erhalten, und für die beiden anderen partiellen Differentialquotienten dienen die Gleichungen *)

$$\left(\frac{dT}{dP}\right) = \left(\frac{dT}{dN}\right) \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} J} \; ; \; \left(\frac{dT}{dQ}\right) = \left(\frac{dT}{dJ}\right) \frac{1}{\cos \frac{1}{2} J}$$

Die Variation von K können wir hier übergehen. Da

$$\Theta = n(\alpha + \eta - p)t + N - K - \pi'$$

ist, so bekommt man

$$\left(\frac{d.\Delta' T_0}{dP}\right) = -\frac{\Delta' T_0}{2 \sin \frac{1}{2} J} \, tg\, \Theta \; ; \; \left(\frac{d.\Delta' T_0}{dQ}\right) = \frac{\Delta' T}{2 \sin \frac{1}{2} J}$$

und es ist nun leicht die folgenden Producte zu erhalten,

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d.\Delta' T_0}{dg}\right) n\delta z = & +0'',00003 \sin(-\gamma + g - g') \\ & +0,00003 \sin(\gamma - g - g') \\ & \left.\begin{aligned} -0,000016 \\ 0,00000 \\ +0,00007 \end{aligned}\right\} \sin(0,2,2) \\ & \left.\begin{aligned} -0,00001 \\ +0,00019 \\ +0,00022 \end{aligned}\right\} \sin(1,-2,2) \\ & \left.\begin{aligned} -0,00002 \\ +0,00015 \\ +0,00009 \end{aligned}\right\} \sin(2,-2,2) \end{aligned}\right\} \cos\Theta$$

*) S. *Fundamenta* etc. p. 211.

Digitized by Google

$$
\left.\begin{array}{r}
\left.\begin{array}{r}
-0''{,}00001\\
+0{,}00003\\
0{,}00000
\end{array}\right\}\sin(3,-2,2)\\
\left.\begin{array}{r}
0{,}00000\\
+0{,}00001\\
+0{,}00001
\end{array}\right\}\sin(1,-3,2)\\
\left.\begin{array}{r}
0{,}00000\\
+0{,}00001\\
+0{,}00001
\end{array}\right\}\sin(2,-3,2)\\
\left.\begin{array}{r}
0{,}00000\\
0{,}00000\\
-0{,}000004
\end{array}\right\}\sin(1,0,3)
\end{array}\right\}
$$

$$
\Delta' T_0\left[(1+\nu)^{-4}-1\right] = \left.\begin{array}{rl}
-0''{,}000484 & \sin(\gamma-g)\\
-0{,}00004 & \sin g\\
+0{,}00007 & \sin(-\gamma+2g)\\
-0{,}000018 & \sin\gamma\\
\left.\begin{array}{r}
+0{,}000030\\
+0{,}00003\\
-0{,}00007
\end{array}\right\} & \sin(0,-2,2)\\
\left.\begin{array}{r}
+0{,}00002\\
+0{,}00038\\
-0{,}00041
\end{array}\right\} & \sin(1,-2,2)\\
\left.\begin{array}{r}
-0{,}00003\\
+0{,}00033\\
-0{,}00029
\end{array}\right\} & \sin(2,-2,2)\\
\left.\begin{array}{r}
-0{,}00002\\
+0{,}00004\\
-0{,}00001
\end{array}\right\} & \sin(3,-2,2)\\
\left.\begin{array}{r}
0{,}00000\\
+0{,}00002\\
-0{,}00002
\end{array}\right\} & \sin(1,-3,2)\\
\left.\begin{array}{r}
0{,}00000\\
+0{,}00002\\
-0{,}00002
\end{array}\right\} & \sin(2,-3,2)\\
\left.\begin{array}{r}
0{,}00000\\
-0{,}00001\\
+0{,}000008
\end{array}\right\} & \sin(1,0,3)
\end{array}\right\}\cos\Theta
$$

Digitized by Google

$$\left(\frac{d.f'T_0}{dg}\right)\delta P = \left.\begin{array}{l} -0''{,}0000004 \\ +0{,}000001\ \cos(\gamma - g) \\ -0{,}00001\ \cos(-\gamma + 2g) \\ +0{,}000005\ \cos\gamma \\ \left.\begin{array}{l} 0{,}00000 \\ -0{,}00001 \\ +0{,}00001 \end{array}\right\} \cos(1,-2,2) \\ \left.\begin{array}{l} 0{,}00000 \\ +0{,}00002 \\ -0{,}00002 \end{array}\right\} \cos(2,-2,2) \\ \left.\begin{array}{l} 0{,}00000 \\ +0{,}00001 \\ -0{,}000006 \end{array}\right\} \cos(1,0,3) \\ \left.\begin{array}{l} 0{,}00000 \\ -0{,}00002 \\ +0{,}00002 \end{array}\right\} \cos(2,0,3) \\ \left.\begin{array}{l} -0{,}00002 \\ -0.00001 \\ +0{,}00004 \end{array}\right\} \cos(-1,2,4) \\ \left.\begin{array}{l} 0{,}00000 \\ -0{,}00023 \\ +0{,}00023 \end{array}\right\} \cos(0,2,4) \\ \left.\begin{array}{l} +0{,}00002 \\ -0.00004 \\ +0{,}00001 \end{array}\right\} \cos(1,2,4) \end{array}\right\} \sin\Theta$$

$$\left(\frac{d.f'T_0}{dQ}\right)\delta Q = \left.\begin{array}{l} -0''{,}000033\ \sin(\gamma - g) \\ -0{,}000003\ \sin\gamma \\ \left.\begin{array}{l} 0{,}00000 \\ +0{,}00001 \\ -0{,}00001 \end{array}\right\} \sin(1,-2,2) \\ \left.\begin{array}{l} 0{,}00000 \\ -0{,}00002 \\ +0{,}00002 \end{array}\right\} \sin(2,-2,2) \\ \left.\begin{array}{l} 0{,}00000 \\ -0{,}00001 \\ +0{,}000006 \end{array}\right\} \sin(1,0,3) \end{array}\right\} \cos\Theta$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{rl} 0{,}00000 & \\ +0{,}00002 & \sin\,(2,0,3) \\ -0{,}00002 & \end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{rl} +0{,}00002 & \\ +0{,}00001 & \sin\,(-1,2,4) \\ -0{,}00004 & \end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{rl} 0{,}00000 & \\ +0{,}00023 & \sin\,(0,2,4) \\ -0{,}00023 & \end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{rl} -0{,}00002 & \\ +0{,}00004 & \sin\,(1,2,4) \\ -0{,}00001 & \end{array}\right\}$$

Die Argumente habe ich hier nach der oben beschriebenen Abkürzung hingeschrieben, aber es ist hinzuzufügen, dass ich die Factoren von γ weggelassen habe, da sie sich, wie aus dem Vorhergehenden erhellt, von selbst verstehen. Von jedem der drei Glieder, die sich später zu Einem Argument vereinigen, hat das erste ohne Aenderung das allen drei beigesetzte Argument, das zweite bekommt $-\gamma$ und dem Index von g wird $+1$ hinzugefügt, das dritte bekommt $+\gamma$ und von dem Index von g wird $+1$ abgezogen.

283.

Wir kommen jetzt zur dritten Gattung von Gliedern in $\mathit{\Delta}'T_0$, für welche der folgende Ausdruck angewandt werden darf,

$$\begin{aligned} \mathit{\Delta}'T = \mathit{\Delta}'T_0 &+ \left(\tfrac{d.\mathit{\Delta}'T_0}{dg}\right) n\delta z + \left(\tfrac{d.\mathit{\Delta}'T_0}{dP}\right)\delta P + \left(\tfrac{d.\mathit{\Delta}'T_0}{dQ}\right)\delta Q \\ &+ \mathit{\Delta}'G_0\{(1+\nu)^{-4}-1\} + \{\mathit{\Delta}'T_0 - \mathit{\Delta}'G_0\}\{(1+\nu)^{-3}-1\} \\ &+ 2\{\mathit{\Delta}'T_0 - \mathit{\Delta}'G_0 - \mathit{\Delta}'\Sigma_0\}\,\delta\tfrac{h}{h_0} \end{aligned}$$

welcher aus den Ausdrücken (17) des Art. 43 entsprungen ist. Da

$$2\omega - \Theta = n(2y + \alpha - 3\eta + p)t + N + 3K + \pi'$$

ist, so wird hier

$$\left(\tfrac{d.\mathit{\Delta}'T_0}{dP}\right) = \tfrac{\mathit{\Delta}'T_0}{2\sin\frac{1}{2}J}\,\text{cotg. argg.}\,;\quad \left(\tfrac{d.\mathit{\Delta}'T_0}{dQ}\right) = \tfrac{\mathit{\Delta}'T_0}{2\sin\frac{1}{2}J}$$

wo das Zeichen cotg. argg. bedeutet, dass vor allen Argumenten der Sinus in den Cosinus verwandelt werden muss.

Digitized by Google

Ich werde nun die Producte, so wie es in den vorhergehenden §§ geschehen ist, tabellarisch zusammenstellen, und der Kürze wegen die Glieder des vorstehenden Ausdrucks in der Reihenfolge, in der sie oben angesetzt worden sind, mit den fortlaufenden Zahlen bezeichnen, nemlich

$$(1) = A'T_0, \quad (2) = \left(\frac{d.A'T_0}{dg}\right) n\delta z, \text{ etc.}$$

Die Argumente werde ich wie gewöhnlich ansetzen, wobei zu bemerken ist, dass jedes derselben den Zusatz $-\Theta$ bekommen muss, endlich werde ich, um das Hinschreiben der vielen Nullen zu vermeiden, in den Coefficienten 0,″00001 zur Einheit annehmen. Es ergab sich

γ, g, g'	(1) sin	(2) sin	(3) sin	(4) sin	(5) sin	(6) sin	(7) sin
1.							
0,0,0		−0,04	+1,80	+1,80	+0,01		
−1,1,0		—	−2,0	−2,0			
1,−1,0		—	−0,3	−0,3			
0,1,0					—	−1	
−1,2,0					+1	—	
1,0,0					−0,1	+0,2	
2.							
0,1,−2			—	—			
			+1	+1			
			—	—			
0,2,−2			+23	+23			
			−27	−27			
			−4	−4			
0,3,−2			+7	+7			
			−7	−7			
			−1	−1			
3.							
0,1,0	−25		—	—	−1	−1	—
	+98		−1	−1	+3	—	—
	0		—	—	+0,3	−0,1	−0,3
0,2,0	+1772			+3	—	+36	+8
	−2046			−4	−11	−11	−5
	−303			−1	+8	−12	−6
0,3,0	+345				+3		+3
	−356				−11		−1
	−65				+1		−1

Digitized by Google

4.							
0, −1, 2		−1 +1 —				+1 −1 —	
0, 0, 2		−18,3 +30 +2	−1,9 +2 —	−1,9 +2 —	−0,4 −21 +5	+20,3 −6 −7	−1,1 +3 +3
0, 1, 2		−46 +79 +4	+1 −1 —	+1 −1 —	— −31 +6	+31 −11 −10	

Um ΔT zu erhalten, müssen nun die im Vorhergehenden erhaltenen einzelnen Theile addirt werden. Ich bemerke hiezu, dass unter diesen zwar eine Anzahl von Gliedern vorkommen, die nicht unmerklich sind, aber auch eine andere Anzahl, die so klein sind, dass sie ohne Nachtheil übergangen werden könnten; es sollen jedoch alle angesetzten Glieder mitgenommen werden. Ich fahre fort, 0,00001 zur Einheit anzunehmen. Somit wird

$$\begin{aligned}
\Delta T = {} & -3{,}61 \\
& +4{,}7 \cos(\gamma - g) \\
& +1 \quad \cos g \\
& -2 \quad \cos(-\gamma + 2g) \\
& +0{,}4 \cos\gamma \\
& \left.\begin{matrix} 0 \\ -3 \\ +1 \end{matrix}\right\} \cos(1,-2,2) \\
& \left.\begin{matrix} -46 \\ +56 \\ +6 \end{matrix}\right\} \cos(2,-2,2) \\
& \left.\begin{matrix} -14 \\ +14 \\ +2 \end{matrix}\right\} \cos(3,-2,2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -1841{,}7 \sin(\ \gamma - g) \\
& -152 \quad \sin g \\
& +302 \quad \sin(-\gamma + 2g) \\
& -100{,}6 \sin\gamma \\
& \left.\begin{matrix} 0 \\ +3 \\ +3 \end{matrix}\right\} \sin(0,-1,1) \\
& \left.\begin{matrix} +1{,}4 \\ +3 \\ 0 \end{matrix}\right\} \sin(0,-2,2) \\
& \left.\begin{matrix} +1 \\ +60 \\ -20 \end{matrix}\right\} \sin(1,-2,2) \\
& \left.\begin{matrix} +41 \\ -8 \\ -26 \end{matrix}\right\} \sin(2,-2,2) \\
& \left.\begin{matrix} +11 \\ -10 \\ -3 \end{matrix}\right\} \sin(3,-2,2)
\end{aligned}$$

Digitized by Google

			0		
			+3	sin (1,—3,2)	
			—1		
			0		
		sin Θ	+3	sin (2,—3,2)	cos Θ
			—1		
+27			—27		
—98	cos (1,0,3)		+97	sin (1,0,3)	
—0,5			+0,9		
—1819			+1819		
+2105	cos (2,0,3)		—2105	sin (2,0,3)	
+316			—316		
—521			+521		
+568	cos (3,0,3)		—568	sin (3,0,3)	
+65			—65		
—2			+2		
—1	cos (—1,2,4)		+1	sin (—1,2,4)	
+4			—4		
+6,3			—6,3		
—33	cos (0,2,4)		+33	sin (0,2,4)	
+20			—20		
+15			—15		
—39	cos (1,2,4)		+39	sin (1,2,4)	
+1			—1		

284.

Es wird später auch $\Delta'\Sigma$ gebraucht werden, und in Bezug darauf ist

$$\Delta'\Sigma = \Delta'\Sigma_0 + \left(\frac{d.\Delta'\Sigma_0}{dg}\right) n\delta z + \Delta'\Sigma\left[(1+\nu)^{-3} - 1\right] + \left(\frac{d.\Delta'\Sigma_0}{dP}\right)\delta P + \left(\frac{d.\Delta'\Sigma_0}{dQ}\right)\delta Q$$

wo die Differentialquotienten nach P und Q eben so wie im vor. Art. erhalten werden. Man findet

$$\left(\frac{d.\Delta'\Sigma_0}{dg}\right) n\delta z = \begin{array}{l} -6 \sin(\quad 2g' + 2\omega' - \Theta) \\ -15 \sin(g + 2g' + 2\omega' - \Theta) \end{array}$$

Digitized by Google

$$\begin{aligned}
\mathit{f}'\Sigma_0\,[(1+r)^{-3}-1] &= +12\sin(2g+2\omega-\Theta)\\
&\quad +2\sin(3g+2\omega-\Theta)\\
&\quad +7\sin(\ \ 2g'+2\omega'-\Theta)\\
&\quad +10\sin(g+2g'+2\omega'-\Theta)\\
\left(\tfrac{d.\mathit{f}'\Sigma_0}{dP}\right)\delta P &= +0{,}6\sin(-\Theta)\\
&\quad +8\ \sin(2g-2g'+2\omega-2\omega'-\Theta)\\
&\quad +2\ \sin(3g-2g'+2\omega-2\omega'-\Theta)\\
&\quad -1\ \sin(2g'+2\omega'-\Theta)\\
&\left(\tfrac{d.\mathit{f}'\Sigma_0}{dQ}\right)\delta Q=\left(\tfrac{d.\mathit{f}'\Sigma_0}{dP}\right)\delta P
\end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$\mathit{f}'\Sigma = \left.\begin{array}{r}-1{,}2\\ -16\cos(2,-2,2)\\ -4\cos(3,-2,2)\\ +16\cos(1,0,3)\\ -604\cos(2,0,3)\\ -116\cos(3,0,3)\\ +1\cos(0,2,4)\\ +5\cos(1,2,4)\end{array}\right\}\sin\Theta \qquad \left.\begin{array}{r}+16\sin(2,-2,2)\\ +4\sin(3,-2,2)\\ -16\sin(1,0,3)\\ +604\sin(2,0,3)\\ +116\sin(3,0,3)\\ -1\sin(0,2,4)\\ -5\sin(1,2,4)\end{array}\right\}\cos\Theta$$

285.

Wir werden endlich auch im Folgenden das im Ausdruck von $-3.\mathit{f}'a\Omega$ mit $\cos\Theta$ multiplicirte Glied gebrauchen, und wollen daher dieses auch sogleich entwickeln und berechnen. Durch die Ausdrücke des Art. 279 ergiebt sich zuerst

$$-3.\mathit{f}'a\Omega = \tfrac{a^3}{r^3}R$$

und hiemit wird

$$\begin{aligned}
-3.\mathit{f}'a\Omega_0 &= \tfrac{k'}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\Theta + 3e\,k'\cos g\cos\Theta\\
&\quad -\tfrac{1}{2}e\,k''\cos(\ g+2\omega-\Theta)\\
&\quad +(1-\tfrac{3}{2}e^2)\,k''\cos(2g+2\omega-\Theta)\\
&\quad +\tfrac{7}{2}e\,k''\cos(3g+2\omega-\Theta)
\end{aligned}$$

und in Zahlen

$$\begin{aligned}
-3.\mathit{f}'a\Omega_0 &= \left.\begin{array}{r}+895{,}4\\ +147\cos g\end{array}\right\}\cos\Theta\\
&\quad +25\cos(\ g+2\omega-\Theta)\\
&\quad -886\cos(2g+2\omega-\Theta)\\
&\quad -172\cos(3g+2\omega-\Theta)
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Da nun hier für den Uebergang zu $-3\mathit{\Delta}'a\Omega$ der Ausdruck des vor. Art. mit der Ausnahme, dass

$$\left(\frac{d.f'\Omega_2}{dP}\right) = -\frac{f'a\Omega_2}{2\sin\frac{1}{2}J}\ \text{tg. argg.}$$

ist, angewandt werden muss, so wird

$$\begin{aligned}
-3\left(\tfrac{d.f'a\Omega_2}{dg}\right)nd z &= 0\cos\Theta\\
-3\mathit{\Delta}'a\Omega_0\left[(1+\nu)^{-3}-1\right] &= +18{,}1\cos\Theta\\
-3\left(\tfrac{d.f'a\Omega_2}{dP}\right)\delta P &= -0{,}9\cos\Theta\\
-3\left(\tfrac{d.f'a\Omega_2}{dQ}\right)\delta Q &= +0{,}8\cos\Theta
\end{aligned}$$

also

$$-3\mathit{\Delta}'a\Omega = +913{,}4\cos\Theta$$

286.

Nach diesen Vorbereitungen sind zufolge des § 17 zuerst die Producte (6) $\mathit{\Delta}P$, (7) $\mathit{\Delta}Q$, (19) $\mathit{\Delta}P$, (20) $\mathit{\Delta}Q$ zu berechnen, und die bez. Summen zu bilden. Hiebei sind die im Art. 278 erhaltenen Werthe von $\mathit{\Delta}P$ und $\mathit{\Delta}Q$, nebst den in den Artt. 201 und 205 gegebenen numerischen Werthen der Coefficienten (5), (6), (19), (20) zu Grunde zu legen. Es ergab sich

(6) $\mathit{\Delta}P = +39{,}98$				
$-40{,}4$	$\cos(\gamma-g)$		$+16{,}6$	$\sin(\gamma-g)$
$+59$	$\cos g$		$+2$	$\sin g$
-28	$\cos(-\gamma+2g)$		-1	$\sin(-\gamma+2g)$
$-31{,}1$	$\cos\gamma$		$-2{,}7$	$\sin\gamma$
$+2$	$\cos(-1,-1,1)$			
$+1$				
-1				
$+3{,}9$	$\cos(0,-1,1)$			
-4				
0				
$+4$	$\cos(1,-1,1)$			
-2				
-2				
$+24$	$\cos(2,-1,2)$		$+2$	$\sin(2,-1,2)$
-9			-1	
-22			-2	

Digitized by Google

+3	cos (3,−1,2)				
−1					
−1					
−0,6	cos (0,−2,2)				
+4					
+3					
+154	cos (1,−2,2)		+2	sin (1,−2,2)	
−103			−1		
−172			−2		
−1869	cos (2,−2,2)	sin Θ	−23	sin (2,−2,2)	cos Θ
+619			+8		
+1882			+23		
−156	cos (3,−2,2)		−2	sin (3,−2,2)	
+69			+1		
+69			+1		
+8	cos (1,−3,2)				
−6					
−10					
−117	cos (2,−3,2)		−2	sin (2,−3,2)	
+40			+1		
+115			+2		
−11	cos (3,−3,2)				
+5					
+5					
−157	cos (1,0,3)		+1	sin (1,0,3)	
+109			−1		
+182,9			−1,0		
+1897	cos (2,0,3)		−23	sin (2,0,3)	
−601			+7		
−1903			+24		
+158	cos (3,0,3)				
−70					
−70					
+50	cos (−1,2,4)				
−51					
−18					

Digitized by Google

−42,2 +636 −597 } cos (0,2,4) −112 +45 +85 } cos (1,2,4)	+3,0 −1 −2 } sin (0,2,4)

(7) $\Delta Q = +3,16$

−5,3 cos $(\gamma - g)$ −1 cos g +1 cos $(-\gamma + 2g)$ −0,7 cos γ	−1216,4 sin $(\gamma - g)$ −162 sin g +61 sin $(-\gamma + 2g)$ +109,7 sin γ
	+5 −5 −2 } sin (−1,−1,1)
+0,2 0 0 } cos (0,−1,1)	+0,4 +32 −29 } sin (0,−1,1)
	−6 +3 +5 } sin (1,−1,1)
	−22 +8 +19 } sin (2,−1,2)
−2 +1 +2 } cos (2,−1,2)	−2 +2 +1 } sin (3,−1,2)
	−2,4 −5 0 } sin (0,−2,2)
+1 −1 −2 } cos (1,−2,2)	−153 +110 +189 } sin (1,−2,2)
−24 +6 +26 } cos (2,−2,2)	+1828 −606 −1828 } sin (2,−2,2)

Digitized by Google

−1	cos (3,−2,2)	sin Θ	+152	sin (3,−2,2)	cos Θ
+1			−67		
+1			−68		
			−8	sin (1,−3,2)	
			+6		
			+11		
+2	cos (2,−3,2)		+115	sin (2,−3,2)	
−1			−39		
−2			−111		
			+10	sin (3,−3,2)	
			−5		
			−5		
+3	cos (1,0,3)		+153	sin (1,0,3)	
−1			−107		
−3,8			−179,6		
−24	cos (2,0,3)		−1855	sin (2,0,3)	
+9			+615		
+23			+1860		
			−154	sin (3,0,3)	
			+68		
			+69		
			−49	sin (−1,2,4)	
			+49		
			+17		
−2,7	cos (0,2,4)		+40,6	sin (0,2,4)	
−15			−623		
+18			+580		
			+109	sin (1,2,4)	
			−52		
			−80		

und hieraus

(6) $\Delta P + (7)\,\Delta Q + \Delta' T =$

+39,53		−3041,5	sin (γ−g)
−41,0	cos (γ−g)	−312	sin g
+59	cos g	+362	sin (−γ+2g)
−29	cos (−γ+2g)	+6,4	sin γ
−31,4	cos γ		

Digitized by Google

+155	cos (1, −2, 2)	sin Θ	−150	sin (1, −2, 2)	cos Θ
−107			+169		
−173			+167		
−1939	cos (2, −2, 2)		+1846	sin (2, −2, 2)	
+681			−606		
+1914			−1831		
−171	cos (3, −2, 2)		+161	sin (3, −2, 2)	
+84			−76		
+72			−70		
+2	cos (−1, −1, 1)		+5	sin (−1, −1, 1)	
+1			−5		
−1			−2		
+4,1	cos (0, −1, 1)		+0,4	sin (0, −1, 1)	
−4			+35		
0			−26		
+4	cos (1, −1, 1)		−6	sin (1, −1, 1)	
−2			+3		
−2			+5		
+22	cos (2, −1, 2)		−20	sin (2, −1, 2)	
−8			+7		
−20			+17		
+3	cos (3, −1, 2)		−2	sin (3, −1, 2)	
−1			+2		
−1			+1		
−0,6	cos (0, −2, 2)		−1,0	sin (0, −2, 2)	
+4			−2		
+3			0		
+8	cos (1, −3, 2)	sin Θ	−8	sin (1, −3, 2)	cos Θ
−6			+9		
−10			+10		
−115	cos (2, −3, 2)		+113	sin (2, −3, 2)	
+39			−35		
+113			−110		
−11	cos (3, −3, 2)		+10	sin (3, −3, 2)	
+5			−5		
+5			−5		

Digitized by Google

−127 +10 +178,6	cos (1,0,3)	+127 −11 −179,7	sin (1,0,3)
+54 +1513 −1564	cos (2,0,3)	−59 −1483 +1568	sin (2,0,3)
−363 +498 −5	cos (3,0,3)	+367 −500 +4	sin (3,0,3)
+48 −52 −14	cos (−1,2,4)	−47 +50 +13	sin (−1,2,4)
−38,6 +388 −359	cos (0,2,4)	+37,3 −394 +358	sin (0,2,4)
−97 +6 +84	cos (1,2,4)	+94 −13 −81	sin (1,2,4)

287.

Man bekommt ferner

$$
\begin{aligned}
(19)\quad \Delta P = {} & -10{,}3 \\
& -19\cos g \\
& -1\cos(0,-1,1) \\
& -9\cos(2,-1,2) \\
& +5\cos(0,-2,2) \\
& -102\cos(1,-2,2) \\
& +619\cos(2,-2,2) \\
& +34\cos(3,-2,2) \\
& -6\cos(1,-3,2) \\
& +39\cos(2,-3,2) \\
& +2\cos(3,-3,2) \\
& +104\cos(1,0,3) \\
& -630\cos(2,0,3) \\
& -34\cos(3,0,3) \\
& +11\cos(0,2,4)
\end{aligned}
\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right.
\sin\Theta
\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ -1\sin(1,-2,2) \\ +8\sin(2,-2,2) \\ \\ \\ +1\sin(1,0,3) \\ -8\sin(2,0,3) \\ \\ \end{array}\right.
\cos\Theta
$$

Digitized by Google

$$(20)\ \Delta Q = -1{,}0 \left.\begin{array}{r} \\ \\ \\ -1\cos(1,-2,2) \\ +8\cos(2,-2,2) \\ \\ \\ \\ -1\cos(1,0,3) \\ +8\cos(2,0,3) \end{array}\right\} \sin\Theta \left.\begin{array}{r} +21\sin g \\ +7\sin(2,-1,2) \\ -4\sin(0,-2,2) \\ +101\sin(1,-2,2) \\ -607\sin(2,-2,2) \\ -34\sin(3,-2,2) \\ +6\sin(1,-3,2) \\ -39\sin(2,-3,2) \\ -2\sin(3,-3,2) \\ -102\sin(1,0,3) \\ +618\sin(2,0,3) \\ +34\sin(3,0,3) \\ -11\sin(0,2,4) \end{array}\right\} \cos\Theta$$

und hiemit

$$(19)\ \Delta P + (20)\ \Delta Q - \Delta'\Sigma =$$

$$\left.\begin{array}{r} -10{,}1 \\ -19\cos g \\ -103\cos(1,-2,2) \\ +643\cos(2,-2,2) \\ +38\cos(3,-2,2) \end{array}\right\} \sin\Theta \left.\begin{array}{r} \\ +21\sin g \\ +100\sin(1,-2,2) \\ -615\sin(2,-2,2) \\ -38\sin(3,-2,2) \end{array}\right\} \cos\Theta$$

$$\left.\begin{array}{r} -1\cos(0,-1,1) \\ -9\cos(2,-1,2) \\ +5\cos(0,-2,2) \\ -6\cos(1,-3,2) \\ +39\cos(2,-3,2) \\ +2\cos(3,-3,2) \\ +87\cos(1,0,3) \\ -18\cos(2,0,3) \\ +82\cos(3,0,3) \\ +10\cos(0,2,4) \\ -5\cos(1,2,4) \end{array}\right\} \sin\Theta \left.\begin{array}{r} \\ +7\sin(2,-1,2) \\ -4\sin(0,-2,2) \\ +6\sin(1,-3,2) \\ -39\sin(2,-3,2) \\ -2\sin(3,-3,2) \\ -86\sin(1,0,3) \\ +6\sin(2,0,3) \\ -82\sin(3,0,3) \\ -10\sin(0,2,4) \\ +5\sin(1,2,4) \end{array}\right\} \cos\Theta$$

Digitized by Google

288.

Endlich sind noch von den Producten (32) ΔP und (33) ΔQ das mit cos Θ, und von den Producten (36) ΔP und (37) ΔQ das mit sin Θ multiplicirte Glied zu berechnen. Es wird

$$(32)\,\Delta P = +\ 12{,}6\cos\Theta$$
$$(33)\,\Delta Q = -901{,}6\cos\Theta$$

folglich mit dem im Art. 285 ermittelten Gliede von $-3.f'a\Delta\Omega$

$$(32)\,\Delta P + (33)\,\Delta Q - 3.f'a\Delta\Omega = +24{,}4\cos\Theta$$

ferner

$$(36)\,\Delta P = +1{,}50\sin\Theta$$
$$(37)\,\Delta Q = +26{,}75\sin\Theta$$

al o da hier $\left(\frac{d.f'a\Omega}{dg'}\right) = 0$ ist,

$$(36)\,\Delta P + (37)\,\Delta Q + 3\left(\frac{d.f'a\Omega}{dg'}\right) = +28{,}25\sin\Theta$$

289.

Die im Vorhergehenden entwickelten Functionen zeigen, dass ausser den im § 17 in Betracht gezogenen Gliedern im gegenwärtigen Falle noch andere nicht unmerklich sind; es tritt also der Umstand ein, welcher im Art. 220 angemerkt, und weiter hin in den Entwickelungen durchgeführt wurde. Es müssen nun zuerst die letzt genannten Glieder auf gewöhnliche Art behandelt werden, und ist demnach zuerst ΔW_0 durch den Ausdruck

$$\frac{d.\Delta W_0}{ndt} = (1)\,n.\Delta z + (6)\,\Delta P + (7)\,\Delta Q + \Delta' T$$

zu berechnen, wobei wieder der genäherte Werth von $n.\Delta z$, welcher schon im Art. 275 angewandt wurde, nemlich

$$n.\Delta z = -7''533\sin\Theta$$

zu benutzen ist. Es ergab sich

Digitized by Google

	sin Θ			cos Θ		
γ, g, g'	ΔW_0	$\left(\frac{d.\Delta W_0}{d\gamma}\right)$	$\left(\frac{d^2.\Delta W_0}{d\gamma^2}\right)$	ΔW_0	$\left(\frac{d.\Delta W_0}{d\gamma}\right)$	$\left(\frac{d^2.\Delta W_0}{d\gamma^2}\right)$
	sin	cos	sin	cos	sin	cos
1.						
0, −1, −1	−50			+5		
−1, 0, −1	+119	−119	−119	−66	−66	+66
−2, 1, −1	−5	+10	+20	−1	−2	+4
1, −2, −1	+16	+16	−16	−1	+1	+1
	+80	−93	−115	−63	−67	+71
0, 0, −1	−97			+5		
−1, 1, −1	−167	+167	+167	−38	−38	+38
−2, 2, −1	−1	+2	+4			
1, −1, −1	+127	+127	−127	−24	+24	+24
	−138	+296	+44	−57	−14	+62
0, 1, −1	+92			+6		
−1, 2, −1	−31	+31	+31	−2	−2	+2
1, 0, −1	+265	+265	−265	+66	−66	−66
2, −1, −1	+3	+6	−12	−1	+2	+4
	+329	+302	−216	+69	−66	−60
2.						
0, 1, −1	+15					
−1, 2, −1	+2	−2	−2			
−2, 3, −1	−2	+4	+8			
1, 0, −1	+103	+103	−103			
	+118	+105	−97			
0, 2, −1	+238			+10		
−1, 3, −1	−88	+88	+88	−2	−2	+2
1, 1, −1	−221	−221	+221	−18	+18	+18
2, 0, −1	−3	+6	−12			
	−68	−127	+297	−10	+16	+20
0, 3, −1	+24					
−1, 4, −1	−12	+12	+12			
1, 2, −1	−9	−9	+9			
2, 1, −1	−6	−12	+24			
	−1	−9	+45			
0, 0, −2	+22			−7		
−1, 1, −2	+73	−73	−73	+2	+2	−2
−2, 2, −2	−32	+64	+128	−2	−4	−8
−3, 3, −2	+8	−24	−72			
1, −1, −2	−2	−2	+2	0	0	0
	+69	−35	−15	−7	−2	−10
0, 1, −3	+102			+10		
−1, 2, −3	−69	+69	+69	−5	−5	+5
−2, 3, −3	+12	−24	−48			
1, 0, −3	+86	+86	−86	+48	−48	−48
	+131	+131	−65	+53	−53	−43

Digitized by Google

2.						
0,2,−3	−1378			−63		
−1,3,−3	+443	−443	−443	+13	+13	−13
−2,4,−3	+1	−2	−4			
1,1,−3	+1588	+1588	−1588	+139	−139	−139
2,0,−3	+2	+4	−8	+1	−2	−4
	+656	+1147	−2043	+90	−128	−156
0,3,−3	−115			−4		
−1,4,−3	+52	−52	−52	+1	+1	−1
1,2,−3	+52	+52	−52	+3	−3	−3
2,1,−3	+14	+88	−176	+4	−8	−16
	+33	+88	−280	+4	−10	−20
3.						
0,1,0	−120			−112		
−1,2,0	+1	−1	−1	+5	+5	−5
−2,3,0	+14	−28	−56	+13	+26	−52
1,0,0	+7098	+7098	−7098	+7143	−7143	−7143
	+6993	+7069	−7155	+7019	−7112	−7200
0,2,0	−49			+29		
−1,3,0	+525	−525	−525	+490	+490	−490
−2,4,0	+3	−6	−12	+3	+6	−12
1,1,0	−1450	−1450	+1450	−1529	+1529	+1529
2,0,0	+195	+390	−780	+196	−392	−784
	−776	−1591	+133	−811	+1633	+243
0,3,0	−126			−121		
−1,4,0	+127	−127	−127	+124	+124	−124
1,2,0	0	0	0	−2	+2	+2
2,1,0	−40	−80	+160	−42	+84	+168
3,0,0	+8	+24	−72	+8	−24	−72
	−31	−183	−39	−33	+186	−26
4.						
0,−1,2	−60			−56		
−1,0,2	−327	+327	+327	−315	−315	+315
−2,1,2	+13	−26	−52	+14	+28	−56
1,−2,2	+8	+8	−8	+7	−7	−7
	−366	+309	+267	−350	−294	+252
0,0,2	−243			−235		
−1,1,2	+485	−485	−485	+510	+510	−510
1,−1,2	+695	+695	−695	+664	−664	−664
	+937	+210	−1180	+939	−154	−1174
0,1,2	−82			−81		
−1,2,2	+2	−2	−2	+6	+6	−6
1,0,2	+528	+528	−528	+509	−509	−509
2,−1,2	+19	+38	−76	+18	−36	−72
	+467	+564	−606	+452	−539	−587

Ich bemerke hiezu, dass die vorstehenden Angaben nur näherungsweise richtig sind, indem bei ihrer Berechnung auf die kleinen

Digitized by Google

Glieder von $n\Delta z$, Δv, $\Delta\frac{r_0}{r}$, die noch nicht bekannt sind, keine Rücksicht hat genommen werden können. Wenn diese Glieder wenigstens näherungsweise bekannt sein werden, so kann durch deren Substitution und die daraus folgende zweite Annäherung eine grössere Genauigkeit in denselben erhalten werden, und es kann überhaupt wieder hier durch die Fortsetzung der Annäherungen die Genauigkeit beliebig gesteigert werden. Ob es nöthig wird, hier so zu verfahren, wird sich weiter unten zeigen.

Da aber, wie gesagt, hier nur Näherungswerthe erhalten werden können, so durfte in der Berechnung der Coefficienten der Argumente 0,0,—1,1 und 0,0,—2,2 wegen der kleinen Divisoren der obige Ausdruck von $d.\Delta W_0$ nicht angewandt werden, weil hiedurch der Einfluss des Mangels an Genauigkeit zu gross geworden wäre. Es mussten vielmehr diese Coefficienten durch die Ausdrücke (74) und (75) berechnet werden, die stets in den Annäherungen grössere Genauigkeit gewähren. Mit den hier zulässigen Abkürzungen sind diese Ausdrücke die folgenden,

$$\Delta\Xi = u\Delta X + (30)n\Delta z + (32)\Delta P + (33)\Delta Q - 3a\Delta'\Omega$$
$$\frac{d.\Delta X}{ndt} = (34)n\Delta z + (36)\Delta P + (37)\Delta Q$$

und es fand sich

$$\begin{aligned}
(30)n\Delta z &= \left.\begin{array}{r} -2{,}6 \sin(0,-1,1) \\ +13{,}3 \sin(0,-2,2) \end{array}\right\} \sin\Theta \\
(32)\Delta P &= \left.\begin{array}{r} -2{,}3 \sin(0,-1,1) \\ -8{,}3 \sin(0,-2,2) \end{array}\right\} \sin\Theta \\
(33)\Delta Q &= \left.\begin{array}{r} +0{,}8 \sin(0,-1,1) \\ +0{,}1 \sin(0,-2,2) \end{array}\right\} \sin\Theta \\
-3a\Delta'\Omega &= 0 \\
(34)n\Delta z &= \left.\begin{array}{r} +89{,}6 \cos(0,-1,1) \\ -13{,}3 \cos(0,-2,2) \end{array}\right\} \sin\Theta \\
(36)\Delta P &= \left.\begin{array}{r} +1{,}0 \cos(0,-1,1) \\ -17{,}8 \cos(0,-2,2) \end{array}\right\} \sin\Theta \\
(37)\Delta Q &= \left.\begin{array}{r} +2{,}4 \cos(0,-1,1) \\ +0{,}2 \cos(0,-2,2) \end{array}\right\} \sin\Theta
\end{aligned}$$

woraus die obigen Coefficienten —97 und +22 dieser Argumente her-

Digitized by Google

vorgehen. Für die übrigen Glieder dieser Gattung war die Anwendung dieses Verfahrens nicht nöthig.

290.

Aus den Angaben des vor. Art. bekommt man nun

$$\frac{d.fz}{dt} = \overline{(fW_0)} + \left(\frac{d.fW_0}{dy}\right) n\delta z + (10)\, n.fz$$
$$-2\frac{d.fr}{ndt} = \left(\frac{d.fW_0}{dy}\right) + \left(\frac{d^2.fW_0}{dy^2}\right) n\delta z + (14)\, n.fz$$

die aber in dieser Ausdehnung nur auf die mit $\sin\Theta$ multiplicirten Glieder angewandt zu werden brauchen, während für die mit $\cos\Theta$ multiplicirten Glieder die folgenden genügen,

$$\frac{d.fz}{dt} = \overline{(fW_0)}; \quad -2\frac{d.fr}{ndt} = \left(\frac{d.fW_0}{dy}\right)$$

Da sich

$$\left(\frac{d.fW_0}{dy}\right) n\delta z + (10)\, n.fz = \left.\begin{array}{r} +301 \sin(-1,-1,1) \\ +7 \sin(0,-1,1) \\ +327 \sin(1,-1,1) \\ -91 \sin(1,-1,2) \\ -227 \sin(2,-1,2) \\ -25 \sin(3,-1,2) \\ -54 \sin(0,-2,2) \\ +513 \sin(1,-3,2) \\ +1400 \sin(2,-3,2) \\ +110 \sin(3,-3,2) \\ -313 \sin(1,0,3) \\ +55 \sin(2,0,3) \\ +7 \sin(3,0,3) \\ -5 \sin(-1,2,4) \\ -79 \sin(0,2,4) \\ -4 \sin(1,2,4) \end{array}\right\} \sin\Theta$$

$$\left(\frac{d^2.fW_0}{dy^2}\right) n\delta z + (14)\, n.fz = \left.\begin{array}{r} -323 \cos(-1,-1,1) \\ -240 \cos(0,-1,1) \\ +288 \cos(1,-1,1) \\ -99 \cos(1,-1,2) \\ -285 \cos(2,-1,2) \\ -48 \cos(3,-1,2) \end{array}\right|$$

Digitized by Google

$$
\left.\begin{array}{r}
+20\cos(0,-2,2)\\
+475\cos(1,-3,2)\\
+1709\cos(2,-3,2)\\
+222\cos(3,-2,2)\\
-319\cos(1,0,3)\\
+58\cos(2,0,3)\\
+10\cos(3,0,3)\\
-65\cos(-1,2,4)\\
-127\cos(0,2,4)\\
-24\cos(1,2,4)
\end{array}\right\}\sin\Theta
$$

ergab, so wurde

$$
n.fz = \left\{\begin{array}{rr}
+354\cos(-1,-1,1) & +58\sin(-1,-1,1)\\
-1737\cos(0,-1,1) & -756\sin(0,-1,1)\\
-710\cos(1,-1,1) & +75\sin(1,-1,1)\\
-29\cos(1,-1,2) & \\
+152\cos(2,-1,2) & -5\sin(2,-1,2)\\
+9\cos(3,-1,2) & \\
+112\cos(0,-2,2) & +51\sin(0,-2,2)\\
-815\cos(1,-3,2) & +67\sin(1,-3,2)\\
-1146\cos(2,-3,2) & +50\sin(2,-3,2)\\
-51\cos(3,-3,2) & +1\sin(3,-3,2)\\
-6517\cos(1,0,3) & +6845\sin(1,0,3)\\
+356\cos(2,0,3) & -401\sin(2,0,3)\\
+8\cos(3,0,3) & -11\sin(3,0,3)\\
-441\cos(-1,2,4) & +416\sin(-1,2,4)\\
-5400\cos(0,2,4) & +5906\sin(0,2,4)\\
-400\cos(1,2,4) & +390\sin(1,2,4)
\end{array}\right.\begin{array}{l}\sin\Theta\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\cos\Theta
$$

$$
Av = \left\{\begin{array}{rr}
-193\sin(-1,-1,1) & -31\cos(-1,-1,1)\\
+371\sin(0,-1,1) & -92\cos(0,-1,1)\\
-319\sin(1,-1,1) & +36\cos(1,-1,1)\\
-3\sin(1,-1,2) & \\
+106\sin(2,-1,2) & -4\cos(2,-1,2)\\
+97\sin(3,-1,2) & \\
-56\sin(0,-2,2) & +7\cos(0,-2,2)\\
-383\sin(1,-3,2) & +34\cos(1,-3,2)\\
-798\sin(2,-3,2) & +36\cos(2,-3,2)
\end{array}\right.\begin{array}{l}\sin\Theta\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\cos\Theta
$$

Digitized by Google

$-56 \sin (3,-3,2)$	$+2 \cos (3,-3,2)$
$-3292 \sin (1,0,3)$	$-3474 \cos (1,0,3)$
$+378 \sin (2,0,3)$	$+403 \cos (2,0,3)$
$+29 \sin (3,0,3)$	$+31 \cos (3,0,3)$
$+145 \sin (-1,2,4)$	$+175 \cos (-1,2,4)$
$-261 \sin (0,2,4)$	$-484 \cos (0,2,4)$
$-233 \sin (1,2,4)$	$+233 \cos (1,2,4)$

291.

Endlich sind noch die correspondirenden Glieder in $\Delta \frac{h_0}{h}$ durch den Ausdruck

$$\frac{d.\Delta \frac{h_0}{h}}{ndt} = (17) n.\Delta z + (19) \Delta P + (20) \Delta Q - \Delta \Sigma$$

zu berechnen, von welchem man die Summe der drei letzten Glieder im Art. 287 findet. Es fand sich

$\Delta \frac{h_0}{h} =$	$+13 \sin (-1,-1,1)$		
	$+318 \sin (0,-1,1)$		
	$-25 \sin (1,-1,1)$		
	$-80 \sin (2,-1,2)$	$-4 \cos (2,-1,2)$	
	$-67 \sin (0,-2,2)$	$-30 \cos (0,-2,2)$	
	$-78 \sin (1,-3,2)$	$-8 \cos (1,-3,2)$	
	$+457 \sin (2,-3,2)$	$+22 \cos (2,-3,2)$	
	$+26 \sin (3,-3,2)$	$+1 \cos (3,-3,2)$	
	$+81 \sin (1,0,3)$	$+84 \cos (1,0,3)$	
	$+17 \sin (2,0,3)$	$-3 \cos (2,0,3)$	
	$+28 \sin (3,0,3)$	$+27 \cos (3,0,3)$	
	$+63 \sin (0,2,4)$	$+63 \cos (0,2,4)$	
	$-4 \sin (1,2,4)$	$-4 \cos (1,2,4)$	

$\sin \Theta$ $\cos \Theta$

292.

Vergleicht man nun die in den letzten Artt. erhaltenen Zahlenwerthe mit den im § 17 eingeführten Bezeichnungen, so findet man leicht, dass die in der Tafel des Art. 289 in jeder Abtheilung unter den kurzen Strichen angegebenen Zahlen die Coefficienten der Functionen $\overline{B}'$, $\left(\frac{d\overline{B}'}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2\overline{B}'}{dy^2}\right)$ des Art. 221 sind, und zwar wird, da $\overline{B}$ hier nicht gebraucht wird,

Digitized by Google

$$\left(\frac{dB'}{d\gamma'}\right) =$$

−93 cos (−1,−1,1)			−67 sin (−1,−1,1)	
+296 cos (0,−1,1)			−14 sin (0,−1,1)	
+302 cos (1,−1,1)			−66 sin (1,−1,1)	
+105 cos (1,−1,2)				
−127 cos (2,−1,2)			+16 sin (2,−1,2)	
−9 cos (3,−1,2)				
−35 cos (0,−2,2)			−2 sin (0,−2,2)	
+131 cos (1,−3,2)			−53 sin (1,−3,2)	
+1147 cos (2,−3,2)		sin Θ	−128 sin (2,−3,2)	cos Θ
+88 cos (3,−3,2)			−10 sin (3,−3,2)	
+7069 cos (1,0,3)			−7112 sin (1,0,3)	
−1591 cos (2,0,3)			+1633 sin (2,0,3)	
−183 cos (3,0,3)			+186 sin (3,0,3)	
+309 cos (−1,2,4)			−294 sin (−1,2,4)	
+210 cos (0,2,4)			−154 sin (0,2,4)	
+564 cos (1,2,4)			−539 sin (1,2,4)	

$$\left(\frac{d^2B'}{d\gamma'^2}\right) =$$

−115 sin (−1,−1,1)			+71 cos (−1,−1,1)	
+44 sin (0,−1,1)			+62 cos (0,−1,1)	
−246 sin (1,−1,1)			−60 cos (1,−1,1)	
−97 sin (1,−1,2)				
+297 sin (2,−1,2)			+20 cos (2,−1,2)	
+45 sin (3,−1,2)				
−15 sin (0,−2,2)			−10 cos (0,−2,2)	
−65 sin (1,−3,2)			−43 cos (1,−3,2)	
−2043 sin (2,−3,2)		sin Θ	−156 cos (2,−3,2)	cos Θ
−280 sin (3,−3,2)			−20 cos (3,−3,2)	
−7155 sin (1,0,3)			−7200 cos (1,0,3)	
+133 sin (2,0,3)			+243 cos (2,0,3)	
−39 sin (3,0,3)			−26 cos (3,0,3)	
+267 sin (−1,2,4)			+252 cos (−1,2,4)	
−1180 sin (0,2,4)			−1174 cos (0,2,4)	
−606 sin (1,2,4)			−587 cos (1,2,4)	

Aus derselben Tafel ergeben sich ferner mit der Bezeichnung, die im Art. 227 eingeführt worden ist, die folgenden Ausdrücke, die weiter unten gebraucht werden.

Digitized by Google

$$
\left.\begin{array}{rr}
fY' = & -24\cos(-1,-1,1) \\
 & -38\cos(1,-1,1) \\
 & +48\cos(0,-3,2) \\
 & +139\cos(1,-3,2) \\
 & -2\cos(2,-3,2) \\
 & +13\cos(3,-3,2) \\
 & +7143\cos(0,0,3) \\
 & -1529\cos(1,0,3) \\
 & +3\cos(2,0,3) \\
 & +490\cos(3,0,3) \\
 & +664\cos(-1,2,4) \\
 & +194\cos(0,2,4) \\
 & +510\cos(1,2,4)
\end{array}\right\}\cos\Theta
\qquad
\left.\begin{array}{rr}
f''\Psi' = & +24\sin(-1,-1,1) \\
 & -132\sin(0,-1,1) \\
 & -38\sin(1,-1,1) \\
 & -48\sin(0,-3,2) \\
 & -139\sin(1,-3,2) \\
 & -8\sin(2,-3,2) \\
 & +13\sin(3,-3,2) \\
 & -7143\sin(0,0,3) \\
 & +1529\sin(1,0,3) \\
 & +7\sin(2,0,3) \\
 & +490\sin(3,0,3) \\
 & -664\sin(-1,2,4) \\
 & -824\sin(0,2,4) \\
 & +510\sin(1,2,4)
\end{array}\right\}\cos\Theta
$$

Der Ausdruck von $n\Delta z$ des Art. 290 ist ferner $= Z'$, der von $\Delta\nu = V'$, und der von $\Delta\frac{h_0}{h}$ des Art. 291 $= H'$ des Art. 221. Diese Ausdrücke sind aber alle, wie schon oben angemerkt worden ist, bis jetzt nur näherungsweise richtig.

293.

Berechnet man jetzt die Producte (10) Z', etc., so findet man

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\overline{dB'}}{d\gamma}\right) n\delta z &= +\,1{,}39\cos\Theta \\
(10)\; Z' &= +\,1{,}40\cos\Theta \\
(11)\; V' &= -\,0{,}80\cos\Theta \\
(12)\; H' &= \,0{,}00
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\overline{d^2B'}}{d\gamma^2}\right) n\delta z &= +\,0{,}89\sin\Theta \\
(14)\; Z' &= +\,0{,}02\sin\Theta \\
(15)\; V' &= \,0{,}00 \\
(17)\; Z' &= +\,0{,}53\sin\Theta \\
(18)\; V' &= +\,0{,}41\sin\Theta
\end{aligned}
$$

von den übrigen Gliedern dieser Producte sind die Coefficienten so klein, dass sie unbedenklich übergangen werden können. Es wird nun zufolge der Ausdrücke des Art. 221

$$\varkappa'_0 = +\,1{,}99\,;\quad \lambda_0 = +\,0{,}91$$

Digitized by Google

und die übrigen $\varkappa$ und λ sind Null. Ferner mit Zuziehung der bez. Zahlenwerthe des Art. 287

$$\begin{aligned} p_0 &= -9{,}2\,, \\ p_1 &= -19\,, & p'_1 &= +21 \\ p_3 &= -103\,, & p'_3 &= +100 \\ p_4 &= +643\,, & p'_4 &= -615 \\ p_5 &= +38\,, & p'_5 &= -38 \end{aligned}$$

Es wird ferner

$$\begin{aligned} (1)\; Z' &= -1{,}65 \\ &\quad +1{,}22\cos(\gamma-g) \\ &\quad +0{,}88\cos\gamma \end{aligned} \Big\} \sin\Theta \qquad +0{,}32\sin\gamma\cos\Theta$$

$$\begin{aligned} (2)\; V' &= -1{,}16 \\ &\quad +1{,}11\cos(\gamma-g) \\ &\quad +0{,}65\cos\gamma \end{aligned} \Big\} \sin\Theta \qquad +0{,}24\sin\gamma\cos\Theta$$

$$\begin{aligned} (3)\; H' &= -0{,}51 \\ &\quad +0{,}55\cos(\gamma-g) \\ &\quad -0{,}05\cos\gamma \end{aligned} \Big\} \sin\Theta$$

$$(4)\; \frac{dV'}{ndt} = 0{,}00$$

indem auch hier die Coefficienten der übrigen Glieder so klein sind, dass sie übergangen werden können. Hiemit und durch Zuziehung der Zahlenwerthe des Art. 286 ergiebt sich zufolge der im Art. 223 eingeführten Bezeichnung

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= +36{,}21 \\ \alpha_1 &= -38{,}1 & \alpha'_1 &= -3041{,}5 \\ \varepsilon_1 &= +59 & \varepsilon'_1 &= -312 \\ \varepsilon_2 &= -29 & \varepsilon'_2 &= +362 \\ \varepsilon_3 &= -29{,}9 & \varepsilon'_3 &= +7{,}0 \\ \alpha_{0,3} &= +155 & \alpha'_{0,3} &= -150 \\ \alpha_{-1,4} &= -107 & \alpha'_{-1,4} &= +169 \\ \alpha_{1,2} &= -173 & \alpha'_{1,2} &= +167 \\ \alpha_{0,4} &= -1939 & \alpha'_{0,4} &= +1846 \\ \alpha_{-1,5} &= +681 & \alpha'_{-1,5} &= -606 \\ \alpha_{1,3} &= +1914 & \alpha'_{1,3} &= -1831 \\ \alpha_{0,5} &= -171 & \alpha'_{0,5} &= +161 \\ \alpha_{-1,6} &= +84 & \alpha'_{-1,6} &= -76 \\ \alpha_{1,4} &= +72 & \alpha'_{1,4} &= -70 \end{aligned}$$

Digitized by Google

294.

Hieraus sind nun nach den Regeln des Art. 224 die Coefficienten q, r, s zu berechnen, und es ergiebt sich dafür zuerst die folgende tabularische Zusammenstellung.

γ, g, g'	$q-\varkappa$ sin	$r-\lambda$ cos	$-s$ sin	$q'-\varkappa'$ cos	$r'-\lambda'$ sin	$-s'$ cos
1.						
1,−1,0	+38,1	+38,1		−3044,5	+3042	+3042
2,−2,0	+0,4	+0,8		−5,0	+10	+20
		+38,9		−3046,5		+3062
0,1,0	+95			+312		
−1,2,0	−15	+15	+15	−181	−181	+181
2,−1,0	+1	+2	−4	−83,4	+167	+334
	+45	+17	+11	+48	−14	+515
2.						
0,1,−2	+179			+173		
−1,2,−2	−57	+57	+57	−90	−90	+90
−2,3,−2	+6,5	−13	−26	+5,8	+12	−23
1,0,−2	+1293	+1293	−1293	+1218	−1218	−1218
	+1422	+1337	−1262	+1337	−1326	−1181
0,2,−2	−1039			−989		
−1,3,−2	+238	−238	−238	+212	+212	−212
−2,4,−2	+0,6	−1	−2	+0,5	+1	−2
1,1,−2	+2210	+2210	−2210	+2144	−2144	−2144
2,0,−2	+35,5	+71	−142	+34,2	−68	−137
	+1445	+2042	−2592	+1372	−1969	−2465
0,3,−2	−60			−56		
−1,4,−2	+22	−22	−22	+20	+20	−20
1,2,−2	+39	+39	−39	+38	−38	−38
2,1,−2	+60,6	+121	−242	+58,0	−116	−232
3,0,−2	+1,5	+5	−14	+1,4	−4	−13
	+63	+143	−317	+61	−138	−303

woraus sich in Verbindung mit den schon berechneten Werthen von $\varkappa$ und λ die folgenden Werthe

$$q'_0 = -3044{,}5$$
$$q_1 = +45 \qquad q'_1 = +48$$
$$q_3 = +1422 \qquad q'_3 = +1337$$
$$q_4 = +1445 \qquad q'_4 = +1372$$
$$q_5 = +63 \qquad q'_5 = +61$$
$$r_0 = +39{,}8$$
$$r_1 = +17 \qquad r'_1 = -14$$

Digitized by Google

$$\begin{aligned} r_3 &= +1337 & r'_3 &= -1326 \\ r_4 &= +2042 & r'_4 &= -1969 \\ r_5 &= +143 & r'_5 &= -138 \\ & & s'_0 &= -3062 \\ s_1 &= -11 & s'_1 &= -515 \\ s_3 &= +1262 & s'_3 &= +1181 \\ s_4 &= +2592 & s'_4 &= +2465 \\ s_5 &= +317 & s'_5 &= +303 \end{aligned}$$

ergeben.

295.

Es ergiebt sich ferner

$$\begin{aligned} (27)\ H' &= -0{,}02\cos\Theta \\ (28)\ \int\Gamma' &= -1{,}10\cos\Theta \\ (29)\ \int''\varphi' &= -1{,}05\cos\Theta \\ (30)\ Z' &= -0{,}01\cos\Theta \\ (31)\ V' &= -0{,}03\cos\Theta \\ (34)\ Z' &= -2{,}38\sin\Theta \\ (35)\ V' &= -1{,}59\sin\Theta \end{aligned}$$

Hieraus und mit Zuziehung der Zahlenwerthe des Art. 288 ergab sich zufolge der Ausdrücke des Art. 228

$$\lambda_0 = +22{,}2\,; \quad \mu_0 = +24{,}28$$

296.

Für die Schlussrechnungen werde ich mich nun der beiden Gleichungen des Art. 228 statt der beiden ersten des Art. 226 bedienen, da jene bei geringerer Genauigkeit der Daten grössere Genauigkeit im Resultat gewähren wie diese. Durch die Substitution der im Vorhergehenden berechneten Grössen in die betreffenden Ausdrücke der Tafeln 9 und 7 des § 17 ergab sich

$$\begin{aligned} A' &= -0''{,}0000274 \\ B' &= -0{,}029690 \\ C &= +0{,}000036 \\ D &= -0{,}000002 \\ E &= +0{,}000408 \\ F &= +0{,}000022 \end{aligned}$$

Digitized by Google

Da nun $\log x = 7{,}6078$ ist, so erhalten wir hiemit die folgenden Gleichungen

$$
\begin{aligned}
0 &= (7{,}6078)\theta_0 - (4{,}7214)a_0 + (2{,}556)a_1 + (4{,}589)a_3 - 0{,}0000274\\
0 &= (8{,}8776)\theta_0 - (7{,}6078)a_0 - (7{,}9713)a_1 - (8{,}0197)a_2 - (7{,}3925)a_4 - 0{,}029690\\
0 &= -(4{,}309)a_0 - (7{,}9125)a_1 + (5{,}7501)a_3 + 0{,}000036\\
0 &= +(3{,}987)a_0 - (4{,}993)a_1 + (7{,}6078)a_2 - (3{,}686)a_3 - 0{,}000002\\
0 &= +(7{,}1236)a_1 + (6{,}3068)a_2 - (7{,}6078)a_3 - (5{,}650)a_4 + 0{,}000408\\
0 &= -(3{,}832)a_0 - (4{,}747)a_1 + (5{,}288)a_3 + (7{,}6078)a_4 + 0{,}000022
\end{aligned}
$$

die man leicht durch Näherungen auflösen kann. Die Auflösung giebt

$$
\begin{aligned}
a_0 &= -7''{,}400\\
a_1 &= +0{,}0070\\
a_2 &= +0{,}0022\\
a_3 &= +0{,}1029\\
a_4 &= -0{,}0072
\end{aligned}
$$

und substituirt man diese nebst den Werthen der q, r, etc. in die Gleichungen der Tafel 6 des § 17, so erhält man

$$
\begin{aligned}
k_1 &= -0''{,}1038 & k'_1 &= -0''{,}0067\\
k_3 &= -0{,}1565 & k'_3 &= +0{,}0139\\
k_4 &= -0{,}1630 & k'_4 &= +0{,}0074\\
k_5 &= -0{,}0075 & k'_5 &= +0{,}0002\\
l_1 &= -0{,}0478 & l'_1 &= +0{,}0036\\
l_3 &= -0{,}0732 & l'_3 &= -0{,}0066\\
l_4 &= -0{,}1144 & l'_4 &= -0{,}0052\\
l_5 &= -0{,}0081 & l'_5 &= -0{,}0002\\
m_1 &= -0{,}0024 & m'_1 &= -0{,}0004\\
m_3 &= -0{,}0116 & m'_3 &= -0{,}0011\\
m_4 &= +0{,}0695 & m'_4 &= +0{,}0034\\
m_5 &= +0{,}0039 & m'_5 &= +0{,}0001
\end{aligned}
$$

Wollte man statt der beiden ersten hier angewandten Gleichungen die beiden ersten des Art. 226 anwenden, so würde man a_0 eine Secunde grösser wie oben finden, während die anderen a Coefficienten sehr nahe wieder dieselben Werthe bekommen. Dieses hat seinen Grund darin, dass die hier durchgeführte Rechnung strenge genommen nur die erste Annäherung ist, in welcher die k, l, etc. übergangen werden mussten, weil sie noch nicht bekannt waren. Führt man nun eine zweite An-

Digitized by Google

näherung aus, so werden die beiden Werthe von a_0 einander näher kommen, und bei ferneren Annäherungen wird dieses mehr und mehr der Fall werden. Ich habe mich aber durch eine vorläufige Substitution überzeugt, dass der oben erhaltene Werth von a_0 sich nur äusserst wenig ändern wird, und halte deshalb die Durchführung einer zweiten Annäherung für überflüssig.

297.

Stellen wir nun die erhaltenen Resultate zusammen und führen die Producte von Sinussen und Cosinussen auf linearische Sinusse und Cosinusse hin, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
n\Delta z = & -7'',400 \sin \Theta \\
& -0,055 \sin (g+\Theta) \\
& +0,049 \sin (g+\Theta) \\
& -0,012 \sin (-g'+\Theta) \\
& +0,005 \sin (-g'-\Theta) \\
& -0,071 \sin (\ g-2g'+2\omega-2\omega'+\Theta) \\
& +0,085 \sin (\ g-2g'+2\omega-2\omega'-\Theta) \\
& -0,078 \sin (2g-2g'+2\omega-2\omega'+\Theta) \\
& +0,085 \sin (2g-2g'+2\omega-2\omega'-\Theta) \\
& -0,004 \sin (3g-2g'+2\omega-2\omega'+\Theta) \\
& +0,004 \sin (3g-2g'+2\omega-2\omega'-\Theta) \\
& -0,004 \sin (\ g-3g'+2\omega-2\omega'-\Theta) \\
& +0,004 \sin (2g-3g'+2\omega-2\omega'-\Theta) \\
& +0,067 \sin (\ g+2\omega-\Theta) \\
& +0,057 \sin (2g'+2\omega'-\Theta) \\
& +0,037 \sin 2\Theta \\
n\Delta y = & +0'',007 \cos \Theta \\
& +0,026 \cos (g+\Theta) \\
& -0,021 \cos (g-\Theta) \\
& +0,033 \cos (\ g-2g'+2\omega-2\omega'+\Theta) \\
& -0,040 \cos (\ g-2g'+2\omega-2\omega'-\Theta) \\
& +0,055 \cos (2g-2g'+2\omega-2\omega'+\Theta) \\
& -0,060 \cos (2g-2g'+2\omega-2\omega'-\Theta) \\
& +0,004 \cos (3g-2g'+2\omega-2\omega'+\Theta) \\
& -0,004 \cos (3g-2g'+2\omega-2\omega'-\Theta)
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

$$+ 0{,}004 \cos (2g - 3g' + 2\omega - 2\omega' + \Theta)$$
$$- 0{,}004 \cos (2g - 3g' + 2\omega - 2\omega' - \Theta)$$
$$- 0{,}034 \cos (g + 2\omega - \Theta)$$
$$- 0{,}004 \cos (2g' + 2\omega' - \Theta)$$

Das mit $\sin 2\Theta$ in $n\Delta z$ multiplicirte Glied habe ich aus dem Art. 157 entnommen, und den Ausdruck für $A\frac{h_0}{h}$ weggelassen, weil er nur eine Hülfsgrösse bildet.

§ 22. Berechnung der Säcularänderungen des Mondes.

298.

Bei der hier folgenden Berechnung der Säcularänderungen des Mondes werde ich dasselbe Prinzip anwenden, von welchem ich in meiner früheren Berechnung derselben Gebrauch gemacht habe, nemlich, dass hier $\Xi = 0$ ist, oder mit Worten, dass das Element Ξ keinen Beitrag dazu liefern könne. Die Gründe, die ich hiefür habe, bestehen darin, dass diese Abhandlungen dazu bestimmt sind zu zeigen, wie ich die in den Mondtafeln angewandten Störungen erhalten habe, und folglich von den dabei angewandten Grundsätzen nicht abgehen darf, ferner, dass ich in der zweiten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten bewiesen habe, dass wenigstens bis auf die Cuben und Producte von drei Dimensionen der störenden Kräfte Ξ in der That keinen Beitrag zu den Säcularänderungen liefern kann, und also wenn ein solcher vorhanden sein möchte, er höchstens von der dritten Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte sein kann. Endlich stimmen die durch das oben genannte Prinzip erhaltenen Säcularänderungen so überraschend gut mit den alten Beobachtungen, dass hieraus auch ein Grund geschöpft werden kann, dasselbe beizubehalten.

In Bezug auf die Einzelnheiten des Verfahrens, welches ich früher angewandt habe, ist schon im § 17 angeführt worden, dass ich die Säcularänderungen nach der dort erklärten Methode berechnet habe, nur gehört dazu, dass eine grössere Anzahl von Gliedern mit unbestimmten Coefficienten versehen werden wie dort geschehen ist. Hier habe ich die weiter dazu erforderlichen Glieder weggelassen, weil ich, um die Uebereinstimmung der Resultate beider Methoden zu zeigen, hier die Säcularänderungen, durch dasselbe Verfahren, welches in den §§ 18, 19, 20 angewandt worden ist, berechnen werde.

Digitized by Google

299.

Es sind nun zuerst die Säcularänderungen der Sonnenlänge, die mit einem Sinus, und die des Radius Vectors der Sonne, die mit einem Cosinus multiplicirt sind, erforderlich, und diese sind meinen früheren Rechnungen zufolge für den Anfang des Jahres 1800 die folgenden:

Merkur . . .	$-0''.00573$
Venus. . . .	$+0,02708$
Mars	$-0,03029$
Jupiter . . .	$-0,16287$
Saturn . . .	$-0,00086$
	$n'\Delta z' = -0''.17267\, t \sin g'$

wo das Julianische Jahr die Einheit von t ist. Dieser Coefficient ist um sehr Weniges von dem in den Sonnentafeln angewandten verschieden, und die Ursache davon ist, dass ich hier die Wirkung des Merkurs auf die von Leverrier angegebene Masse desselben hingeführt habe, die bei der Bearbeitung meiner Sonnentafeln noch nicht bekannt war. Fügt man nun die übrigen Glieder nach der bekannten einfachen Regel hinzu, und macht 100 Julianische Jahre zur Einheit von t, so erhält man

$$\begin{aligned} n'\Delta z' = &-17''.2670\, t \sin g' \\ &-0,0725\, t \sin 2g' \\ &-0,0006\, t \sin 3g' \\ \Delta r' = &+0.0725\, t \\ &+8,6335\, t \cos g' \\ &+0,0725\, t \cos 2g' \\ &+0,0009\, t \cos 3g' \end{aligned}$$

die die Grundlage der folgenden Rechnung bilden. Ich bemerke hiezu, dass die in der Sonnenlänge mit einem Cosinus, und die im Radius Vector mit einem Sinus multiplicirten Glieder sich zur Säcularänderung des Sonnenperigäums vereinigen, und als solche in den Argumenten der Mondstörungen berücksichtigt worden sind, ferner dass die von den übrigen Planeten bewirkte allmählige Aenderung der Lage der Sonnenbahn im Raume in der Mondbewegung keine Säcularänderung, sondern die periodischen Glieder hervorbringt, die den Mondtafeln einverleibt sind, und deren Berechnung im § 14 ausgeführt worden ist.

Digitized by Google

300.

Es sind nun die im § 15 mit $\Delta' T$, $\Delta' \Sigma$, etc. bezeichneten Functionen gleich Null, und dafür treten als im Voraus bekannte Grössen die Producte (8) $n' \Delta z'$, (9) $\Delta v'$, etc. ein, die zuerst zu berechnen sind. Man findet, wenn man die fünfte Decimale der Secunde zur Einheit annimmt,

γ, g, g'	(8) $n' \Delta z'$ $t \sin$	(9) $\Delta v'$ $t \sin$	Summe $t \sin$
1.			
−1,1,0	+242,01	−472,07	−230,06
0,1,0	−88	+158	+70
	+39	−67	−28
	+55,203	−105,679	−50,476
0,2,0	−9	+14	+5
	+5	−7	−2
	+2	−5	−3
0,−3,−1	+13	−10	+3
	−3	+2	−1
	−8	+6	−2
0,−2,−1	+146	−126	+20
	−44	+32	−12
	−80	+69	−11
0,−1,−1	+1396	−1702	−306
	−738,1	+1206,8	+468,7
	−634	+690	+56
0,0,−1	+1649,4	−0,5	+1648,9
	−800,8	−7119,6	−7920,4
	−814,3	+7119,1	+6304,8
0,1,−1	+1390	+1701	+3091
	−632	−691	−1323
	−735,0	−1207,6	−1942,6
0,2,−1	+146	+126	+272
	−80	−69	−149
	−44	−32	−76
0,3,−1	+13	+10	+23
	−8	−6	−14
	−3	−2	−5
0,−2,−2	+6	−5	+1
	−2	+1	−1
	−3	+3	0
0,−1,−2	+47	−65	−18
	−19,9	+41,3	+21,4
	−22	+26	+4

Digitized by Google

1.			
0,0,−2	+127,6	−5,2	+122,4
	−483,4	−245,9	−729,3
	+58,4	+228,5	+286,6
0,1,−2	+135	+92	+227
	−61	−41	−102
	−75,4	−61,3	−136,4
0,2,−2	+15	+9	+24
	−8	−5	−13
	−4	−2	−6
0,−1,−3	+1	−2	−1
	−0,6	+1,5	+0,9
	−1	+1	0
0,0,−3	+6,6	−0,4	+6,2
	−10,3	−7,0	−17,3
	+3,2	+6,4	+9,6
0,1,−3	+7	+3	+10
	−3	−1	−4
	−3,7	−2,0	−5,7
2.			
0,1,0	−29	+23	−6
	+7	−7	0
	+16,65	−18,39	−1,74
0,2,0	−138	+104	−34
	+69	−53	+16
	+67	−53	+14
0,3,0	−24	+18	−6
	+15	−12	+3
	+7	−6	+1
0,−1,−1	+3	+1	+4
	+1,4	−1,3	+0,1
	−2	−1	−3
0,0,−1	+12,6	+20,3	+32,9
	−122,0	+88,4	−33,6
	−48,0	+15,9	−32,1
0,1,−1	−3565	+2700	−865
	+2397	−1843	+554
	+3984,5	−3122,2	+862,3
0,2,−1	+43372	−32523	+10849
	−14357	+10754	−3603
	−43665	+32689	−10976
0,3,−1	+3598	−2698	+900
	−1588	+1191	−397
	−1615	+1212	−403
0,4,−1	+264	−198	+66
	−136	+102	−34
	−78	+59	−19
0,5,−1	+19	−14	+5
	−11	+8	−3
	−4	+3	−1

Digitized by Google

2.			
0,0,−2	−3,3	+2,0	−1,3
	−8,6	+6,2	−2,4
	−2,5	+0,3	−2,2
0,1,−2	−983,0	+192,0	−94,0
	+212,4	−130,2	+82,2
	+340,29	−219,81	+120,48
0,2,−2	+4289,1	−2190,5	+2098,6
	−1465,9	+722,6	−743,3
	−4174,0	+2196,9	−1977,1
0,3,−2	+387,4	−186,1	+201,3
	−180,4	+82,3	−98,1
	−166,4	+81,5	−82,9
0,4,−2	+31	−14	+17
	−18	+8	−10
	−9	+4	−5
0,−1,−3	−3	+1	−2
	−1,4	−1,3	−2,7
	+2	−1	+1
0,0,−3	−12,6	+20,3	+7,7
	+122,0	+88,5	+210,5
	+18,0	+15,9	+63,9
0,1,−3	+3519	+2707	+6256
	−2385	−1848	−4233
	−3965,0	−3130,5	−7095,5
0,2,−3	−43131	−32629	−75760
	+14274	+10802	+25076
	+43130	+32789	+76219
0,3,−3	−3577	−2708	−6285
	+1578	+1195	+2773
	+1605	+1216	+2821
0,4,−3	−264	−198	−462
	+136	+102	+238
	+78	+59	+137
0,5,−3	−19	−14	−33
	+11	+8	+19
	+4	+3	+7
0,0,−4	+0,3	+2,4	+2,7
	+10,2	+5,2	+15,4
	+3,8	+0,6	+4,4
0,1,−4	+312	+169	+481
	−220	−122	−342
	−356,9	−201,5	−558,4
0,2,−4	−1140	−2295	−6435
	+1393	+775	+2168
	+4096	+2251	+6347
0,3,−4	−363	−205	−568
	+166	+94	+260
	+160	+89	+249

Digitized by Google

2.			
0, 4, −4	−28	−17	−45
	+16	+9	+25
	+8	+4	+12
0, 4, −5	+16	+7	+23
	−12	−5	−17
	−20	−9	−29
0, 2, −5	−245	−106	−351
	+83	+37	+120
	+236	+102	+338
0, 3, −5	−21	−10	−31
	+10	+5	+15
	+10	+5	+15
11.			
0, 3, −2	−6	+4	−2
	+4	−3	+1
	+2	−2	0
0, 4, −2	−2	0	−2
	+2	−1	+1
	0	−1	−1
0, 2, −3	−3	+3	0
	+33	−25	+8
	−20	+15	−5
0, 3, −3	+579	−434	+145
	−348	+260	−88
	−229	+172	−57
0, 4, −3	+88	−66	+22
	−109	+82	−27
	+28	−21	+7
0, 5, −3	+20	−15	+5
	−20	+15	−5
	0	0	0
0, 2, −4	−4	0	−4
	+5	−3	+2
	−2	+1	−1
0, 3, −4	+90	−17	+43
	−53	+28	−25
	−35	+19	−16
0, 4, −4	+16	−9	+7
	−20	+10	−10
	+5	−2	+3
0, 5, −4	+3	−2	+1
	−3	+2	−1
	0	0	0
0, 2, −5	+3	+3	+6
	−33	−25	−58
	+20	+15	+35
0, 3, −5	−572	−438	−1010
	+344	+262	+606
	+226	+173	+399

Digitized by Google

11.			
0,4,−5	−86	−67	−153
	+107	+83	+190
	−28	−21	−49
0,5,−5	−20	−15	−35
	+20	+15	+35
	0	0	0
0,2,−6	+1	0	+1
	−5	−3	−8
	+2	+1	+3
0,3,−6	−84	−52	−136
	+49	+31	+80
	+33	+20	+53
0,4,−6	−14	−10	−24
	+18	+12	+30
	−5	−3	−8
0,5,−6	−3	−2	−5
	+3	+2	+5
	0	0	0
3.			
0,1,0	0	0	0
	0	0	0
	+0,42	−0,83	−0,41
0,2,0	+1	−9	−5
	−1	+3	+2
	−4	+9	+5
4.			
0,−1,2	0	0	0
	−0,4	+0,2	−0,2
	0	0	0
0,0,2	0	0	0
	+5,5	−3,0	+2,5
	−5,5	+3,0	−2,5
0,1,2	0	0	0
	0	0	0
	+0,4	−0,2	+0,2
6.			
0,1,−1	+2	−3	−1
	0	−1	−1
	−2,3	+3,8	+1,5
7.			
0,2,−3	−4	+2	−2
	+2	−1	+1
	+4	−2	+2
0,3,−3	+25	−11	+14
	−8	+4	−4
	−25	+11	−14

Digitized by Google

g, g'	(21) $n' \Delta z'$ t sin	(22) $\Delta v'$ t sin	Summe t sin
1.			
1,0	+23	−40	−17
2,0	+2	−3	−1
−3,−1	−2	+2	0
−2,−1	−36	+27	−9
−1,−1	−456	+372	−84
0,−1	−414,0	+0,1	−413,9
1,−1	−455	−373	−828
2,−1	−36	−27	−63
3,−1	−2	−2	−4
−2,−2	−1	+1	0
−1,−2	−18	+13	−5
0,−2	−32,9	+2,0	−30,9
1,−2	−41	−21	−62
2,−2	−3	−2	−5
0,−3	−1,9	+0,1	−1,8
1,−3	−2	−1	−3
2.			
1,0	+8	−6	+2
2,0	+16	−34	+10
−1,−1	0	−1	−1
0,−1	−113,9	+78,5	−35,4
1,−1	+2379	−1791	+588
2,−1	−14387	+10792	−3595
3,−1	−793	+595	−198
4,−1	−44	+33	−11
0,−2	−8,2	+5,4	−2,8
1,−2	+207,7	−123,8	+83,9
2,−2	−1123,0	+726,5	−696,5
3,−2	−87,6	+41,3	−46,3
−1,−3	0	−1	−1
0,−3	+113,9	+78,5	+192,4
1,−3	−2366	−1796	−4162
2,−3	+14307	+10827	+25134
3,−3	+788	+598	+1386
4,−3	+44	+33	+77
5,−3	+3	+2	+5
0,−4	+9,3	+4,8	+14,1
1,−4	−216	−118	−334
2,−4	+1374	+762	+2136
3,−4	+81	+46	+127
4,−4	+4	+2	+6
1,−5	−13	−5	−18
2,−5	+81	+35	+116
3,−5	+5	+2	+7

Digitized by Google

11.			
2, −3	+9	−7	+2
3, −3	−171	+128	−43
4, −3	−62	+46	−16
5, −3	−7	+6	−1
2, −4	+1	−1	0
3, −4	−26	+14	−12
4, −4	−10	+7	−3
2, −5	−9	−7	−16
3, −5	+169	+129	+298
4, −5	+61	+46	+107
5, −5	+7	+6	+13
2, −6	−1	−1	−2
3, −6	+24	+14	+38
4, −6	+10	+6	+16
5, −6	+1	+1	+2

g, g'	(44) $n' \Delta z'$ t cos	(45) $\Delta v'$ t cos	Summe t cos	(52) $n' \Delta z'$ t sin	(53) $\Delta v'$ t sin	Summe t sin
1.						
0, 0	+15,599	−31,009	−15,410			
1, 0	−3	+5	+2	−2	+1	−1
−2, −1	−1	+3	+2	+2	−2	0
−1, −1	−23	+66	+43	+22	−16	+6
0, −1	+0,9	−944,2	−943,3	−12,7	0,0	−12,7
1, −1	+23	+66	+89	+22	+16	+38
2, −1	+1	+3	+4	+2	+2	+4
−1, −2	0	+2	+2			
0, −2	−15,6	−31,0	−46,6	−0,1	−1,5	−1,6
1, −2	+3	+4	+7	+2	+1	+3
0, −3	−0,9	−0,9	−1,8			
2.						
0, −1	+3,8	−4,2	−0,4	+5,9	−4,2	+1,7
1, −1	−108	+86	−22	−108	+79	−29
2, −1	+648	−463	+185	+648	−474	+174
3, −1	+36	−25	+11	+36	−26	+10
1, −2	−10	+6	−4	−9	+6	−3
2, −2	+65	−31	+34	+66	−32	+34
3, −2	+4	−2	+2	+4	−2	+2
0, −3	−3,8	−4,2	−8,0	−5,9	−4,2	−10,1
1, −3	+108	+86	+194	+108	+79	+187
2, −3	−644	−465	−1109	−644	−475	−1119
3, −3	−36	−25	−61	−36	−26	−62
1, −4	+10	+5	+15	+9	+6	+15
2, −4	−63	−33	−96	−63	−34	−97
3, −4	−4	−2	−6	−4	−2	−6

Digitized by Google

3.						
0,1	+0,8	+3,6	+4,4	+0,8	+3,4	+4,2
1,1	−9	−83	−92	−8	−82	−90
2,1	+11	+469	+480	+10	+469	+479
3,1	0	+26	+26	0	+26	+26
1,0	0	−5	−5	0	−4	−4
2,0	−17	+23	+6	−17	+23	+6
0,−1	−0,8	+3,6	+2,8	−0,8	+3,4	+2,6
1,−1	+9	−83	−74	+8	−82	−74
2,−1	−11	+469	+458	−10	+469	+459
3,−1	0	+26	+26	0	+26	+26
4.						
0,1	+61,3	+32,1	+93,4	+61,8	+32,1	+93,9
−1,3	−36	−25	−61	−35	−25	−60
0,3	+652,2	+472,5	+1124,7	+655,1	+474,3	+1129,4
1,3	−36	−41	−77	−36	−41	−77
−1,2	+3	−2	+1	+3	−2	+1
0,2	−62,4	+31,0	−31,4	−62,8	+31,1	−31,7
1,2	+3	−2	+1	+3	−3	0
−1,1	+36	−25	+11	+35	−25	+10
0,1	−655,7	+471,0	−185,7	−658,7	+472,8	−185,9
1,1	+36	−41	−5	+36	−41	−5

301.

Zu den im Vorstehenden ermittelten Producten, die unverändert bleiben, kommen noch die Producte (1) $n\Delta z$, (2) Δv etc., deren genaue Werthe nur durch mehrere aufeinander folgende Näherungen erhalten werden können, weil die genauen Werthe von $n\Delta z$, Δv, etc. nur auf diese Art erhalten werden können. Sehr genäherte Werthe der letztgenannten Functionen kann man zum grossen Theil dadurch erhalten, dass man die Coefficienten von $n\delta z$, v, etc. bezüglich mit $\frac{\partial e'}{e'}$, $2\frac{\partial e'}{e'}$, etc. multiplicirt, je nachdem sie in ihrer algebraischen Zusammensetzung mit e', e'^2, etc. multiplicirt sind. Wo dieses nicht angeht, nemlich bei den Coefficienten, deren erstes Glied von e' unabhängig ist, kann man aus den vorstehenden Producten allein, indem man

$$\frac{d\Delta W_0}{ndt} = (8)\, n'\Delta z' + (9)\, \Delta v'$$

u. s. w. setzt, hinreichend genäherte Werthe für die erste Annäherung erhalten. Zwei Annäherungen reichten aus, um die folgenden Werthe zu erhalten, mit welchen hier eine letzte Annäherung ausgeführt werden soll, um zu zeigen, dass sie den Gleichungen mit hinreichender Genauigkeit Gnüge leisten.

Digitized by Google

g, g'	$n\Delta z$ t sin	Δv t cos	ΔP t sin	ΔQ t cos
1.				
0,0		−108		
1,0	−18	−41	+2	+1
2,0	+17	−10		
−3,−1	−7	−12		
−2,−1	−273	−286	−1	
−1,−1	−18275	−9635	−54	−18
0,−1	−164062	−6448	+12087	−115
1,−1	−27918	+12691	+104	−15
2,−1	−304	+281	+2	−2
3,−1	−7	+11		
−2,−2	+1	−5		
−1,−2	−393	−226	−2	
0,−2	−3660	−263	+296	−22
1,−2	−1071	+458	+7	−3
2,−2	−18	+13		
−1,−3	−7	−6		
0,−3	−71	−2	+8	
1,−3	−16	+7		
2.				
1,0	+1304	−650		
2,0	+27	−23		
−1,−1	+13	+1		
0,−1	−1057	−247	+22	+3
1,−1	+6861	−3455	−18	+24
2,−1	+5709	−3983	+132	−128
3,−1	+332	−285	+6	−6
4,−1	+17	−20		
0,−2	−90	−23		
1,−2	+746	−361	−5	+3
2,−2	+1017	−702	+18	−18
3,−2	+56	−18		
4,−2	+2	−3		
−1,−3	+19	+18		
0,−3	+640	+636	+46	−42
1,−3	−19350	+22023	+252	−234
2,−3	−38589	+26529	−641	+664
3,−3	−1281	+1318	−27	+27
4,−3	−49	+71		
0,−4	+41	+42		
1,−4	−3492	+1488	+23	−21
2,−4	−3847	+2591	−57	+59
3,−4	−143	+136		
4,−4	−5	+8		
4,−5	−166	+67		
2,−5	−246	+163		
3,−5	−9	+8		

Digitized by Google

11.				
2, −2	+19	−8		
3, −2	+10	−5		
1, −3	−4	+4		
2, −3	+89	−32		
3, −3	+150	−75		
4, −3	+58	−30		
5, −3	+6	−4		
2, −4	+17	−6		
3, −4	+39	−19		
4, −4	+17	−9		
1, −5	−9	−6		
2, −5	−665	+255		
3, −5	−1029	+514		
4, −5	−373	+196		
5, −5	−28	+22		
2, −6	−77	+27		
3, −6	−146	+74		
4, −6	−63	+33		
3.				
0,1			+55	−60
1,1			−90	+90
2,1	−32	+22	+202	−202
3,1			+5	−4
1,0	+16	−8	−2	+3
2,0	−2	+1	+8	−8
0, −1			−43	+43
1, −1			−76	+76
2, −1	−30	+24	+247	−253
3, −1			+12	−12
4.				
0,1			+298	−298
−1,3			+84	−83
0,3	+864	−94	+4792	−4823
1,3			−78	+78
−1,2	−1	−1	−1	+1
0,2	−33	+3	−192	+189
1,2	−1	+1		
−1,1			−19	+19
0,1	−514	+20	−2443	+2455
6.				
1,0	−4380	+2172		
1, −1	+26	−11		
1, −2	+140	−67		

Digitized by Google

7.				
3, −2	−31	+13		
2, −3	−1	+1		
3, −3	+1	−1		
3, −4	−19	+21		

Hiezu ist Folgendes zu bemerken. Die Einheit ist wieder die fünfte Decimale der Secunde, und die Einheit der Zeit 100 Julianische Jahre, so dass in der Abtheilung 1. Argument 0.—1 bedeutet.

$$n\Delta z = -1{,}64062\ t \sin(-g')$$

u. s. w. Diese Einheiten sollen im Folgenden beibehalten werden. Die Coefficienten in $n\Delta z$ und Δv, die den Abtheilungen 3, 4, 6, 7 angehören, sind blos so, wie oben beschrieben, berechnet worden, nemlich die von $0g'$ in 3, von $2g'$ in 4, von $-g'$ in 6, und von $-3g'$ in 7 abhängenden durch blose Anwendung der Glieder der Producte (8)$n'\Delta z'$ und (9)$\Delta v'$, und die übrigen durch Multiplication der Coefficienten von $n\delta z$ und v mit $\frac{de'}{e'}$. Zu dem Ende wird mit hinreichender Genauigkeit

$$\frac{de'}{e'} = -\frac{6'',17267}{2e'}\ t$$

wo die Zahl −6″,17267 der Coefficient von $t \sin g$ im Ausdruck von $n'\Delta z'$ des Art. 299 ist. In Theilen des Kreisradius und den hier gewählten Einheiten wird

$$\log \frac{de'}{e'} = 2{,}39665n$$

In Bezug auf diese Coefficienten sollen die vorstehenden Werthe ohne Weiteres beibehalten werden, da sie keinen merklichen Einfluss auf die zu berechnenden Säcularänderungen haben, und nur angesetzt worden sind, um dieses darzuthun.

302.

Es ist nun zuerst wie in den früheren §§ der Werth von $\Delta^{h_0}_{h}$ zu berechnen, der sich aus den vorstehenden Werthen ergiebt. Hiefür wurden die folgenden Producte erhalten.

Digitized by Google

g, g'	(17) $n.\Delta z$ t sin	(18) Δv t sin	(19) ΔP t sin	(20) ΔQ t sin	Summe t sin
1.					
1,0	−21	−10			−31
2,0	−3	−1			−4
−3,−1	+1	+1			+2
−2,−1	+21	+18			+39
−1,−1	+388	+200			+588
0,−1	+276,4	+221,8	−0,3	−0,2	+497,7
1,−1	−8	+5			−3
2,−1	−18	+7			−11
3,−1	−2				−2
−2,−2	+2	+1			+3
−1,−2	+24	+11			+35
0,−2	+23,6	+19,0			+42,6
1,−2	+8	+4			+12
2,−2	+1				+1
0,−3	+1,7	+1,1			+2,8
1,−3	+1				+1
2.					
1,0	−3	−3			−6
2,0	−12	+1			−11
−1,−1		−1			−1
0,−1	+17,3	+16,3			+33,6
1,−1	−121	−118	+1		−238
2,−1	−1380	+27	−5	−1	−1359
3,−1	−267	+81			−186
4,−1	−23	+6			−17
0,−2	+0,7	+1,0			+1,7
1,−2	−11,1	−8,4			−19,5
2,−2	−101,7	+2,5	−0,5	−0,1	−99,8
3,−2	−21,7	+6,7			−15,0
−1,−3	+2	+1			−1
0,−3	−18,4	−13,9			−32,0
1,−3	+24	+70	−1		+93
2,−3	+1338	+84	+5	+2	+1426
3,−3	+331	−97			+234
4,−3	+29	−8			+21
5,−3	+1				+1
0,−4	−1,9	−1,4			−3,3
1,−4	+1	+7			+8
2,−4	+105	+7			+112
3,−4	+32	−10			+22
4,−4	+1				+1
2,−5	+7				+7
3,−5	+1	+5			+6

Digitized by Google

11.					
3, −2	−11				−11
1, −3	−1				−1
2, −3	+11				+11
3, −3	−70	+29			−41
4, −3	−61	+36			−25
5, −3	−9	+5			−4
2, −4	+2				+2
3, −4	−12	+6			−6
4, −4	−13	+11			−2
2, −5	−38	+24			−14
3, −5	+101	−145			+256
4, −5	+360	−232			+128
5, −5	+42	−25			+17
2, −6	−4	+4			0
3, −6	+52	−17			+35
4, −6	+57	−38			+19
5, −6	+7	−4			+3

303.

Im Vorhergehenden sind nun alle Glieder enthalten, deren Summe zufolge der Gleichung (70) des Art. 188 das Differential von $\frac{\Delta^h}{h}$ bildet, in Bezug aber nicht nur auf die jetzt auszuführende Integration, sondern auf alle Integrationen, die in diesem Paragraphen auszuführen sein werden, ist noch ein Glied zu berücksichtigen, welches aus den folgenden Betrachtungen sich ergiebt.

Alle Argumente der Mondstörungen bestehen aus einem constanten Gliede und Gliedern, die mit den ganzen und positiven Potenzen der Zeit multiplicirt sind, und von welchen bei der Berechnung der Störungscoefficienten selbst, bei den Integrationen nur das mit der Zeit selbst multiplicirte Glied berücksichtigt worden ist. Das mit dem Quadrate der Zeit multiplicirte ist jedoch nicht in allen Fällen unmerklich, giebt aber im Integrale ein Glied von derselben Form, wie die hier in Rechnung stehenden, und muss daher diesen einverleibt werden. Von den bei der Berechnung der Störungscoefficienten vorkommenden Integralen hebe ich irgend ein Glied aus und bezeichne es mit

$$F \cos (n\beta t + n_\beta' t^2 + k)$$

wo β irgend einen der im Art. 104 erklärten Integrationsdivisoren bezeichnet, β' Function der Säcularänderungen der mittleren Anomalie des Mondes, des Perigäums und der Knoten, k hingegen constant ist.

Digitized by Google

Das Differential, aus welchem dieses Glied entstanden ist, hat nun folgendes Glied

$$-n\beta F \sin (n\beta t + n\beta' t^2 + k)\, dt$$

weil bei der Integration auf β' keine Rücksicht genommen worden ist. Das correspondirende Glied in den in diesem § vorkommenden Differentialen sei

$$nGt \sin (n\beta t + n\beta' t^2 + k)\, dt$$

dann ist klar, dass im Ganzen das Glied

$$-n(\beta F - Gt) \sin (n\beta t + n\beta' t^2 + k)\, dt$$

zu integriren ist. Sei nun

$$-n\int(\beta F - Gt) \sin (n\beta t + n\beta' t^2 + k)\, dt = \left(F - \frac{G}{\beta} t\right) \cos (n\beta t + n\beta' t^2 + k) + x$$

dann giebt die Rückdifferentiation, wenn man das Product $G\beta'$, welches immer unmerklich ist, übergeht,

$$dx = 2\beta' Ft \sin (n\beta t + n\beta t^2 + k)\, ndt + \frac{G}{\beta} \cos (n\beta t + n\beta' t^2 + k)\, dt$$

und hieraus bekommt man, wenn auch β'^2 übergangen wird, welches von derselben Ordnung ist wie $G\beta'$,

$$x = -2\frac{\beta'}{\beta} Ft \cos (n\beta t + n\beta' t^2 + k) + \frac{G + 2\beta' F}{n\beta^2} \sin (n\beta t + n\beta' t^2 + k)$$

Nimmt man dahingegen an, dass die früheren Integrale Sinusse statt der Cosinusse enthalten, und heben wir aus einem derselben das Glied

$$F \sin (n\beta t + n\beta' t^2 + k)$$

heraus, dann ist in den Differentialen, die hier vorkommen,

$$nGt \cos (n\beta t + n\beta' t^2 + k)\, dt$$

das correspondirende Glied, und es ist im Ganzen der Ausdruck

$$n(\beta F + Gt) \cos (n\beta t + n\beta' t^2 + k)\, dt$$

zu integriren. Sei jetzt

$$n\int(\beta F + Gt) \cos (n\beta t + n\beta' t^2 + k)\, dt = \left(F + \frac{G}{\beta} t\right) \sin (n\beta t + n\beta' t^2 + k) + x$$

dann giebt die Rückdifferentiation

$$dx = -2n\beta' Ft \cos (n\beta t + n\beta' t^2 + k)\, dt - \frac{G}{\beta} \sin (n\beta t + n\beta' t^2 + k)\, dt$$

und hiemit wird

$$x = -2\frac{\beta'}{\beta} Ft \sin (n\beta t + n\beta' t^2 + k) + \frac{G - 2\beta' F}{n\beta^2} \cos (n\beta t + n\beta' t^2 + k)$$

Digitized by Google

womit diese beiden Integrale gegeben sind, da man nur den bez. Werth von x zu substituiren braucht. In der Anwendung ist es indess am Einfachsten, die Correctionsglieder an den Differentialen anzubringen, und es folgt aus dem Vorstehenden, dass,

»wenn das Differential mit Sinussen multiplicirt ist, man darin nur

$$G + 2\beta' F \text{ statt } G$$

»und wenn es mit Cosinussen multiplicirt ist, man darin nur

$$G - 2\beta' F \text{ statt } G$$

»zu setzen braucht, um die hier betrachteten Glieder durch das »gewöhnliche Integrationsverfahren vollständig zu erhalten.«

304.

Machen wir nun von der Entwickelung des vor. Art. zuerst Anwendung auf den Ausdruck, welcher durch die Integration $\Delta\frac{h_0}{h}$ giebt, so zeigt sich leicht, dass hier nur durch die in Rede stehenden Glieder in den Coefficienten der Argumente $0,-2$; $1,-2$; $2,-2$; $3,-2$ der Abtheilung 2 etwas Merkliches hervor gehen kann. Um für diese die mit β' bezeichneten Grössen zu berechnen, müssen die Säcularänderungen angewandt werden, da β' von diesen abhängt. Ich werde von diesen die folgenden Werthe anwenden, die die nächst vorhergehende Näherung mir gegeben hat, nemlich

$$\begin{aligned} g &= +\ 51''{,}15\, t \\ g' &= -\ 0{,}56\, t \\ \omega &= -\ 45{,}21\, t \\ \omega' &= -\ 6{,}05\, t \end{aligned}$$

und hiemit ergiebt sich für die Argumente

$$\begin{aligned} 0,-2, \text{ in } 2. \ldots . \; n\beta' &= -77''{,}20 \\ 1,-2, \ldots \ldots \; &= -26{,}05 \\ 2,-2, \ldots \ldots \; &= +25{,}10 \\ 3,-2, \ldots \ldots \; &= +76{,}25 \end{aligned}$$

Aus dem Art. 69 erhält man für dieselben Argumente

$$\begin{aligned} F &= -\ 93''{,}4 \\ &= -\ 329{,}1 \\ &= +\ 920{,}7 \\ &= +\ 33{,}1 \end{aligned}$$

Digitized by Google

und hiemit wird in den hier angenommenen Einheiten, da für diese $\log n = 4{,}2350$ ist,

$$\begin{aligned} 2\beta' F &= +0{,}8 \\ &= +1{,}0 \\ &= +2{,}7 \\ &= +0{,}3 \end{aligned}$$

Da hier das Differential mit Sinussen multiplicirt ist, so müssen diese Werthe zu G addirt werden. Zufolge der Artt. 300 und 302 ist für dieselben Argumente

$$(21)n'\Delta z' + (22)\Delta\nu' = -2{,}8 = +83{,}9 = -696{,}5 = -46{,}3$$
$$(17)n\Delta z + (18)\Delta\nu + (19)\Delta P + (20)\Delta Q = +1{,}7 = -19{,}5 = -\ 99{,}8 = -15{,}0$$
$$\text{folglich } G = -1{,}1 = +64{,}4 = -796{,}3 = -61{,}3$$
$$\text{und } \frac{d\Delta\frac{h_0}{h}}{ndt} = -0{,}3 = +65{,}4 = -793{,}6 = -61{,}0$$

305.

Führt man nun die Integration auf die gewöhnliche Art, nemlich durch Anwendung der Integrationsdivisoren β aus, und lässt dabei die Glieder, die kein t ausserhalb des Cosinuszeichens haben, weg, die später nur in dem Element Ξ Wirkung äussern können, und daher zufolge der Annahme $\Xi = 0$ in Bezug auf die Säcularänderung der mittleren Länge hier wirkungslos bleiben, so bekommt man

g, g'	$\Delta\frac{h_0}{h}$ $t\cos$	g, g'	$\Delta\frac{h_0}{h}$ $t\cos$
1.		1.	
1,0	+48	0,−3	+4
2,0	+3	1,−3	+3
−3,−1	+1	2.	
−2,−1	+14		
−1,−1	+467	1,0	+4
0,−1	+1095	−1,−1	−2
1,−1	+899	0,−1	−33
2,−1	+38	1,−1	−373
3,−1	+2	2,−1	+2546
−2,−2	+1	3,−1	+130
−1,−2	+26	4,−1	+7
0,−2	+78	0,−2	−2
1,−2	+60	1,−2	−75,5
2,−2	+2	2,−2	+425,2
		3,−2	+21,3

Digitized by Google

2.		11.	
−1, −3	−2	3, −2	+2
0, −3	+767	2, −3	−7
1, −3	+5145	3, −3	+30
2, −3	−14825	4, −3	+11
3, −3	−581	5, −3	+1
4, −3	−26	2, −4	−1
5, −3	−1	3, −4	+7
0, −4	+38	4, −4	+1
1, −4	+456	2, −5	+18
2, −4	−1311	3, −5	−209
3, −4	−54	4, −5	−64
4, −4	−2	5, −5	−6
1, −5	+28	2, −6	+1
2, −5	−75	3, −6	−28
3, −5	−3	4, −6	−10

306.

Wenden wir uns nun zu der Berechnung von ΔP und ΔQ, so bekommen wir zuerst durch Hülfe der im Vorhergehenden enthaltenen Data die folgenden Producte.

g, g'	(38) $n\Delta z$ t cos	(39) $\Delta \nu$ t cos	(40) $\Delta \frac{h_0}{h}$ t cos	(41) $\Delta \alpha$ t cos	(42) ΔP t cos	(43) ΔQ t cos	Summe t cos
1.							
0, 0	+0,487	+0,106	+0 096		+0,186	+0,255	+1,130
1, 0	+1						+1
−1, −1	+14	+1	−1		−2		+12
0, −1	+10,4	+2,5	+1,9		+4,6	+7,0	+26,4
1, −1	+1	+6				−1	+6
0, −2	+1,2	+0,3	+0,2		+0,1	+0,3	+2,1
2.							
0, −1	−0,6	−0,7			+0,3	+0,1	−0,9
1, −1	0	+2			−3	+1	0
2, −1	+60	−4	−1		+20	−5	+70
3, −1	+12	−3			+1		+10
1, −2	+1						+1
2, −2	+4				+2		+6
0, −3	−1,0	−0,2	−0,2		−0,2	+0,1	−1,5
1, −3	−3	+12	−2		+2	−2	+7
2, −3	−57	+15	+5		−15	+10	−42
3, −3	−14	+5					−9
2, −4	−5	+2			−2		−5

Digitized by Google

3.							
0,4	+0,6	+0,7			+0,4	−0,4	+1,3
1,4	−5	−4			−2	+2	−9
2,4	−59	+3			+15	−10	−51
3,4	−12	+4				−1	−9
2,0	−1				−2	−2	−5
0,−1	−0,5	−0,3	+0,1		−0,3	+0,1	−0,9
1,−1	+2	−4	+1		+3	−1	+1
2,−1	+59	−5	−3		−19	+5	+37
3,−1	+15	−4			−1		+10
1.							
0,4	−1,3	−0,7	−0,2		+2,1	−0,7	−0,8
−1,3	−1	−3			−1	+1	−4
0,3	−10,9	−5,9	−2,7		+24,1	−1,7	+2,9
1,3	−15	−4	+1		−2	+1	−19
0,2	+0,3	+0,3		+0,4	−1,7	−0,2	−0,9
−1,1	+2	−5			+1	−1	−3
0,1	+0,5	+3,4	+0,7		−24,8	−0,3	−20,5
1,1	−1	−4			+2	−1	−4

Hier ist durch * in der Columne (41) Δa angedeutet, dass der hieher gehörige Coefficient erst weiter unten bestimmt werden wird.

g, g'	(46) $n\Delta z$ t sin	(47) Δv t sin	(48) $\Delta \frac{h_0}{h}$ t sin	(49) Δa t sin	(50) ΔP t sin	(51) ΔQ t sin	Summe t sin
1.							
1,0	−1						−1
−1,−1	−17	−8	+1		−3		−27
0,−1	−11,5	−9,5	−3,4		+15,5	+13,2	+4,3
1,−1	0	+1			+3	−1	+3
0,−2	−1,1	−0,9	−0,2		−0,5	+0,7	−2,0
2.							
0,−1	−0,2	−0,7			−0,4	−0,1	−1,4
1,−1	+5	+5			−4	+1	+7
2,−1	+60	−1			+20	−5	+74
3,−1	+12	−4			+1		+9
1,−2	+1						+1
2,−2	+5				+2		+7
0,−3	+1,1	+0,7			+0,6	+0,2	+2,6
1,−3	−1	−4			+3	−2	−4
2,−3	−58	−3			−15	+10	−66
3,−3	−15	+5			−1	+1	−10
2,−4	−5				−2		−7

Digitized by Google

3.							
0,1	+0,6	+0,7			+0,3	−0,1	+1,5
1,1	−5	−4			−2	+2	−9
2,1	−60	+1			+15	−10	−54
3,1	−12					−1	−13
2,0	−1				−2	−1	−4
0,−1	−0,5	−0,3	+0,1		−0,3	+0,1	−0,9
1,−1	+2	−8	+1		+3	−1	−3
2,−1	+59	−6	−3		−19	+4	+35
3,−1	+15	−4			−1		+10
4.							
0,1	−1,3	+0,2	−0,2		+1,6		+0,3
−1,3	−2	+2					0
0,3	−10,9	−5,8	−2,7		+24,2	−1,0	+3,8
1,3	−15	−13	+1		−1		−28
0,2	+0,3	+0,2		+0,1	−1,9		−1,0
−1,1	+2				+1		+3
0,1	+0,5	+3,1	+0,7		−26,0	+0,9	−20,5
1,1	−1	−1			+2		−3

307.

Bildet man aus den Summen der Angaben der beiden Tafeln des vor. Art. und aus (44) $n'\Delta z' + (45)\Delta\nu$, sowie aus (52) $n'\Delta z' + (53)\Delta\nu'$, die im Art. 300 gegeben sind, die Summen, so bekommt man zufolge der Gleichungen (76) und (77) des Art. 192 die Ausdrücke der Differentiale von ΔP und ΔQ. Bevor zur Integration dieser geschritten werden kann, ist noch Einiges zu bemerken. Zuerst ist der Werth von $\Delta\alpha$ zu bestimmen. In der ersten Tafel des vor. Art. ist das der Zeit proportionale Glied gefunden worden *)

$$= + \ 1{,}130\, t$$

und Art. 300 dasselbe $$= - \ 15{,}410\, t$$

$$\text{Sa.} = - \ 14{,}280\, t$$

im Differential von ΔP ist folglich das der Zeit proportionale Glied

$$(41)\, \Delta\alpha - 14{,}280\, t$$

wenn von (41) nur das constante Glied aufgenommen wird. Zufolge

*) Ich bemerke, dass zur Erlangung von grösserer Genauigkeit dieses Glied aus den Resultaten der gegenwärtigen Annäherung berechnet worden ist, und werde die Einzelnheiten davon weiter unten anführen.

Digitized by Google

des Art. 214 ist dieses Glied $= -18556''{,}6$, und da die Summe dieser Glieder gleich Null sein muss, so ergiebt sich die Gleichung

$$0 = -18556''{,}6\,\Delta\alpha - 14{,}280\,t$$

woraus in Theilen des Kreisradius, und wenn auch hier die fünfte Decimale als Einheit angenommen wird,

$$\Delta\alpha = -0{,}00076952\,t$$

folgt. Hiemit sind nun die übrigen Glieder von (41) und (49) multiplicirt, und die Producte den beiden Tafeln einverleibt worden. Es entstand nur bei dem Argument 0,2 in 4. etwas Merkliches.

Wie aus $\Delta\alpha$ die Säcularänderung der Knoten erhalten wird, soll erst weiter unten gezeigt werden.

Ferner ist vor der Integration auch der im Art. 304 erklärte Umstand zu berücksichtigen, und dieser hat auch nur auf das Argument 0,2 in 4. einige Wirkung. Für dieses wird durch die Zahlenwerthe des Art. 304

$$n\beta' = -13''{,}22$$

und aus dem Art. 109 ergiebt sich für ΔP

$$F = -484''{,}2$$

und für ΔQ

$$F = +485''{,}9$$

Es wird demzufolge für ΔP

$$-2\beta' F = -0{,}7$$

und für ΔQ

$$+2\beta F = -0{,}7$$

308.

Addirt man nun und führt die Integration eben so wie im Art. 305 aus, so bekommt man

g, g'	ΔP t sin	Diff.	ΔQ t cos	Diff.
4.				
1,0	+2	0	+1	0
−2,−1	−1	0	0	0
−1,−1	−51	−3	−20	+2
0,−1	+12154	−67	−111	−4
1,−1	+103	+1	−44	−1
2,−1	+2	0	−2	0

Digitized by Google

1.				
−1, −2	−2	0	0	0
0, −2	+295	+1	−24	+2
1, −2	+8	−1	−4	+1
0, −3	+8	0	0	0
2.				
0, −1	+22	0	+5	−2
1, −1	−23	+5	+23	+1
2, −1	+132	0	−128	0
3, −1	+7	−1	−6	0
1, −2	−5	0	+2	+1
2, −2	+22	−1	−22	+1
3, −2	+1	−1	−1	+1
0, −3	+45	+1	−36	−6
1, −3	+254	−2	−232	+1
2, −3	−643	+2	+662	+2
3, −3	−25	−2	+26	+1
1, −4	+21	+2	−21	0
2, −4	−58	+1	+64	−2
3, −4	−2	+2	+2	−2
3.				
0,1	+57	−2	−57	−3
1,1	−92	+2	+90	0
2,1	+204	−2	−202	0
3,1	+5	0	−4	0
1,0	−5	+3	+1	−1
2,0	0	+8	0	+8
0,1	−38	−5	+34	+9
1,1	−77	+1	+81	−5
2,1	+254	−7	−254	+1
3,1	+12	0	−12	0
4.				
0,1	+299	−1	−304	+6
−1,3	+85	−1	−78	−5
0,3	+4811	−19	−4834	+11
1,3	−78	0	+85	−7
−1,2	−1	0	+1	0
0,2	−208	+16	+210	−21
1,2	+1	—	0	—
−1,1	−9	−10	+14	+5
0,1	−2453	+10	+2470	−15
1,1	−8	—	+7	—

Die in den mit »Diff.« überschriebenen Columnen befindlichen Angaben geben die Unterschiede dieser Resultate von den der Rechnung zu

Digitized by Google

Grunde gelegten und im Art. 301 angeführten Werthen von ΔP und ΔQ, und sind alle befriedigend.

309.

Es ist jetzt der Werth von ΔbK durch die Gleichung (78) des Art. 193 zu bestimmen, allein es zeigt sich, dass nichts Merkliches herauskommt. Diese Gleichung ist also nur zur Bestimmung von $\Delta\eta$ anzuwenden, und hiefür giebt sie

$$0 = \Delta\eta + (54)\Delta\alpha + (55)\Delta P + (56)\Delta Q$$

wenn von dem Coefficienten (54) nur das constante Glied, und von den Producten (55)ΔP und (56)ΔQ nur die der Zeit proportionalen Glieder angewandt werden. Letztere erweisen sich als unmerklich, und da zufolge des Art. 216 das constante Glied in (54) $= -418''{,}3$ ist, so ergiebt sich die Gleichung

$$0 = \Delta\eta - 418''{,}3\,\Delta\alpha$$

Substituirt man hierin den im Art. 307 erhaltenen Werth von $\Delta\alpha$, so bekommt man

$$\Delta\eta = -\,0{,}000001561$$

wo die Einheiten dieselben sind wie in $\Delta\alpha$.

310.

Es kommen nun die Producte an die Reihe, deren Summe das Differential von ΔW_0 bilden. Diese ergeben sich wie folgt.

Erster Theil.

γ, g, g'	(1) $n\Delta z$ t sin	(2) Δv t sin	(3) $\Delta\frac{he}{h}$ t sin	(4) $\frac{d.\Delta v}{ndt}$ t sin	Summe t sin
1.					
−1,1,0	+3,23	+7,17	−0,52	−0,37	+9,51
0,1,0	+63	+30	−2		+91
−1,2,0	−33	−10	+1		−42
1,0,0	−31,688	−18,940	+0,478	+0,111	−50,039
0,2,0	+12	+2	−1		+13
	−5	−1			−6
	−3	−2			−5
0,−3,−1	−9	−4	+2		−11
	+2	+1			+3
	+6	+3	−1		+8

Digitized by Google

1.					
0, −2, −1	−108	−67	+19	−7	−163
	+32	+34	−9	−2	+55
	+59	+25	−11	+7	+80
0, −1, −1	−1169	−610	+65	+1	−1713
	+559,8	+447,0	−30,6	+87,9	+1064,1
	+510	+154	−39	+89	+714
0, 0, −1	−850,4	−701,3	−306,3	−15,8	−1873,8
	+1,7	+475,5	+172,7	−4,8	+645,1
	−64,0	+222,5	+135,4	+2,7	+296,6
0, 1, −1	+28	−52	+22	+1	−1
	−102	−62	+8	+96	−60
	−71,0	+110,1	−29,5	+104,4	+114,0
0, 2, −1	+60	−15	−1	−8	+36
	−37	+1		+8	−28
	−17	+15		−3	−5
0, 3, −1	+8				+8
	−6				−6
	−2				−2
0, −2, −2	−8	−2	−1		−11
	+2	+2			+4
	+5	+1			+6
0, −1, −2	−73	−36	+5		−104
	+35,9	+23,8	−2,5	+2,3	+59,5
	+32	+13	−2	+2	+45
0, 0, −2	−73,7	−57,8	−23,1	−0,5	−155,1
	+16,4	+39,1	+13,0	−0,1	+68,4
	+13,5	+19,0	+9,9	+0,4	+42,8
0, 1, −2	−28	−17	+2		−43
	+8	+4		+3	+15
	+9,6	+14,2	−2,1	+3,5	+25,2
0, 2, −2	0				0
	−1				−1
	0				0
0, −1, −3	−4	−2			−6
	+1,9	+0,9	−0,2		+2,6
	+1	+1			+2
0, 0, −3	−4,7	−3,3	−1,0		−9,0
	+1,6	+2,4	+0,5		+4,5
	+1,8	+1,1	+0,5		+3,4
0, 1, −3	−2	−1			−3
	+1				+1
	+0,7	+0,6	−0,1		+1,2
2.					
0, 1, 0	+13	+10	−1		+22
	+1			−6	−5
	−4,62	−9,94	+0,25	−5,69	−20,00
0, 2, 0	+46	−4	−1		+41
	−20	+1	+1		−18
	−27	+3	+1		−23

Digitized by Google

2.					
0,3,0	+9	−3			+6
	−4	+1			−3
	−4	+2			−2
0,−1,−1	0	−1			−1
	−0,1	−1,1	+0,1		−1,1
	0				0
0,0,−1	−24,4	−28,7	+0,9	+2,4	−49,8
	+26,3	+16,6	−0,9	+1,3	+43,3
	−2,5	+14,1	+0,4	+0,3	+12,3
0,1,−1	+540	+351	−7	+5	+889
	−114	−101	−3	−23	−241
	−326,2	−250,3	+10,6	−29,5	−595,4
0,2,−1	+1202	−86	−19	+1	+1098
	−2070	+42	+54	−68	−2042
	−2071	+49	−35	−63	−2120
0,3,−1	+973	−249	−12	+5	+717
	−531	+87	+8	−9	−445
	−379	+162	+4	−2	−215
0,4,−1	+114	−28	−1		+85
	−69	+11		−1	−59
	−31	+12		−1	−20
0,5,−1	+11	−1			+10
	−8	+1			−7
	−2				−2
0,0,−2	+0,2	−1,2		+0,2	−0,8
	+1,5	+1,0	+0,6	+0,2	+3,3
	−1,3	+0,6	−0,6	−0,1	−1,4
0,1,−2	+14,8	+24,7	−1,0	+0,8	+69,3
	−14,7	−5,2	−0,8	−2,1	−22,8
	−27,33	−18,64	+1,59	−2,49	−46,87
0,2,−2	+313,5	−9,3	−1,1	+0,2	+303,3
	−161,8	+8,2	+8,3	−12,0	−157,3
	−147,2	+1,5	−6,3	−10,2	−162,2
0,3,−2	+78,5	−21,2	−1,8	+0,8	+56,3
	−45,8	+8,0	+1,6	−1,6	−37,8
	−28,7	+12,7	+0,3	−0,2	−15,9
0,4,−2	+9	−1			+8
	−5	+1			−4
	−2				−2
0,−1,−3	+5	+2			+7
	−0,6	−0,1	−0,2	−0,1	−1,0
	−4				−4
0,0,−3	+49,5	+18,2	+4,8	−13,1	+59,4
	−15,7	−18,8	+11,3	−12,0	−35,2
	−24,9	−3,8	−16,1	+2,4	−42,4
0,1,−3	−226	−234	−24	−31	−515
	−151	−56	+98	+116	+7
	+51,1	+286,0	−74,8	+159,1	+421,4

2.					
0,2,−3	−4054	−222	−21	−9	−4306
	+1877	−74	−243	+407	+1967
	+1938	+297	+263	+393	+2891
0,3,−3	−1157	+297	−4	−33	−897
	+609	−109	−9	+42	+533
	+485	−188	+15	−2	+310
0,4,−3	−137	+32	−2	−4	−111
	+82	−14	+1	+3	+72
	+40	−15		−1	+25
0,5,−3	−13	+2			−11
	+9	−1			+8
	+3				+3
0,0,−4	+1,5	+2,0	+0,3	−0,7	+6,1
	−1,1	−1,4	+0,6	−0,8	−2,7
	−2,9	−0,8	−0,9	+0,1	−4,5
0,1,−4	−18	−20		−3	−41
	−13	−1	+8	+6	0
	+2,1	+19,7	−6,9	+9,8	+24,7
0,2,−4	−338	−21	−2	−1	−362
	+155	−5	−20	+39	+169
	+155	+25	+24	+36	+240
0,3,−4	−108	+29	−2	−3	−84
	+59	−12	−1	+4	+50
	+46	−18	+2		+30
0,4,−4	−14	+3			−11
	+9	−1			+8
	+4	−1			+3
0,1,−5	−1	+1			0
	+1		+1		+2
	+1	−1	−1	+1	0
0,2,−5	−19				−19
	+9	−1	−1	+2	+9
	+8	+1	+1	+2	+12
0,3,−5	−5	−1			−6
	+3				+3
	+1				+1
11.					
0,2,−2	−1	+2			+1
	+2	−1			+1
	0	−1			−1
0,3,−2	+32	−15			+17
	−15	+6			−9
	−15	+10			−5
0,4,−2	+3				+3
	−1				−1
	0	−1			−1
0,2,−3	−25	+10	−1		−16
	+18	−5			+13
	+11	−4			+7

Digitized by Google

11.					
0,3,−3	+220	−78	+11		+153
	−129	+24	−6	−3	−114
	−95	+53	−5	−2	−49
0,4,−3	+183	−112	−13		+28
	−108	+40	+22	−1	−47
	−78	+71	+22	−1	+14
0,5,−3	+32	−16	−6		+10
	−21	+7	+3		−11
	−9	+8	+2		+1
0,2,−4	−5		−1		−6
	+3				+3
	+2	−1			+1
0,3,−4	+51	−18	+2		+35
	−27	+6	−2		−23
	−21	+13	−1		−9
0,4,−4	+52	−34	−10		+8
	−30	+11	+6		−13
	−24	+20	+5		+1
0,5,−4	+6	−3			+3
	−4	+1			−3
	−2	+1			−1
0,2,−5	+63	−48	−1	−1	+13
	−74	+22		+5	−47
	−11	+28	+3	+2	+22
0,3,−5	−1244	+478	−119		−885
	+604	−152	+58	+17	+527
	+620	−323	+60	+7	+364
0,4,−5	−1135	+714	+241	−1	−181
	+589	−247	−120	+8	+230
	+528	−460	−121	+3	−53
0,5,−5	−172	+92	+34		−46
	+104	−38	−19	+1	+48
	+55	−41	−12	+1	+3
0,2,−6	+7	−5	+1		+3
	−9	+4	−1		−6
	0	+2			+2
0,3,−6	−166	+61	−18		−123
	+81	−20	+10	+2	+73
	+82	−41	+9	+2	+52
0,4,−6	−180	+112	+39		−29
	+92	−38	−19	+1	+36
	+83	−73	−19	+1	−8
0,5,−6	−28	+14	+6		−8
	+17	−6	−2		+9
	+9	−6	−1		+2

Digitized by Google

Zweiter Theil.

γ, g, g'	(5) Δy $t \sin$	(6) ΔP $t \sin$	(7) ΔQ $t \sin$	Summe $t \sin$
1.				
−1,1,0	+5,08	−0,08	−0,11	+4,89
0,1,0				
−1,2,0				
1,0,0	*	−0,018	−0,026	−0,044
0,−1,−1	0			0
	+0,4	+0,2	+0,5	+1,1
	0			0
0,0,−1	−0,1	+1,6	+0,9	+2,4
	+0,1	−2,1	−1,9	−3,9
	−0,1	+0,4	+0,4	+0,7
0,1,−1	0			0
	0			0
	+0,4	−0,5	−0,2	−0,3
2.				
0,1,−1	0	−1		−1
	0	+1		+1
	−0,1	+1,4	+0,3	+1,6
0,2,−1		+16	+3	+19
		−5	−1	−6
		−16	−3	−19
0,3,−1		+1		+1
		0		0
		0		0
0,0,−2	−1,3			−1,3
	−0,1			−0,1
	0,0			0,0
0,1,−2	−2,2	−0,1		−2,3
	+0,9			+0,9
	+15,72	+0,09	+0,02	+15,83
0,2,−2	−0,1	+1,2	+0,1	+1,2
	−2,7	−0,5	−0,1	−3,3
	+27,1	−1,2	−0,1	+26,1
0,3,−2	+0,2	+0,1		+0,3
	−0,2			−0,2
	+0,2			+0,2
0,1,−3	0	+1		+1
	0	−1		−1
	+0,6	−1,7	−0,5	−1,6
0,2,−3	0	−18	−5	−23
	0	+6	+2	+8
	+2	+18	+5	+25
0,3,−3		−1		−1
		0		0
		0		0

Digitized by Google

311.

Bildet man nun sowohl aus den Summen der beiden Tafeln des vor. Art., wie aus der Summe von (8) $n'\Delta z'$ und (9) $\Delta y'$ des Art. 300 die Summe, so erhält man die Glieder, die zufolge der Gleichung (67) des Art. 186 das Differential von ΔW_0 bilden. Vor der Ausführung der Integration ist aber auch hier der im Art. 303 erklärte Umstand zu berücksichtigen. Aus den Zahlenwerthen des Art. 304 findet man jetzt die folgenden Werthe

für $\frac{d\Delta W_0}{ndt}$

γ, g, g'	$n\beta'$	F	$2\beta' F$
1.			
−1,1,0	+51″,15	−1123″,0	−6,69
0,1,0	+51,15	+269,6	+2
−1,1,−1	+51,71	−31,6	−0,2
1,−1,−1	−50,59	−24,6	+0,1
2.			
0,1,−2	−26,05	+491,4	−1,5
−1,2,−2	+25,10	−156,3	−0,5
1,0,−2	−77.20	+3491,1	−31,37
0,2,−2	+25,10	−2775,0	−8,1
−1,3,−2	+76,25	+595,6	+5,3
1,1,−2	−26,05	+6069,0	−18,4
0,3,−2	+76,25	−149,8	−1,3
−1,4,−2	+127,40	+48,9	+0,7
1,2,−2	+25,10	+103,6	+0,3
1,0,−3	−76,64	+128,1	−1,1
0,2,−3	+25,66	−179,7	−1
−1,3,−3	+76,81	+38,9	0
1,1,−3	−25,49	+402,1	−1

Die hier angeführten Werthe von F sind aus dem Art. 106 genommen, und da das Differential mit Sinussen multiplicirt ist, so muss $2\beta' F$ addirt werden.

Ferner ist vor der Integration Δy zu bestimmen, und dieses geschieht auf ähnliche Art, wie oben Δa bestimmt wurde. Die beiden Tafeln des vor. Art. geben für den Coefficienten von 1,0,0 in 1, das ist $t \sin \gamma$,

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{rl} -50{,}039 & \text{erster Theil} \\ -0{,}044 & \text{zweiter Theil} \end{array}\right\} {}^{*)}$$

$$\text{Art. 300} \ldots \quad -50{,}476 = (8)\, n' \Delta z' + (9)\, \Delta \nu'$$

$$\text{Sa.} = -100{,}559$$

folglich ist das ganze Glied im Differential von ΔW_0

$$\{(5)\, \Delta y - 100{,}559\, t\} \sin \gamma$$

Da dieses Glied Null werden muss, und zufolge des Art. 201 der Coefficient von $\sin \gamma$ in (5) $= -22374'',8$ ist, so ergiebt sich die Gleichung

$$0 = -22374'',8\, \Delta y - 100{,}559\, t$$

woraus in Theilen des Kreisradius, und wenn fortwährend die fünfte Decimale als Einheit angenommen wird,

$$\Delta y = -0{,}0044942\, t$$

folgt. Mit diesem Werthe von Δy sind hierauf die Coefficienten des Products (5) Δy der letzten Tafel des vor. Art. berechnet worden.

312.

Es sind nun für alle übrigen Coefficienten von der Summe der Producte (8) $n' \Delta z'$ und (9) $\Delta \nu$, der Summe der beiden Tafeln des vorvor. Art. und den Werthen von $2\beta' F$ des vor. Art. die Summen zu bilden, und die Integration auszuführen. Bei dieser ist in den Gliedern, deren Summe das constante Glied in $\overline{\Delta W_0}$ bilden, auf die von t ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen unabhängigen Glieder Rücksicht zu nehmen, während dieses bei allen andern Gliedern nicht nöthig ist, da sie in der Annahme $\Xi = 0$ bezüglich der Säcularänderung dazu nichts beitragen können. Somit fand sich

---

*) Auch hier sind, gleichwie im Differential von ΔP, zur Erlangung grösserer Genauigkeit nicht nur diese Zahlenwerthe, sondern auch die zum Argument $-1, 1, 0$ in 1. gehörigen aus den Resultaten der gegenwärtigen Annäherung berechnet worden.

Digitized by Google

γ, g, g'	ΔW_0 $\frac{1}{n}\sin$	$\left(\frac{d\Delta W_0}{dy}\right)$ $\frac{1}{n}\cos$	$\left(\frac{d^2\Delta W_0}{dy^2}\right)$	$\left(\frac{d^3\Delta W_0}{dy^3}\right)$
1.				
−1,1,0	−222,4	+222,4		
−2,2,0	−0,5	+1,0		
		+223,4		
	$t\cos$	$t\sin$	$t\cos$	$t\sin$
1.				
−1,1,0	+222,35	+224,4	−222	
−2,2,0	+0,96	+1,9	−4	
	+223,31		−226	
0,1,0	−163			
−1,2,0	+35	+35	−35	−35
1,0,0	0			
2,−1,0	+6	−12	−24	+48
	−122	+23	−59	+13
0,2,0	−9			
−1,3,0	+3	+3	−3	
1,1,0	+8	−8	−8	
	+2	−5	−11	
0,−3,−1	−3			
−1,−2,−1	+1	+1	−1	−1
−2,−1,−1	+1	+2	−4	−8
−3,0,−1	+23	+69	−207	−621
1,−1,−1	+1	−1	−1	+1
	+23	+71	−213	−629
0,−2,−1	−69			
−1,−1,−1	+40	+40	−40	−40
−2,0,−1	+556	+1112	−2224	−4448
−3,1,−1	+9	+27	−81	−243
1,−3,−1	+22	−22	−22	+22
	+558	+1157	−2367	−4709
0,−1,−1	−1878			
−1,0,−1	+20334	+20334	−20334	−20334
−2,1,−1	+216	+432	−864	−1728
−3,2,−1	+1	+3	−9	−27
1,−2,−1	+371	−371	−371	+371
2,−3,−1	+1	−2	−4	+8
	+19045	+20396	−21582	−21710
0,0,−1	−2949,4			
−1,1,−1	+7873,1	+7873,1	−7873	−7873
−2,2,−1	+19,7	+39,4	−79	−158
−3,3,−1	+0,1	+0,3	−1	−3
1,−1,−1	+6138,8	−6138,8	−6139	+6139
2,−2,−1	+10,2	−20,4	−41	+82
	+11092,5	+1753,6	−14133	−1843

Digitized by Google

1.				
0,1,−1	−3343			
−1,2,−1	+719	+749	−719	−749
−2,3,−1	+2	+4	−8	−16
1,0,−1	−24241	+24241	+24241	−24241
2,−1,−1	+168	−336	−672	+1344
	−26695	+24628	+22842	−23632
0,2,−1	−160			
−1,3,−1	+61	+61	−61	−61
1,1,−1	+88	−88	−88	+88
2,0,−1	−665	+1330	+2660	−5320
3,−1,−1	+7	−21	−63	+189
	−669	+1282	+2448	−5404
0,3,−1	−11			
−1,4,−1	+5	+5	−5	−5
1,2,−1	+4	−4	−4	+4
2,1,−1	+2	−4	−8	+16
3,0,−1	−27	+81	+243	−729
	−27	+78	+226	−714
0,−2,−2	−5			
−1,−1,−2	+2	+2	−2	−2
−2,0,−2	+15	+30	−60	−120
1,−3,−2	+2	−2	−2	+2
	+14	+30	−64	−120
0,−1,−2	−106			
−1,0,−2	+556	+556	−556	−556
−2,1,−2	+12	+24	−48	−96
1,−2,−2	+23	−23	−23	+23
	+485	+557	−627	−629
0,0,−2	−221,1			
−1,1,−2	+425,0	+425,0	−425	−425
−2,2,−2	+1,3	+2,6	−5	−10
1,−1,−2	+286,2	−286,2	−286	+286
2,−2,−2	+0,6	−1,2	−2	+5
	+492,0	+140,2	−718	−144
0,1,−2	−217			
−1,2,−2	+47	+47	−47	−47
1,0,−2	−737	+737	+737	−737
2,−1,−2	+8	−16	−32	+64
	−899	+768	+658	−720
0,2,−2	−13			
−1,3,−2	+5	+5	−5	−5
1,1,−2	+7	−7	−7	+7
2,0,−2	−20	+40	+80	−160
	−21	+38	+68	−158
0,−1,−3	−6			
−1,0,−3	+16	+16	−16	−16
1,−2,3	+4	−1	−1	+1
	+14	+15	−17	−15

1.				
0,0,−3	−12,4			
−1,1,−3	+16,5	+16,5	−17	−17
1,−1,−3	+10,6	−10,6	−11	+11
	+14,7	+5,9	−28	−6
0,1,−3	−9			
−1,2,−3	+2	+2	−2	−2
1,0,−3	−20	+20	+20	−20
	−27	+22	+18	−22
2.				
0,1,0	−16			
−1,2,0	+2	+2	−2	−2
1,0,0	+1276	−1276	−1276	+1276
	+1262	−1274	−1278	+1274
0,2,0	−4			
−1,3,0	+1	+1	−1	−1
1,1,0	+9	−9	−9	+9
2,0,0	+35	−70	−140	+280
	+41	−78	−150	+288
0,−1,−1	+3			
−1,0,−1	−17	−17	+17	+17
1,−2,−2	−1	+1	+1	−1
	−15	−16	+18	+16
0,0,−1	−289,4			
−1,1,−1	−10,3	−10,3	+10	+10
−2,2,−1	−4,5	−9,0	+18	+36
−3,3,−1	+2,2	+6,6	−20	−60
1,−1,−1	−18,7	+18,7	+19	−19
	−320,7	+6,0	+27	−33
0,1,−1	−24			
−1,2,−1	−461	−461	+461	+461
−2,3,−1	+53	+106	−212	−424
1 0,−1	+4599	−4599	−4599	+4599
	+4167	−4654	−4650	+4336
0,2,−1	−7708			
−1,3,−1	+1921	+1921	−1921	−1921
−2,4,−1	+6	+12	−24	−48
1,1,−1	+13928	−13928	−13928	+13928
2,0,−1	+128	−256	−512	+1024
	+8275	−12251	−16385	+12983
0,3,−1	−550			
−1,4,−1	+214	+214	−214	−214
−2,5,−1	+1	+2	−4	−8
1,2,−1	+318	−318	−318	+318
2,1,−1	+382	−764	−1528	+3056
3,0,−1	+5	−15	−45	+135
	+370	−881	−2109	+3287

Digitized by Google

2.				
0,4,−4	−38			
−1,5,−4	+19	+19	−19	−19
1,3,−4	+13	−13	−13	+13
2,2,−4	+9	−18	−36	+72
3,1,−4	+16	−48	−144	+432
	+19	−60	−212	+498
0,5,−4	−3			
−1,6,−4	+2	+2		
1,4,−4	+1	−1		
2,3,−4	0			
3,2,−4	0			
4,1,−4	+1	−1		
	+1	−3		
0,0,−2	−25,4			
−1,1,−2	−0,9	−0,9	+1	+1
−2,2,−2	−0,9	−1,8	+4	+7
−3,3,−2	+0,4	+1,2	−4	−11
1,−1,−2	−3,2	+3,2	+3	−3
	−30,0	+1,7	+4	−6
0,1,−2	+29,4			
−1,2,−2	−32,0	−32,0	+32	+32
−2,3,−2	+8,6	+17,2	−34	−69
1,0,−2	+433,9	−433,9	−434	+434
2,−1,−2	−0,1	+0,2		−1
	+439,8	−448,5	−436	+396
0,2,−2	−1283,4			
−1,3,−2	+313,6	+313,6	−314	−314
−2,4,−2	+1,0	+2,0	−4	−8
1,1,−2	+2461,0	−2464,0	−2464	+2464
2,0,−2	+11,9	−23,8	−48	+95
	+1504,1	−2169,2	−2827	+2234
0,3,−2	−89,5			
−1,4,−2	+35,4	+35,4	−35	−35
−2,5,−2	+0,1	+2,0		−1
1,2,−2	+52,7	−52,7	−53	+53
2,1,−2	+67,6	−135,2	−270	+541
3,0,−2	+0,5	−1,5	−5	+14
	+66,8	−153,8	−363	+572
0,4,−2	−6			
−1,5,−2	+3	+3	−3	−3
1,3,−2	+2	−2	−2	+2
2,2,−2	+1	−2	−4	+8
3,1,−2	+3	−9	−27	+81
	+3	−10	−36	+88
0,−1,−3	+4			
−1,0,−3	−18	−18	+18	+18
−2,1,−3	−6	−12	+24	+48
−3,2,−3	+3	+9	−27	−81
−4,3,−3	−1	−4	+16	+64
1,−2,−3	−1	+1	+1	−1
	−19	−24	+32	+48

Digitized by Google

2.				
0,0,−3	+320,6			
−1,1,−3	−221,7	−221,7	+222	+222
−2,2,−3	+64,7	+129,4	−259	−518
−3,3,−3	−10,9	−32,7	+98	+294
1,−1,−3	+17,8	−17,8	−18	+18
	+170,5	−142,8	+43	+16
0,1,−3	−7263			
−1,2,−3	+2361	+2361	−2361	−2361
−2,3,−3	−266	−532	+1064	+2128
−3,4,−3	−1	−3	+9	+27
1,0,−3	−31905	+31905	+31905	−31905
	−37074	+33731	+30647	−32141
0,2,−3	+44724			
−1,3,−3	−9693	−9693	+9693	+9693
−2,4,−3	−24	−48	+96	+192
1,1,−3	−100077	+100077	−100077	−100077
2,0,−3	−875	+1750	+3500	−7000
	−65945	+92086	+113366	−97192
0,3,−3	+2574			
−1,4,−3	−872	−872	+872	+872
−2,5,−3	−2	−4	+8	+16
1,2,−3	−1748	+1748	+1748	−1748
2,1,−3	−2744	+5488	+10976	−21952
3,0,−3	−36	+108	+324	−972
	−2828	+6468	+13928	−23784
0,4,−3	+151			
−1,5,−3	−65	−65	+65	+65
1,3,−3	−58	+58	+58	−58
2,2,−3	−48	+96	+192	−384
3,1,−3	−113	+339	+1017	−3051
4,0,−3	−2	+8	+32	−128
	−135	+436	+1364	−3556
0,5,−3	+9			
−1,6,−3	−5	−5	+5	+5
1,4,−3	−3	+3	+3	−3
2,3,−3	−2	+4	+8	−16
3,2,−3	−2	+6	+18	−54
4,1,−3	−6	+24	+96	−384
	−9	+32	+130	−452
0,0,−4	+31,0			
−1,1,−4	−17,8	−17,8		
−2,2,−4	+5,5	+11,0		
−3,3,−4	−1,0	−3,0		
1,−1,−4	−0,1	+0,1		
	+17,6	−9,7		
0,1,−4	−615			
−1,2,−4	+200	+200	−200	−200
−2,3,−4	−24	−48	+96	+192
1,0,−4	−1874	+1874	+1874	−1874
	−2313	+2026	+1770	−1882

Digitized by Google

2.				
0,2,−4	+3963			
−1,3,−4	−861	−861	+861	+861
−2,4,−4	−2	−4	+8	+16
1,1,−4	−9208	+9208	+9208	−9208
2,0,−4	−51	+102	+204	−408
	−6459	+8445	+10281	−8739
0,3,−4	+240			
−1,4,−4	−83	−83	+83	+83
1,2,−4	−163	+163	+163	−163
2,1,−4	−253	+506	+1012	−2024
3,0,−4	−2	+6	+18	−54
	−261	+592	+1276	−2158
0,4,−4	+15			
−1,5,−4	−7	−7	+7	+7
1,3,−4	−6	+6	+6	−6
2,2,−4	−4	+8	+16	−32
3,1,−4	−10	+30	+90	−270
	−12	+37	+119	−301
0,1,−5	−36			
−1,2,−5	+9	+9	−9	−9
−2,3,−5	−1	−2	+4	+8
1,0,−5	−80	+80	+80	−80
	−108	+87	+75	−81
0,2,−5	+225			
−1,3,−5	−49	−49	+49	+49
1,1,−5	−547	+547	+547	−547
2,0,−5	−2	+4	+8	−16
	−373	+502	+604	−514
0,3,−5	+14			
−1,4,−5	−5	−5	+5	+5
1,2,−5	−10	+10	+10	−10
2,1,−5	−15	+30	+60	−120
	−16	+35	+75	−125
11.				
0,3,−2	−5			
−1,4,−2	+2	+2		
1,2,−2	+3	−3		
	0	−1		
0,2,−3	+9			
−1,3,−3	−7	−7	+7	
−2,4,−3	+1	+2	−4	
1,1,−3	−2	+2	+2	
	+1	−3	+5	
0,3,−3	−106			
−1,4,−3	+53	+53	−53	
1,2,−3	+59	−59	−59	
	+6	−6	−112	

Digitized by Google

41.				
0,4,−3	−13			
−1,5,−3	+15	+15		
1,3,−3	−7	+7		
2,2,−3	+2	−4		
	−3	+18		
0,5,−3	−3			
−1,6,−3	+3	+3		
1,4,−3	0			
	0	+3		
0,2,−4	+4			
−1,3,−4	−2	−2		
1,1,−4	0			
	+2	−2		
0,3,−4	−28			
−1,4,−4	+13	+13		
1,2,−4	+14	−14		
	+1	−1		
0,4,−4	−1			
−1,5,−4	+5	+5		
1,3,−4	−1	+1		
	0	+6		
0,2,−5	−11			
−1,3,−5	+40	+40	−40	
−2,4,−5	−9	−18	+36	
1,1,−5	−87	+87	+87	
	−67	+109	+83	
0,3,−5	+713			
−1,4,−5	−310	−310	+310	
−2,5,−5	−2	−4	+8	
1,2,−5	−460	+460	+460	
2,1,−5	−2	+4	+8	
	−61	+150	+786	
0,4,−5	+91			
−1,5,−5	−90	−90	+90	
1,3,−5	+38	−38	−38	
2,2,−5	−13	+26	+52	
	+26	−102	+104	
0,5,−5	+17			
−1,6,−5	−15	−15		
1,4,−5	−1	+1		
2,3,−5	+1	−2		
	+2	−16		
0,2,−6	−3			
−1,3,−6	+5	+5		
−2,4,−6	−1	−2		
1,1,−6	−9	+9		
	−8	+12		

Digitized by Google

11.				
0,3,−6	+100			
−1,4,−6	−43	−43		
1,2,−6	−67	+67		
	−10	+24		
0,4,−6	+15			
−1,5,−6	−14	−14		
1,3,−6	+6	−6		
2,2,−6	−2	+4		
	+5	−16		
0,5,−6	+3			
−1,6,−6	−3	−3		
1,4,−6	−1	+1		
	−1	−2		

Die Glieder, in deren Argument die beiden ersten Indices Null sind, habe ich hier durch das zweite Verfahren, welches in dem Vorhergehenden mit angewandt worden ist, auch zu berechnen nicht für nöthig erachtet. Die angegebenen Glieder sind deshalb in ihren letzten Stellen allerdings minder genau, allein sie haben auf die Säcularänderungen der mittleren Länge, des Perigäums und der Knoten, die hier vorzugsweise die zu bestimmenden Grössen sind, so geringen Einfluss, dass der kleine Fehler, womit sie in der vorstehenden Tafel behaftet sein können, durchaus unschädlich ist. Die Coefficienten der Argumente 1,−2; 2,−2; 3,−2 in 2. haben hingegen dadurch, dass sie mit grossen Zahlen multiplicirt werden, im Verhältniss ihrer Grösse auf die eben genannten Säcularänderungen einen bedeutenden Einfluss, und deshalb habe ich sie mit einer Decimale mehr, wie die übrigen Coefficienten, berechnet.

313.

Es sind nun die Producte der Gleichungen (68) und (69) des Art. 187 zu berechnen, und hiefür wurden die folgenden Werthe erhalten.

g, g'	$\left(\frac{dJW_0}{dy}\right) n\delta z$	$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2JW_0}{dy^2}\right)(n\delta z)^2$	$(10)\, n\Delta z$	$(11)\, \Delta v$	$(12)\, \Delta \frac{h_0}{h}$	$(13)\, \Delta y$	Summe
	t cos	t cos	t cos	t cos	t cos	t cos	t cos
1.							
0,0	+49,01	−2,17	+44,93	−19,74	−0,03	+932,58	+1004,58
1,0	+105	−2	+114	−14		−102	+101
2,0	+15		+18	+3		−1	+35

Digitized by Google

1.							
−2, −1	−5	−1	+19	−6			+7
−1, −1	+51	−4	+581	−11			+617
0, −1	+736,4	−1,9	+821,5	−282,8	−0,3		+1272,9
1, −1	+1008	+2	+338	−437	−1		+910
2, −1	+61	+1	+44	−20			+86
3, −1	+4		+4	−1			+7
−2, −2	−6		−2	−2			−10
−1, −2	−29		+7	−7			−29
0, −2	+25,0	+1,8	+43,4	−12,9	−0,1		+57,2
1, −2	+41	+2	−25	−22			−4
2, −2	−3		−7	−5			−15
−1, −3	−1		+1				0
0, −3	+1,2	+0,1	+2,6	−1,0			+2,9
1, −3	+2		−1	−2			−1
2.							
1,0	−5	−1	+32	+10			+36
2,0	−15		+26	+2			+13
−1, −1	+12	−1	+1	−6			+6
0, −1	+281,6	−7,8	+246,4	−136,0	−0,3		+383,9
1, −1	+156	−10	+1824	+2	−1		+1971
2, −1	+237	−6	+2445	+186			+2862
3, −1	+120	−1	+412	+78			+609
4, −1	+10		+33	+5			+48
5, −1	0		+1				+1
0, −2	+24,5	−1,2	+24,6	−12,4		+1,1	+36,6
1, −2	+100,4	−0,6	+107,0	−5,5	−0,2	+0,5	+201,6
2, −2	+189,1	+0,6	+200,5	+24,6	−0,1	−1,1	+413,6
3, −2	+44,3	+0,3	+45,6	+13,3		−0,6	+99,9
4, −2	+2		+2				+4
−1, −3	−11		−3	+5			−9
0, −3	−226,6	+2,8	−170,6	+98,2	+0,3		−295,9
1, −3	−116	+12	−1670	−167	+1		−1940
2, −3	−261	+20	−2465	−444	−2		−3152
3, −3	−139	+8	−546	−111			−758
4, −3	−11	+1	−39	−7			−56
5, −3	0		−2				−2
0, −4	−22,3	+0,5	−20,4	+10,5			−31,7
1, −4	−84	+1	−116				−199
2, −4	−178	+2	−226	−44			−446
3, −4	−49	+1	−64	−18			−130
4, −4	−3		−4				−7
1, −5	−6		−6	−1			−13
2, −5	−16		−12	−2			−30
3, −5	−3		−4	−1			−8

Digitized by Google

11.							
2, −2	+14		+11	+7			+32
3, −2	+7		+17	+5			+29
4, −2	−1						−1
1, −3	+2	−1	−6	+1			−4
2, −3	+53		+68	+36			+157
3, −3	+160	+2	+188	+70			+420
4, −3	+77	+1	+109	+38			+225
5, −3	+7		+14	+4			+25
2, −4	+8	+1	+12	+7			+28
3, −4	+42	+2	+41	+18			+103
4, −4	+24	+1	+29	+9			+60
5, −4	0		+3				+3
1, −5	+4	+1	+6	−10			+1
2, −5	−357	+2	−438	−239			−1032
3, −5	−1174		−1050	−449			−2670
4, −5	−553	−1	−606	−228			−1388
5, −5	−52		−63	−22			−137
2, −6	−37	−1	−48	−25			−111
3, −6	−159	−2	−144	−62			−367
4, −6	−87	−1	−98	−37			−223
5, −6	−7		−12	−4			−23

g, g'	$\left(\frac{d^2 \Delta W_0}{dy^2}\right) n\delta z$	$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 \Delta W_0}{dy^2}\right)(n\delta z)^2$	$(14)\, n\Delta z$	$(15)\, \Delta v$	$(16)\, \Delta y$	Summe
	$t \sin$	$t \sin$	$t \sin$	$t \sin$	$t \sin$	$t \sin$
1.						
1,0	−90	+2	−114		+101	−101
2,0	−20		−23		+3	−40
−3, −1	−2		+4			+2
−2, −1	−27	−2	+58	−5		+24
−1, −1	−365	−3	+711	−3		+340
0, −1	−1063,7	−3,1	+230,4	+10,3	+0,1	−826,0
1, −1	−1328	−3	+139	+3		−1189
2, −1	−149	−2	−43	−6		−200
3, −1	−15		−8			−23
−2, −2	−9		−3			−12
−1, −2	−55		+16			−39
0, −2	−111,1	−1,5	+54,9	+0,3		−57,4
1, −2	−85	−2	+84			−3
2, −2	−3		+11			+8
−1, −3	−1		+1			0
0, −3	−5,9	−0,1	+3,5			−2,5
1, −3	−5		+4			−1

Digitized by Google

2.						
1,0	+7		−25			−18
2,0	+26		−33			−7
−1,−1	+27	−1	−3			+23
0,−1	+270,9	−6,6	−242,9	−1,6		+19,8
1,−1	−19	−4	−1810	−2		−1835
2,−1	−293	−1	−2994	+2		−3286
3,−1	−138	+1	−647	+2		−782
4,−1	−17		−75			−92
5,−1	−1		−8			−9
0,−2	+4,1	−1,6	+1,6	−0,2	+1,6	+5,5
1,−2	−90,5	−1,8	−91,1	−0,3	+0,9	−182,8
2,−2	−236,9	−1,6	−241,3	+0,2	+0,6	−479,0
3,−2	−62,1	−0,9	−65,9	+0,3	+0,2	−128,4
4,−2	−6		−7			−13
−1,−3	−25		−3			−28
0,−3	−244,6	−1,1	+126,0	+10,6	+0,1	−109,0
1,−3	−275	−11	+1370	+12		+1096
2,−3	+141	−17	+2805	−9		+2920
3,−3	+137	−10	+758	−12		+873
4,−3	+17	−1	+88	−1		+103
5,−3	+1		+9			+10
0,−4	−12,0	+0,3	−3,8	+0,7		−14,8
1,−4	+43		+72	+1		+116
2,−4	+199	−1	+249	−1		+446
3,−4	+67		+86	−1		+152
4,−4	+7		+9			+16
1,−5	+5		+5			+10
2,−5	+18		+13			+31
3,−5	+6		+4			+10
11.						
2,−2	−14		−11			−25
3,−2	−8		−22			−30
4,−2	0		−2			−2
1,−3	+2	−1	+6			+7
2,−3	−49	−1	−63			−113
3,−3	−200	−1	−213			−414
4,−3	−111	−1	−142			−254
5,−3	−16		−26			−42
2,−4	−8	−1	−10			−19
3,−4	−54	−2	−48			−104
4,−4	−33	−1	−38			−72
5,−4	−4		−5			−9
1,−5	−5	+1	−3			−7
2,−5	+318	+1	+410			+729
3,−5	+1385	+1	+1197			+2583
4,−5	+745	+1	+793			+1539
5,−5	+105		+120			+225
2,−6	+32	+1	+45			+78
3,−6	+188	+2	+165			+353
4,−6	+118	+1	+128			+247
5,−6	+16		+19			+35

Digitized by Google

314.

Ehe die letzten Integrationen ausgeführt werden können, sind wieder die im Art. 303 entwickelten Glieder zu berücksichtigen. Man findet

für $\frac{d.fz}{dt}$

g, g'	$n\beta'$	F	$-2\beta' F$
1.			
1, −1	+51″,74	+111″,7	−1
2.			
0, −2	−77,20	−11,6	−0,4
1, −2	−26,05	+1467,0	+13,6
2, −2	+25,10	+2145,0	−6,3
3, −2	+76,25	+60,0	−0,5
1, −3	−25,49	+198,0	+1

für $-2\frac{d.fv}{ndt}$

g, g'	$n\beta'$	F	$2\beta' F$
2.			
0, −2	−77″,20	+103″,3	−0,9
1, −2	−26,05	+1112,4	−12,6
2, −2	+25,10	+3024,3	+8,9
3, −2	+76,25	+137,9	+1,2

Für die übrigen Argumente sind diese Glieder unmerklich.

Addirt man nun nach Vorschrift der Gleichungen (68) und (69) des Art. 187, fügt auch die vorstehenden Glieder hinzu, und integrirt wie früher, so ergiebt sich

g, g'	$n.\Delta z$ / nt^2	Diff.	Δv / $t\cos$	Diff.
1.				
0,0	+613,95			
	$t\sin$			
1.				
0,0			−112	+4
1,0	−21	+3	−39	−2
2,0	+19	−2	−41	+1

Digitized by Google

4.				
−3, −1	−7	0	−12	0
−2, −1	−272	−1	−285	−1
−1, −1	−18283	+8	−9640	+5
0, −1	−163914	−148	−6148	0
1, −1	−27889	−29	+12676	+15
2, −1	−303	+2	+281	0
3, −1	−7	0	+10	+1
−2, −2	−2	+3	−4	−1
−1, −2	−396	+3	−225	−1
0, −2	−3641	−19	−274	+11
1, −2	−1063	−8	+451	+7
2, −2	−19	+1	+13	0
−1, −3	−9	+2	−6	0
0, −3	−78	+7	−8	+6
1, −3	−36	+20	+14	−7
2.				
1,0	+1276	+28	−635	−15
2,0	+27	0	−21	−2
−1, −1	+9	+4	−4	+5
0, −1	−1082	+25	−221	−26
1, −1	+6837	+24	−3446	−9
2, −1	+5735	−26	−4001	+18
3, −1	+337	−5	−283	−2
4, −1	+17	0	−19	−1
0, −2	−46	−44	−24	+1
1, −2	+756,2	−10	−371,7	+11
2, −2	+1024,2	−7	−707,2	+5
3, −2	+58,0	−2	−49,0	+1
4, −2	+2	0	−3	0
−1, −3	+23	−4	+22	−4
0, −3	+599	+41	+602	+34
1, −3	−49338	−12	+22022	+1
2, −3	−38585	−4	+26527	+2
3, −3	−1285	+4	+1316	+2
4, −3	−50	+1	+71	0
5, −3	−2	—	+5	—
0, −4	+49	−8	+43	−1
1, −4	−3512	+20	+1497	−9
2, −4	−3851	+4	+2592	−1
3, −4	−144	+1	+137	−1
4, −4	−5	0	+7	+1
1, −5	−189	+23	+76	−9
2, −5	−246	0	+163	0
3, −5	−9	0	+9	−1
11.				
2, −2	+17	+2	−7	−1
3, −2	+9	+1	−6	+1

11.				
1, −3	−5	+1	+5	−1
2, −3	+87	+2	−32	0
3, −3	+152	−2	−75	0
4, −3	+58	0	−31	+1
5, −3	+5	+1	−4	0
2, −4	+17	0	−6	0
3, −4	+37	+2	−19	0
4, −4	+16	+1	−9	0
5, −4	+1	—	−1	—
1, −5	+2	−11	−6	0
2, −5	−663	−2	+252	+3
3, −5	−1028	−1	+515	−1
4, −5	−372	−1	+197	−1
5, −5	−29	+1	+23	−1
2, −6	−75	−2	+29	−2
3, −6	−146	0	+73	+1
4, −6	−61	−2	+32	+1
5, −6	−5	—	+4	—
3.				
2,1	−32		+22	
1,0	+16		−8	
2,0	−2		+1	
2, −1	−30		+24	
4.				
0,3	+861		−94	
−1,2	−1		−1	
0,2	−33		+3	
1,2	−1		+1	
0,1	−514		+20	
6.				
1,0	−1380		+2172	
1, −1	+26		−11	
1, −2	+140		−67	
7.				
3, −2	−31		+13	
2, −3	−1		+1	
3, −3	+1		−1	
3, −4	−19		+21	

Die mit »Diff.« überschriebenen Columnen geben die Unterschiede dieser Resultate mit den der Rechnung zu Grunde gelegten und im Art. 301 angegebenen Werthen. Diese Unterschiede sind befriedigend. Ver-

Digitized by Google

gleicht man ferner die in den Mondtafeln angeführten Coefficienten mit den Vorstehenden, so findet man höchstens Unterschiede von 2 Einheiten der letzten dort angegebenen Decimale. Die Controle, die ich in den früheren Paragraphen hinzugefügt habe, halte ich hier hinzuzufügen für unnöthig.

315.

Ich werde jetzt die einzelnen Glieder der Coefficienten eines jeden Products angeben, aus welchen die Säcularänderungen hervorgehen, und die, wie oben schon angemerkt ist, zur Erlangung einer grösseren Genauigkeit, nicht mit den Angaben des Art. 301, sondern mit den in diesem § erhaltenen berechnet worden sind.

Für das Differential von ΔW_0 sind es die folgenden,

in $(1) n \Delta z$

		Argg.			Arg.		Arg.
1.	1.	−1,1,0	1,−1,0	1.	1,0,0	1.	−1,0,0
1,0						−1,1,0	+0,068
−2,−1				1,−2,−1	+0,006		
−1,−1	−1,−1	+0,12	+0,40	1,−1,−1	+1,661		
0,−1	0,−1	+16,30	+14,89	1,0,−1	+1,994	−1,0,−1	+1,045
1,−1	1,−1	+1,06	+0,34	1,1,−1	+0,047	−1,1,−1	+2,774
2,−1						−1,2,−1	+0,041
−1,−2				1,−1,−2	+0,001		
0,−2	0,−2	+0,01	+0,01			−1,1,−2	+0,003
1,−2							
2.	2.			2.		2.	
0,−1				1,0,−1	+0,004		
1,−1	1,−1	+0,01	−0,03	1,1,−1	−0,850		
2,−1	2,−1	−0,95	−0,71	1,2,−1	−0,065	−1,2,−1	+0,011
3,−1	3,−1	−0,01	0,00			−1,3,−1	−0,056
0,−2				1,0,−2	+0,001		
1,−2	1,−2	−1,06	−0,01	1,1,−2	+9,482	−1,1,−2	+0,030
2,−2	2,−2	+12,75	+12,84	1,2,−2	+0,946	−1,2,−2	−1,430
3,−2	3,−2	+0,11	+0,05	1,3,−2	+0,004	−1,3,−2	+0,722
0,−3				1,0,−3	+0,003		
1,−3	1,−3	+3,85	−0,26	1,1,−3	−37,455	−1,1,−3	−0,084
2,−3	2,−3	−30,64	−29,29	1,2,−3	−2,265	−1,2,−3	+3,007
3,−3	3,−3	−0,16	−0,08	1,3,−3	−0,006	−1,3,−3	−1,020
4,−3						−1,4,−3	−0,006
1,−4	1,−4	+0,01	0,00	1,1,−4	−0,111		
2,−4	2,−4	−0,13	−0,12	1,2,−4	−0,040	−1,2,−4	+0,011
3,−4						−1,3,−4	−0,005

Digitized by Google

11.	11.			11.			
3,−4	3,−4	+0,04	0,00	1,2,−5	−0,004		
2,−5							
3,−5	3,−5	−0,03	−0,01			−1,3,−5	+0,002
4,−5						−1,4,−5	−0,042
Summen		+1,26	−4,97		−26,617		+5,071
		+1,97			−5,071		
(−1,1,0) =		+3,23		(1,0,0) =	−31,688		

in (2) Δv

		Argg.			Arg.		Arg.
1.	1.	−1,1,0	1,−1,0	1.	1,0,0	1.	−1,0,0
0,0	0,0	+1,29		1,0,0	−0,106		
1,0	1,0	0,00	−0,02			−1,1,0	+0,225
−2,−1				1,−2,−1	+0,005		
−1,−1	−1,−1	+0,13	+0,16	1,−1,−1	+0,805	−1,−1,−1	+0,004
0,−1	0,−1	−0,38	+0,51	1,0,−1	−0,122	−1,0,−1	+0,085
1,−1	1,−1	+0,21	+0,25	1,1,−1	+0,042	−1,1,−1	+0,787
2,−1						−1,2,−1	+0,005
2.	2.			2.		2.	
0,−1				1,0,−1	+0,002		
1,−1	1,−1	+0,02	+0,02	1,1,−1	−0,586	−1,1,−1	+0,001
2,−1	2,−1	−0,45	−0,68	1,2,−1	−0,041	−1,2,−1	+0,024
3,−1						−1,3,−1	−0,032
0,−2				1,0,−2	−0,045		
1,−2	1,−2	−0,47	−0,61	1,1,−2	+6,285	−1,1,−2	+0,025
2,−2	2,−2	+6,00	+11,96	1,2,−2	+0,494	−1,2,−2	−0,888
3,−2	3,−2	+0,05	+0,03	1,3,−2	+0,002	−1,3,−2	+0,116
0,−3				1,0,−3	+0,057		
1,−3	1,−3	+1,68	+2,07	1,1,−3	−22,493	−1,1,−3	−0,077
2,−3	2,−3	−14,34	−27,10	1,2,−3	−1,248	−1,2,−3	+2,018
3,−3	3,−3	−0,09	−0,06	1,3,−3	−0,003	−1,3,−3	−0,711
1,−4				1,1,−4	−0,064		
2,−4	2,−4	−0,06	−0,11	1,2,−4	−0,006	−1,2,−4	+0,008
3,−4						−1,3,−4	−0,003
11.	11.			11.			
2,−4				1,2,−4	+0,004		
3,−5				1,3,−5	−0,002		
Summen		−6,44	−13,58		−17,053		+4,887
		+13,58			−1,887		
(−1,1,0) =		+7,17		(1,0,0) =	−18,940		

Digitized by Google

in (3) $\Delta \frac{h_0}{h}$

		Argg.			Arg.		Arg.
1.	1.	−1,1,0	1,−1,0	1.	1,0,0	1.	−1,0,0
1,0	1,0	+0,03	+0,01			−1,1,0	+0,822
2,0						−1,2,0	+0,002
−1,−1	−1,−1	0,00	+0,01	1,−1,−1	+0,015		
0,−1	0,−1	+0,03	+0,04	1,0,−1	−0,008	−1,0,−1	+0,010
1,−1	1,−1	−0,01	−0,01			−1,1,−1	+0,023
2.	2.			2.		2.	
1,−1				1,1,−1	+0,032		
2,−1	2,−1	−0,29	−0,22	1,2,−1	−0,013	−1,2,−1	+0,012
3,−1						−1,3,−1	−0,015
0,−2				1,0,−2	−0,033		
1,−2	1,−2	+0,09	+0,06	1,1,−2	−0,647	−1,1,−2	−0,005
2,−2	2,−2	+3,59	+3,64	1,2,−2	+0,201	−1,2,−2	−0,489
3,−2	3,−2	+0,02	+0,01			−1,3,−2	+0,180
0,−3				1,0,−3	−0,035		
1,−3	1,−3	−0,36	−0,24	1,1,−3	+2,673	−1,1,−3	+0,017
2,−3	2,−3	−8,00	−7,70	1,2,−3	−0,446	−1,2,−3	+1,026
3,−3	3,−3	−0,04	−0,02	1,3,−3	−0,001	−1,3,−3	−0,314
4,−3						−1,4,−3	−0,002
1,−4				1,1,−4	+0,010		
2,−4	2,−4	−0,03	−0,03	1,2,−4	−0,002	−1,2,−4	+0,004
3,−4						−1,3,−4	−0,001
11.				11.			
3,−5				1,−3,−5	+0,002		
Summen		−4,97	−4,45		+1,748		+1,270
		+4,45			−1,270		
(−1,1,0) =		−0,52		(1,0,0) =	+0,478		

in (4) $\frac{d\Delta v}{ndt}$

		Argg.			Arg.		Arg.
1.	1.	−1,1,0	1,−1,0	1.	1,0,0	1.	−1,0,0
1,0	1,0	+0,01	−0,03			−1,1,0	+0,333
2,0						−1,2,0	−0,001
−2,−1				1,−2,−1	+0,001		
−1,−1	−1,−1	−0,02	+0,02	1,−1,−1	+0,143		
0,−1	0,−1	−0,01	+0,01	1,0,−1	+0,001	−1,0,−1	−0,001
1,−1	1,−1	−0,04	+0,03			−1,1,−1	−0,160

Digitized by Google

2.	2.			2.		2.	
1,−1				1,1,−1	+0,001		
2,−1						−1,2,−1	−0,006
1,−2	1,−2	+0,03	−0,03	1,1,−2	−0,014		
2,−2	2,−2	+0,07	−0,06	1,2,−2	−0,002	−1,2,−2	+0,122
3,−2						−1,3,−2	+0,007
1,−3	1,−3	−0,07	+0,07	1,1,−3	+0,054		
2,−3	2,−3	−0,17	+0,15	1,2,−3	+0,005	−1,2,−3	−0,203
3,−3	3,−3	−0,01	0,00			−1,3,−3	−0,013
Summen		−0,24	+0,16		+0,189		+0,078
		−0,16			−0,078		
(−1,1,0) =		−0,37		(1,0,0) =	+0,111		

in (6) ΔP

1.	1.	Argg. −1,1,0	Argg. 1,−1,0	1.	Arg. 1,0,0	1.	Arg. −1,0,0
0,−1	0,−1	+0,03	0,00	1,0,−1	+0,014	−1,0,−1	−0,006
2.	2.			2.		2.	
1,−2				1,1,−2	+0,006		
2,−2	2,−2	−0,01	−0,02			−1,2,−2	+0,001
1,−3				1,1,−3	−0,015		
2,−3	2,−3	+0,02	+0,04	1,2,−3	+0,002	−1,2,−3	−0,002
3.	3.			3.			
1,1				1,1,1	−0,003		
2,1	2,1	0,00	+0,01				
1,0				1,1,0	−0,006		
1,−1				1,1,−1	−0,002		
2,−1	2,−1	0,00	+0,01				
4.	4.			4.		4.	
−1,3				1,−1,3	+0,002		
0,3	0,3	−0,11	+0,10	1,0,3	−0,015	−1,0,3	+0,010
1,3						−1,1,3	+0,002
0,2	0,2	+0,08	−0,07	1,0,2	+0,010	−1,0,2	−0,006
0,1	0,1	−0,01	+0,01	1,0,1	+0,004	−1,0,1	+0,001
Summen		0,00	+0,08		−0,006		+0,012
		−0,08			−0,012		
(−1,1,0) =		−0,08		(1,0,0) =	−0,018		

Digitized by Google

in (7) ΔQ

		Argg.			Arg.		Arg.
2.	2.	−1,1,0	1,−1,0	2.	1,0,0	2.	−1,0,0
1,−2				1,1,−2	+0,002		
2,−2	2,−2	−0,01	−0,02			−1,2,−2	+0,001
1,−3				1,1,−3	−0,015		
2,−3	2,−3	+0,02	+0,04	1,2,−3	+0,002	−1,2,−3	−0,003
3.				3.			
1,1				1,1,1	−0,002		
2,1	2,1	0,00	+0,01				
1,0				1,1,0	−0,004		
1,−1				1,1,−1	−0,002		
2,−1	2,−1	0,00	+0,01				
4.				4.		4.	
−1,3				1,−1,3	+0,002		
0,3	0,3	−0,11	+0,10	1,0,3	−0,015	−1,0,3	+0,010
1,3						−1,1,3	+0,002
0,2	0,2	+0,08	−0,07	1,0,2	+0,010	−1,0,2	−0,006
0,1	0,1	−0,01	+0,01	1,0,1	+0,001	−1,0,1	+0,001
Summen		−0,03	+0,08		−0,021		+0,005
		−0,08			−0,005		
(−1,1,0) =		−0,11		(1,0,0) =	−0,026		

Diese Werthe der Coefficienten von −1,1,0 und 1,0,0 in 1. sind in den Tafeln des Art. 310 aufgenommen worden. Ferner

in	$\left(\frac{d.\Delta W_0}{dy}\right) n dz$	$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2.\Delta W_0}{dy^2}\right)(n dz)^2$	(10) $n\Delta z$	(11) Δv	(12) $\Delta \frac{h_0}{h}$
1.	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0		−0,03		+1,52	
1,0				−0,01	
−1,−1	+3,62	−0,04	+3,68	−1,79	
0,−1	+2,80	−0,09	+1,47	−0,63	
1,−1	+6,67	+0,09	+6,34	−3,44	
2.					
1,0	+0,01		+0,01		
1,−1	+0,31	−0,09	+0,44	−0,23	
2,−1	+0,68	−0,17	+0,87	−0,36	
3,−1			+0,01		
0,−2				+0,01	
1,−2	−4,86		−6,58	+3,85	
2,−2	−11,28		−14,02	+5,40	+0,02
3,−2	−0,02		−0,06	+0,02	

Digitized by Google

2.					
1, −3	+16,20	−0,55	+16,72	−9,57	−0,01
2, −3	+34,61	−1,26	+35,72	−14,37	−0,06
3, −3	+0,08	−0,02	+0,09	−0,04	
1, −4	+0,03		+0,04	−0,02	
2, −4	+0,16	−0,01	+0,17	−0,07	
11.					
3, −4				+0,01	
3, −5			+0,03	−0,02	
Summen	+49,01	−2,17	+44,93	−19,74	−0,03

Diese sind die Werthe der Coefficienten von 0,0 in 1., die in der ersten Tafel des Art. 313 aufgenommen worden sind.

316.

Für die Säcularänderung der Knoten sind die folgenden die einzelnen Werthe.

in	(38) $n\Delta z$	(39) Δv	(40) $\Delta \frac{h_0}{h}$	(42) ΔP	(43) ΔQ
1.	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0		−0,082			
1,0		+0,002	+0,001		
−1, −1	+0,017	+0,011			
0, −1	+0,012	−0,116	−0,010	+0,006	−0,011
1, −1	−0,036	−0,022	+0,001		
2.					
2, −1	+0,028	+0,020	+0,006	−0,003	+0,003
1, −2	+0,023	+0,023	−0,002	+0,002	−0,001
2, −2	−0,377	−0,257	−0,076	+0,046	−0,045
3, −2	−0,002	−0,001			
1, −3	−0,084	−0,081	+0,010	−0,005	+0,005
2, −3	+0,899	+0,604	+0,166	−0,084	+0,083
3, −3	+0,003	+0,002			
2, −4	+0,004	+0,003			
3.					
1,1				+0,001	+0,001
2,1				+0,009	+0,009
1,0				+0,002	+0,001
1, −1				+0,001	+0,001
2, −1				+0,015	+0,015
4.					
0,1				+0,001	+0,001
−1,3				−0,001	−0,001
0,3				+0,586	+0,581
1,3				+0,001	+0,001
0,2				−0,434	−0,432
0,1				+0,043	+0,044
Summen	+0,487	+0,106	+0,096	+0,186	+0,255

Digitized by Google

Diese Werthe der Coefficienten des Arguments 0,0 in 1. sind in der ersten Tafel des Art. 306 aufgenommen worden.

317.

Aus den im Vorhergehenden berechneten Zahlenwerthen erhält man nun die Säcularänderungen auf folgende Art. Im Art. 314 wurde, wenn man jetzt die Secunde zur Einheit macht, das Glied

$$n\Delta z = + 0''{,}0061395\, n t^2$$

gefunden, wo unter n die hundertjährige mittlere Bewegung des Mondes, in Theilen des Radius ausgedrückt, verstanden werden muss. Da der Logarithmus davon $= 3{,}92057$ ist, so wird

$$n\Delta z = + 51''{,}134\, t^2$$

Dieses ist die hier erhaltene Säcularänderung der mittleren Anomalie des Mondes.

In den Artt. 1 und 9 wurde darauf aufmerksam gemacht, dass der Strenge nach in allen Formeln $nfydt$, $nfadt$, $nf\eta dt$ statt nyt. nat, $n\eta t$ gesetzt werden müsse. Hier muss von dieser Bemerkung Gebrauch gemacht werden. Es ist, wie man gesehen hat, der vollständige Werth dieser Grössen jetzt $y + \Delta\eta$, $a + \Delta a$, $\eta + \Delta\eta$, und da die ersten Glieder dieser Ausdrücke Constanten sind, so ist zwar immer noch $fydt = yt$, etc., und die in der ersten Abhandlung erhaltenen Werthe derselben bleiben unverändert, aber Δy, Δa, $\Delta\eta$ sind Functionen der Zeit, und daher muss in Bezug auf diese die strenge Form angewandt werden.

In den Artt. 311, 307, 309 wurde in Theilen des Kreisradius gefunden

$$\Delta y = - 0{,}0000004494\, t$$
$$\Delta a = - 0{,}0000000769\, t$$
$$\Delta\eta = - 0{,}0000000001\, t$$

Multiplicirt man diese mit dem in Secunden ausgedrückten Werth der hundertjährigen mittleren Bewegung des Mondes, dessen Logarithmus $= 9{,}23500$ ist, und führt die Integration aus, so ergiebt sich

$$nf\Delta ydt = - 38''{,}603\, t^2$$
$$nf\Delta adt = - 6{,}610\, t^2$$
$$nf\Delta\eta dt = - 0{,}013\, t^2$$

Da nun die

Säcularänderung des Perigäums $= nf(\Delta y - 2\Delta\eta)\, dt$

Digitized by Google

und die

$$\text{Säcularänderung der Knoten} = -nf(\Delta\alpha + \Delta\eta)\,dt$$

ist, so geben die vorstehenden Werthe die

$$\text{Säcularänderung des Perigäums} = -38{,}577\,f^2$$
$$\text{» » der Knoten} = +6{,}623\,f^2$$

Aus der Säcularänderung der mittleren Anomalie und der des Perigäums folgt die

$$\text{Säcularänderung der mittleren Länge} = +12{,}557\,f^2$$

In den Mondtafeln ist für diese drei Grössen bez. angewandt worden

$$+12{,}180\,f^2$$
$$-37{,}255\,f^2$$
$$+7{,}068\,f^2$$

folglich sind die Unterschiede bez. =

$$+0{,}377\,f^2$$
$$-1{,}322\,f^2$$
$$-0{,}445\,f^2$$

In Bezug auf die beiden letzten dieser Werthe bemerke ich, dass eine Aenderung der Länge des Perigäums höchstens mit $2e$ multiplicirt in die Länge, und eine Aenderung der Knotenlänge höchstens mit $\sin J$ multiplicirt in die Breite übergehen kann. Da nun $2e$ nahe $= \frac{1}{9}$, und $\sin J$ nahe $= \frac{1}{11}$ ist, so kann die grösste Wirkung des vorstehenden zweiten Unterschiedes auf die Länge

$$\pm 0{,}15\,f^2$$

und die grösste Wirkung des vorstehenden dritten Unterschiedes auf die Breite des Mondes

$$\pm 0{,}04\,f^2$$

nicht übersteigen.

318.

Die mit f^2 multiplicirten Glieder der Säcularänderungen habe ich durch die folgenden Betrachtungen erhalten. Es lässt sich leicht finden, dass die im vor. Art. erhaltenen Säcularänderungen analytisch betrachtet die Form $Kf(e'^2 - e'^2_0)\,dt$ haben, wo K eine Constante e'_0 die Excentricität der Erdbahn für die Zeitepoche, und e' dieselbe für die Zeit t ist. Sei nun

Digitized by Google

$$e' = e'_0 + e'_{,} t + e'_{,,} t^2$$

dann wird

$$\int (e'^2 - e'^2_0)\, dt = e'e'_{,} t^2 + \tfrac{1}{3}(2e'e'_{,,} + e'^2_{,}) t^3$$

Hieraus folgt nun, dass wenn das erste Glied irgend einer der genannten Säcularänderungen $= \nu t^2$ gefunden worden ist, so wird die vollständige Säcularänderung

$$= \nu t^2 + \nu \frac{2e'e'_{,,} + e'^2_{,}}{3e'e'_{,}} t$$

Aus dem Art. 299 ergiebt sich, wenn man 100 Julianische Jahre zur Zeiteinheit annimmt,

$$e'_{,} = -8''{,}6318$$

und aus den Sonnentafeln

$$e'_{,,} = -0''{,}023708$$

hiemit wird

$$\log \frac{2e'e'_{,,} + e'^2_{,}}{3e'e'_{,}} = 7{,}00014$$

womit die Zusatzglieder die folgenden Werthe erhalten

Säcularänderung der mittl. Länge $= +\ 0''{,}012561\, t^3$
» » » » Anomalie $= +\ 0{,}051150\, t^3$
» » » » Perigäums $= -\ 0{,}038590\, t^3$
» » » » Knoten $= +\ 0{,}006625\, t^3$

sehr nahe mit den Angaben der Mondtafeln übereinstimmend.

Zusatz I.

Ermittelung der Wirkung, die die im vor. § erhaltenen Unterschiede der Säcularänderungen auf die Darstellung der chronologischen Sonnenfinsternisse äussern.

319.

Aus den im Art. 317 gefundenen Unterschieden zwischen den Resultaten der hier ausgeführten Rechnungen mit denjenigen, die den Mondtafeln zu Grunde gelegt worden sind, findet man

$$\delta z = +\ 1''{,}699\, t^2$$
$$\delta \Pi = -\ 1{,}322\, t^2$$
$$\delta \omega = -\ 0{,}877\, t^2$$

Digitized by Google

wo die Bezeichnungen dieselben sind, wie in den Mondtafeln, nemlich z das dortige Fundamentalargument, Π die Länge des Perigäums, und ω die Entfernung des Perigäums vom aufsteigenden Knoten bedeutet. Führt man zuerst die vorstehenden Werthe auf die in den Mondtafeln gewählten Einheiten hin, so wird

$$\delta z = + 0^{d}_{,}00003612 \left(\frac{t-1800}{100}\right)^2$$
$$\delta \Pi = - 0^{0}_{,}0003672 \left(\frac{t-1800}{100}\right)^2$$
$$\delta \omega = - 0^{0}_{,}0002436 \left(\frac{t-1800}{100}\right)^2$$

und es soll nun untersucht werden, theils wie weit sich die Lage der Centrallinien und der Grenzlinien der Totalität der chronologischen Sonnenfinsternisse auf der Oberfläche der Erde, theils um wie viel sich die grössten Phasen und ihr Zeitpunkt oder die Anfangszeiten derselben ändern, wenn man diese Unterschiede berücksichtigt.

Ich kann in dieser Untersuchung unmittelbar an die Abhandlung von Airy »*On the Eclipse of Agathokles* etc.« in den »*Memoirs of the Royal Astronomical Society* Vol. XXVI« anknüpfen, zu welcher ich selbst auf Airy's Wunsch den Theil der Rechnungen, der auf meinen Mond- und Sonnentafeln beruht, ausgeführt habe, wie auch dort angeführt ist.

1) Die Sonnenfinsterniss von Larissa.

Xenophon (*Anabasis* lib. 3. cap. 4) erzählt, dass die sehr feste Stadt Larissa lange Zeit vergeblich von den Persern belagert worden war. Da begab es sich, dass plötzlich eine Wolke die Sonne so bedeckte, dass sie völlig unsichtbar wurde, worüber die Belagerten so erschracken, dass sie sich zurück zogen, und dem Feinde die Stadt überliessen. Es kann kein Zweifel darüber sein, dass hierunter eine totale Sonnenfinsterniss verstanden werden muss, da die oft vorkommende Bedeckung der Sonne von einer Wolke die Einwohner schwerlich erschreckt haben würde.

Aus meinen Mond- und Sonnentafeln habe ich für diese Sonnenfinsterniss die folgenden Data erhalten, die ich so angeben werde, wie sie in meiner »Theorie der Finsternisse etc.« verlangt werden. *)

*) Schriften dieser Gesellschaft Bd. IV.

Digitized by Google

Jahr —556 Mai.

m. Gr. Z.	☾ Länge.	☾ Breite.	Aeq. H. Par.	☉ Länge.
18d 21h 36m	49° 30′ 56″,8	+0° 29′ 40″,4	58′ 10″,1	51° 0′ 48″,9
22 48	50 12 1,6	25 53,5		
19 0 0	50 53 9,0	22 6,1	58 13,8	51 6 36,1
1 12	51 34 19,0	18 18,3		
2 24	52 15 31,4	14 30,0	58 17,5	51 12 23,3

und ausserdem für Mai $19^d\ 0^h\ 0^m$

$\odot$ Decl. $= +\ 18°\ 16′\ 56″,0$, $\odot$ Rad. vect. $= 0{,}00756$

$h = +\ 15°\ 27′\ 18″,3$; Sch. d. Ecl. $= 23°\ 46′\ 3″,3$

wahre Zeit — mittlere Zeit $= +\ 8^m\ 48^s,54$

Unter h wird hier der Winkel an der Sonne zwischen dem Breiten- und dem Declinationskreise verstanden.

Hieraus erhielt ich für die beigesetzten Stundenwinkel die folgenden Punkte der Curve der Centralität und der südlichen Grenze der Totalität, wo die Längen östliche von Greenwich sind. Für die Vergleichung mit unsern Karten, auf welchen gewöhnlich die Längen von Ferro gezählt sind, bemerke ich, dass zu den hier angegebenen Längen 17° 40′ addirt werden muss, um jene zu erhalten.

Stw.	Centr. Curve,		Südl. Gr. Curve.	
	O. L. v. Gr.	Polhöhe.	O. L. v. Gr.	Polhöhe.
+73°	40° 43′	+36° 50′	40° 37′	+36° 29′
74	41 32	36 36	41 28	36 17
75	42 22	36 23	42 18	36 4
76	43 13	36 9	43 8	35 49
77	44 3	35 55	43 58	35 35

Da nach den neuesten Untersuchungen über die Lage des alten Larissa, welches noch durch ein grosses Trümmerfeld bezeichnet ist, die

Länge $= 43°\ 20′\ 8″$ östl. v. Gr.; Polhöhe $= +\ 36°\ 6′\ 1″$

so zeigen die vorstehenden Curvenpunkte, dass Larissa nahe 1′ südlich von der Centralcurve liegt.

Berechnen wir nun die Wirkung der obigen Unterschiede der Säcularänderungen auf diese Finsterniss, so ist zuerst $t = -\ 23{,}56$ und hiemit geben die obigen Ausdrücke

Digitized by Google

$$\delta z = + 0''.02015$$
$$\delta II = - 0''.2039$$
$$\delta\omega = - 0''.1353$$

und ferner ist hier $z = 9''.6$, $f + \omega = 175°.8$. Geht man nun in die Mondtafeln in Tafel V. der Längentafeln mit dem vorstehenden Werthe von δz ein, so findet man

$$\delta f = + 0''.2700$$

und hiemit

$$\delta l = + 0''.0661; \quad \delta(f + \omega) = + 0''.1347$$

Die Tafel XXXVI$^{(a)}$ der Mondtafeln für die Breite giebt ferner mit dem vorstehenden Werthe von $\delta(f + \omega)$

$$\delta b = - 43''.4$$

Da die Aenderungen der Mondlänge und Breite so klein sind, so kann man sich zur Ermittelung der Aenderung der Lage der Totalitätszone auf der Erdoberfläche mit voller Sicherheit der Differentialgleichung zwischen einer Aenderung der Polhöhe φ der Centralcurve und Aenderungen der Mondlänge und Breite bedienen, die ich in der oben angeführten Abhandlung über die Sonnenfinsternisse im § 7 entwickelt habe. Im vorliegenden Falle wird diese Differentialgleichung für den Punkt, welcher der Lage von Larissa entspricht,*)

$$\delta\varphi = 14{,}40\,\delta l + 68{,}16\,\delta b$$

und ist so zu verstehen, dass die geographische Länge des Curvenpunkts unverändert bleibt, und also $\delta\varphi$ die volle Verschiebung der Curve in der Richtung des Meridians bezeichnet. Substituirt man die obigen Werthe von δl und δb in diese Gleichung, so bekommt man

$$\delta\varphi = + 7'.8$$

Da die halbe Breite der Zone der Totalität, auch auf dem Meridian gemessen, den obigen Curvenpunkten zufolge 21′ beträgt, so bleibt mit Zuziehung der obigen Unterschiede der Säcularänderungen die Sonnenfinsterniss von Larissa immer noch total.

---

*) Für verschiedene Punkte der Curve können die Coefficienten dieser Gleichung wesentlich verschieden ausfallen.

2) Die Sonnenfinsterniss des Thales.

Nach Herodot (I, 74) hatten sich die Lyder und Meder fünf Jahre lang ohne entscheidenden Erfolg bekämpft. Da traf es sich im sechsten Jahre, dass während einer Schlacht die Sonne sich vollständig verfinsterte, und hierüber erschrocken schlossen sie Frieden, und besiegelten das Bündniss durch eine Heirath der Kinder ihrer Könige mit einander. Man hat, ich weiss nicht aus welchen Gründen, in neuerer Zeit diese Schlacht oft die Schlacht am Halys genannt, aber bei Herodot ist darüber nichts zu finden, auch ist es nach geschichtlichen und strategischen Erörterungen sehr unwahrscheinlich, dass sie am Halys, mehr noch in der Nähe der Mündung desselben, statt gefunden hat. Es ist vielmehr als sicher anzunehmen, dass sie innerhalb des von Airy aufgestellten Polygons, welches seine Winkel in den Städten Sardes, Iconium, Tarsus, Issus, Metilene, Ancyra, Sardes hat, also in dem südlicheren Theile von Kleinasien statt gefunden hat.*) Thales hat zum ersten Male diese Sonnenfinsterniss den Ioniern vorausgekündigt, daher der Name derselben.

Diese Finsterniss wird oft von den Alten angeführt. Plinius (II, 9) setzt diese Schlacht und diese Sonnenfinsterniss in das 4. Jahr der 48. Olympiade, und zugleich in das Jahr 170 nach der Erbauung Roms. Eusebius setzt sie ein Mal in das 1. Jahr der 49. Olympiade, und ein anderes Mal in das 2. Jahr der 48. Olympiade. Solinus, Cicero u. a. erwähnen derselben auch und setzen sie sehr nahe in dasselbe Jahr, und man muss daher den Zeitpunkt derselben sehr nahe als von den Alten schon festgesetzt ansehen. Das Jahr 585 vor Christus trifft hiemit so nahe wie möglich zusammen, und in diesem Jahre ist eine Sonnenfinsterniss vorgekommen, die mit den geschichtlichen Ueberlieferungen vollständig übereinkommt. Die Astronomen und Chronologen der vorigen Jahrhunderte, denen es nicht gelingen wollte, diese Finsterniss mit den damaligen Tafeln in Uebereinstimmung zu bringen, haben häufig andere Jahre versucht, und sind sogar bis zum Jahre 610 v. Chr. gegangen. Auch im gegenwärtigen Jahrhundert sind Baily und Oltmanns auf dieses Jahr zurück gekommen, gegen welches sich aber Erhebliches einwenden lässt, wenn auch die einen oder anderen der

*) S. *Memoirs of the R. Astr. Society* Vol. XXVI. und *Phil. Transactions for the Year* 1853.

Digitized by Google

früheren Mondtafeln darauf hinweisen sollten. Dieses Jahr entfernt sich allzu sehr von dem von mehreren Schriftstellern des Alterthums mit grosser Uebereinstimmung angegebenen Zeitpunkt, und enthält auch in Bezug auf Thales eine grosse Unwahrscheinlichkeit. Es wird berichtet, dass unter den Weisen des Alterthums Thales der erste war, der in Folge von langen Beobachtungen und Rechnungen es dahin gebracht hatte, Sonnen- und Mondfinsternisse voraus verkünden zu können, und die in Rede stehende Sonnenfinsterniss ist die erste, die er voraus gesagt hat. Nun ist aber Thales ohngefähr im Jahre 640 v. Chr. geboren, und war also im Jahre 610 nur ohngefähr 30 Jahre alt, und bei den Schwierigkeiten, die zu jener Zeit das Problem der Vorausberechnung der Sonnen- und Mondfinsternisse haben musste, ist es sehr unwahrscheinlich, dass er es in so jugendlichem Alter schon gelöst haben sollte. Er war hingegen im Jahre 585 v. Chr. schon 55 Jahre alt, und stand also damals in einem Lebensalter, von welchem weit eher erwartet werden kann, dass ihm die Lösung seiner schwierigen Aufgabe gelungen sei. Das Jahr 610 v. Chr. muss aus diesen Gründen jedenfalls verworfen werden, übrigens geben meine Mondtafeln für dasselbe eine Sonnenfinsterniss, deren Zone der Totalität durch die Ukraine geht, und also gar nicht zu den historischen Ueberlieferungen passt.

Es darf hier nicht unerwähnt bleiben, dass Theon in seinem Commentar über den Almagest des Ptolomäus (p. 256 der Baseler Ausgabe von 1538) von einer Sonnenfinsterniss spricht, die im Hellespont und der anliegenden Gegend total war, während in Alexandrien höchstens vier Fünftel des Sonnendurchmessers sich verfinsterte. Er führt diese Finsterniss nach dem Buche des Hipparch über die Grössen und Abstände der Sonne und des Mondes an, ein Buch, welches jetzt nicht mehr vorhanden ist, und daher nicht eingesehen werden kann. Man hat Grund anzunehmen, dass diese Finsterniss keine andere ist, wie die des Thales, auch ist dieses von den Astronomen und Chronologen der vorigen Jahrhunderte so angenommen worden.

Ich werde jetzt das Resultat der Sonnenfinsterniss des Jahres 585 v. Chr. anführen, welches ich durch meine Mond- und Sonnentafeln erhalten habe, bemerke hiebei im Voraus, dass ich durch Hülfe meiner ecliptischen Tafeln alle Frühjahrsfinsternisse der Jahre —590 bis —580 untersucht, und darunter ausser der oben genannten keine einzige ge-

Digitized by Google

funden habe, die auch nur entfernt mit den historischen Ueberlieferungen über die Sonnenfinsterniss des Thales sich vereinigen lässt.

Jahr —584 Mai.

m. Gr. Z.	☾ Länge.	☾ Breite.	Aeq. H. Par.	☉ Länge.
$27^d\ 23^h\ 36^m$	57° 59′ 10″,1	+0° 8′ 36″,9	61′ 15″,2	59° 25′ 57″,7
28 0 48	58 44 36,4	12 49,3		
28 2 0	59 30 3,2	17 1,7	16,1	31 43,8
28 3 12	60 15 30,7	21 13,9		
28 4 24	61 0 58,9	25 26,0	16,9	37 29,9

und ausserdem für Mai $28^d\ 2^h\ 0^m$

☉ Decl. = + 20° 19′ 53″,5, ☉ Rad. vect. = 0,00762
h = + 12° 35′ 32″,3, Sch. d. Ecl. = 23° 46′ 26″,5
wahre Zeit — mittlere Zeit = + 9^m 8,00

Hiemit ergeben sich die folgenden Punkte der Centralcurve und der Grenzcurven der Totalität.

Stw.	Nördl. Gr. Curve.		Centralcurve.		Südl. Gr. Curve.	
	O. L. v. Gr.	Polhöhe.	O. L. v. Gr.	Polhöhe.	O. L. v. Gr.	Polhöhe.
+82°	26° 43′	+40° 5′	26° 28′	+38° 57′	26° 15′	+37° 50′
84	28 28	39 35	28 14	38 28	28 1	37 21
86	30 15	39 4	30 1	37 57	29 48	36 50
88	32 3	38 30	31 49	37 23	31 36	36 16
90	33 52	37 56	33 38	36 49	33 26	35 43
92	35 42	37 19	35 29	36 12	35 17	35 6

Nach diesem Resultat liegt die nördliche Hälfte der Zone der Totalität innerhalb des oben genannten Polygons, und bedeckt auch den südlichen Theil des Hellespont. Berechnet man ausserdem die grösste Phase für Alexandrien, so findet man diese = 10,0 Zolle, wobei ich bemerke, dass die obige Angabe des Theon, nemlich $\frac{4}{5}$ des Sonnendurchmessers einer Phase von 9,6 Zolle entspricht.

Berücksichtigen wir nun die obigen Unterschiede der Säcularänderungen, so wird zuerst $t = -23{,}84$, $z = 14{,}36$, $f + \omega = 3''3$ und hierauf

$$\delta z = +0''{,}02052$$
$$\delta II = -0''{,}2087$$
$$\delta\omega = -0''{,}1385$$

Digitized by Google

woraus erst $\delta f = + 0{,}2990$, und dann

$$\delta l = + 0{,}0903, \quad \delta b = + 51{,}7$$

folgt. Da nun für diese Sonnenfinsterniss die Gleichung

$$\delta\varphi = 1{,}83\,\delta l + 66{,}25\,\delta b$$

statt findet, so ergiebt sich

$$\delta\varphi = + 1^{0}\ 7{,}0$$

Diese Sonnenfinsterniss geht also nicht unbedeutend nach Norden, und die Zone der Totalität derselben tritt jetzt weit mehr in das mehrmals genannte Polygon ein, und bedeckt ausserdem fast den ganzen Hellespont. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zone der Totalität das Schlachtfeld bedeckt, ist also grösser geworden. Die grösste Phase in Alexandrien ist ein Paar Zehntelzolle kleiner geworden.

3) Die Sonnenfinsterniss des Agathokles.

Diodor giebt im 20. Capitel seiner historischen Ueberlieferungen die Nachricht von dieser Sonnenfinsterniss, die ich hier kurz gefasst und mit Bemerkungen über die Richtung der Fahrt des Agathokles versehen wieder zu geben versuchen werde. Die Karthager hatten fast ganz Sicilien, wenigstens die Küstenstriche davon, inne. Syrakus und Gela können als die einzigen Hafenstädte angesehen werden, die noch unter der Botmässigkeit des Agathokles standen. In Syrakus weilend, fasste dieser den mehr wie kühnen Entschluss, die Karthager in ihrem eigenen Lande anzugreifen, er rüstete zu diesem Zwecke Schiffe aus, und warb Truppen an. Diesen Entschluss hielt er aber sehr geheim, und da man ein so tollkühnes Unternehmen nicht vermuthen konnte, so entstand unter den Einwohnern die Meinung, dass er nach irgend einem Platze in Italien zu segeln beabsichtige. Die Karthager, die wohl von seinen Rüstungen gehört haben mochten, legten plötzlich eine starke Flotte vor den Hafen von Syrakus, um sein Vorhaben, sei es welches es wolle, zu vereiteln. Agathokles fand sich in der That dadurch so verhindert, dass er sein Unternehmen aufzuschieben genöthigt war. Als sich aber später Getreideschiffe der Stadt näherten, segelten die Karthager mit ihrer ganzen Flotte seewärts den Schiffen entgegen, und diesen Umstand benutzte Agathokles und lief auch mit schnellem Rudern aus. Er näherte sich der Flotte der Karthager, die in der Meinung, dass er den Getreideschiffen zu Hülfe kommen wolle, umwandten und

Digitized by Google

sich zur Seeschlacht rüsteten. Agathokles aber segelte den Karthagern vorbei, und gewann vor ihnen einen grossen Vorsprung. Die beiden Flotten hielten nun mit einander einen Wettkampf, der sich damit endigte, dass Agathokles in der Dunkelheit der Nacht seinen Verfolgern entwischte. Am anderen Tage trat nun eine solche Sonnenfinsterniss ein, dass es ganz Nacht wurde und man überall die Sterne sahe. Kurz vor der Landung des Agathokles in Afrika fand sich die Flotte der Karthager wieder bei ihm ein, konnte aber die Landung nicht verhindern.

Zu dieser Geschichtserzählung glaube ich Folgendes bemerken zu müssen. Die Getreideschiffe sind höchst wahrscheinlich von Gela, also von Süden, gekommen, die karthagische Flotte ist demnach nach Süden gesegelt, Agathokles ist ihr gefolgt, vor ihr vorbeigesegelt, folglich ist er auch nach Süden gesegelt, und nicht nach Norden, wie Bosanquet angenommen hat. Wollte man nun annehmen, dass Agathokles in der Nacht, wo er den Karthagern entschlüpfte, umgekehrt wäre und seine Fahrt nunmehr nach Norden gerichtet hätte, so meine ich, dass diese Annahme an sich so unwahrscheinlich ist, dass sie ohne Weiteres verworfen werden muss, denn wenn er die Absicht gehabt hätte, den nördlichen Weg einzuschlagen, so hätte er dieses gleich Anfangs gethan, und das jedenfalls missliche Vorbeisegeln vor der karthagischen Flotte unterlassen. Aber nehmen wir für einen Augenblick an, dass die Getreideschiffe von Norden gekommen seien, dann sind sowohl die Karthager wie Agathokles nach Norden gesegelt, und wir müssen aus den vorstehenden Motiven annehmen, dass letzterer den Weg nördlich um Sicilien eingeschlagen habe. Dass dieses nicht der Fall gewesen sein kann, zeigt der letzte Umstand der Geschichtserzählung. Kurz vor der Landung des Agathokles erschien die karthagische Flotte wieder, und zwar hinter der griechischen, denn es entstand wieder ein Wettlauf. Die Karthager sind also in derselben Richtung gesegelt wie Agathokles, und haben ihn eingeholt. Die beiden Flotten sind einander wieder zu Gesicht gekommen, während sie einander von der ersten Nacht an, in welcher Agathokles jenen entwischte, nicht gesehen hatten. Es entsteht hieraus die Frage, weshalb die Karthager, nachdem sie die griechische Flotte aus dem Gesicht verloren hatten, eiligst nach ihrem Lande segelten, und auf diese Frage weiss ich gar keine andere Antwort zu geben, als dass in ihnen der Gedanke auftauchte, Agatho-

Digitized by Google

kles habe mit dieser Fahrt gar keine andere Absicht, als den Krieg dort hinüber zu ziehen. Wären sie nun nördlich gesegelt, so ist nicht wohl einzusehen, weshalb dieser Gedanke sich der Karthager so fest bemächtigt hätte, dass sie sofort selbst diesen Weg einschlugen, da es im Norden in Italien viele Häfen gab, auf die Agathokles hätte hinzielen können. Bei der südlichen Richtung der Fahrt lag hingegen dieser Gedanke sehr nahe. Nehmen wir indess an, dass bei nördlicher Fahrt die Karthager auf diesen Gedanken gekommen seien, und daher eiligst selbst zurück segelten, um ihr Land zu beschützen, so ist es durchaus unannehmbar, dass sie den nördlichen bedeutend längeren Weg eingeschlagen haben würden, da ihnen alles daran gelegen sein musste, dem Agathokles zuvor zu kommen. Nun beträgt nach Airy von Syrakus der südliche Weg nach Cap Bona, wo Agathokles gelandet ist, ohngefähr 200 Seemeilen, der nördliche hingegen ohngefähr 330 Seemeilen, ist also mehr wie ein halb Mal länger. Die Karthager hätten unter den jetzt angenommenen Umständen nothwendig umkehren müssen, und wären lange vor den Griechen auf karthagischem Boden angelangt. Statt dessen lesen wir aber, dass Agathokles erst kurz vor seiner Landung von Jenen eingeholt wurde. Die Geschichtserzählung des Diodor weist daher jedenfalls dahin, dass Agathokles den südlichen Weg gesegelt ist. Dass Agathokles zu dieser Reise sechs Tage und Nächte gebraucht hat, während nach dem, was wir von der Schifffahrt der Alten wissen, die Strecke von 200 Seemeilen in vier Tagen und Nächten hätte abgemacht werden können, kann ich durchaus nicht als einen Grund für die nördliche Fahrt halten, wie Bosanquet meint, denn noch gegenwärtig sind nicht nur Dampfschiffe und viel mehr noch Segelschiffe nicht im Stande, eine und dieselbe Fahrt immer in gleichen Zwischenzeiten auszuführen, und dieses muss bei den alten Ruderschiffen nothwendig auch, und gewiss in noch grösserem Maasse, der Fall gewesen sein. Je nachdem sie den Ruderern durch Anwendung der Segel mehr oder weniger oder gar nicht zu Hülfe kommen konnten, müssen ihre Fahrten zwischen denselben Plätzen kürzere oder längere Zeit in Anspruch genommen haben. Ich meine noch schliesslich einen Grund für die Wahl der südlichen Richtung anführen zu können. Agathokles musste sich beim Auslaufen von Syrakus jedenfalls auf eine Verfolgung oder gar einen Kampf gefasst machen. Wäre er nun nach Norden in das enge Meer gesegelt, so

Digitized by Google

hätte er sich lange nicht so gut wehren können, wie in der offenen See, wo er durch keine Küsten in der Wahl seiner Vertheidigungsmittel beschränkt war. Ja er wäre Gefahr gelaufen, grade unter den bedenklichsten Umständen in die Nähe der damals mit abergläubiger Furcht angesehenen Strudel der Scylla und der Charybdis zu gerathen, und sich gegen zwei Feinde wehren zu müssen, von welchen der neue für wenigstens eben so bedeutend, wo nicht für bedeutender gehalten werden musste, wie der alte. Ich meine daher durch das Vorstehende zur Evidenz gebracht zu haben, dass Agathokles auf dieser Fahrt die südliche Richtung gesegelt ist.

Die Zeit der Sonnenfinsterniss des Agathokles ist längst festgestellt, und fällt in das Jahr 310 v. Chr., für diese geben meine Mond- und Sonnentafeln

Jahr —309 August.

m. Gr. Z.	☾ Länge.	☾ Breite.	Aeq. H. Par.	☉ Länge.
$14^d\ 17^h\ 36^m$	135° 13′ 28″,9	+0° 11′ 18″,4	61′ 0″,9	136° 28′ 27″,3
14 18 48	135 58 34,1	15 29,0		
14 20 0	136 43 38,1	19 39,2	60 59,3	34 12,8
14 21 12	137 28 40,8	23 49,1		
14 22 24	138 13 42,2	27 58,7	60 57,4	39 58,3

und ausserdem für August $14^d\ 20^h\ 0^m$

$\odot$ Decl. = + 16° 3′ 51″,7; $\odot$ Rad. vect. = 0,00214
h = — 17° 42′ 34″,5; Sch. d. Ecl. = 23° 44′ 8″,4
wahre Zeit — mittlere Zeit = — 2^m 20″,9

womit man die folgenden Curvenpunkte erhält,

Stw.	Nördl. Gr. Curve.		Centralcurve.	
	O.L. v. Gr.	Polhöhe.	O.L. v. Gr.	Polhöhe.
—76°	12° 5′	+35° 13′	12° 16′	+34° 22′
—74	13 49	35 36	13 59	34 45
—72	15 29	35 57	15 40	35 6
—70	17 9	36 17	17 20	35 25

Hiemit kommt die Zone der Totalität südlich von Sicilien zu liegen, und die nördliche Grenze derselben ohngefähr 40′ südlicher wie der Punkt, den Airy als den wahrscheinlichen Ort des Agathokles während

Digitized by Google

dieser Finsterniss bezeichnet hat. Allein vielleicht ist Agathokles in diesem Augenblick südlicher gewesen, da sich mit Gewissheit annehmen lässt, dass er auf dieser Fahrt vorzugsweise in den ersten vierundzwanzig Stunden seine Mannschaft zur grössten Eile angetrieben hat. Wenn man indess den von Airy angegebenen Punkt als den südlichsten annehmen will, den Agathokles zur Zeit der Finsterniss hat einnehmen können, so muss die Dunkelheit doch sehr gross gewesen sein, da für denselben, dessen geographische Lage die folgende ist,

$$\text{östl. L. v. Gr.} = 15^{\circ}\ 0'; \quad \text{Polhöhe} = +\ 36^{\circ}\ 33'$$

die grösste Phase 11,8 Zolle beträgt. Der Umstand der Erzählung, dass man die Sterne sahe, ist hiemit völlig vereinbar, da man bei einer Phase von 10 Zollen schon oft die grösseren Sterne gesehen hat.

Berücksichtigen wir nun die obigen Unterschiede der Säcularänderungen, so wird zuerst $t = -21{,}09$, $z = 16{,}93$, $f + \omega = 3''9$ und hierauf

$$\begin{aligned} \delta z &= +\ 0''01607 \\ \delta\Pi &= -\ 0''1634 \\ \delta\omega &= -\ 0''1084 \end{aligned}$$

woraus zuerst $\delta f = +\ 0''2323$, und dann

$$\delta l = +\ 0''0689; \quad \delta b = +\ 39''9$$

folgt. Da nun für diese Sonnenfinsterniss die Gleichung

$$\delta\varphi = -\ 11{,}34\,\delta l + 61{,}47\,\delta b$$

statt findet, so ergiebt sich

$$\delta\varphi = -\ 6''0$$

Die Zone der Totalität dieser Sonnenfinsterniss rückt also ein wenig nach Süden, aber so wenig, dass die eben erhaltene grösste Phase am Airy'schen Punkt sich nur um einige Hunderttheile eines Zolles ändern kann. Die obigen Aenderungen der Säcularänderungen haben also auf diese Finsternisse nur einen verschwindenden Einfluss.

4) Die Sonnenfinsterniss des Ennius.

Cicero erzählt in seinem Buche *De republica* I. 16, dass diese Finsterniss in die Reichsannalen eingetragen worden ist, dass Ennius sie richtig erklärt, und davon gesagt hat: *Anno CCC quinquagesimo fere post Romam conditam Nonis Junii soli luna obstitit et nox.* Diese Son-

Digitized by Google

nenfinsterniss gehört zu den am festesten begründeten des Alterthums, und kann nur diejenige sein, welche am 21. Juni des Jahres 400 v. Chr. vorgefallen ist. Dieses Jahr passt ganz gut zu der obigen Angabe des Ennius, (der übrigens seiner Jahresangabe ein »*fere*« zugefügt hat,) und dass der Tag hievon etwas abweicht, hat seinen Grund darin, dass in jener Zeit der römische Calender in grosse Unordnung gerathen war. Die Mond- und Sonnentafeln geben für diese Finsterniss die folgenden Data,

Jahr −399 Juni.

m. Gr. Z.	☾ Länge.	☾ Breite.	Aeq. H. Par.	☉ Länge.
$21^d\ 3^h\ 36^m$	82° 40′ 32″,6	+0° 31′ 46″,0	60′ 24″,6	83° 40′ 6″,0
21 4 48	83 24 45,2	35 50,0		
21 6 0	84 8 56,0	39 53,5	22,1	83 45 49,7
21 7 12	84 53 4,9	43 56,4		
21 8 24	85 37 11,9	47 58,6	19,3	83 51 33,4

und ferner für Juni $21^d\ 6^h\ 0^m$

$$\odot \text{ Decl.} = +23^0\ 36'\ 1''{,}1\ ;\ \odot \text{ Rad. vect.} = 0{,}00707$$
$$h = +2^0\ 44'\ 11''{,}1\ ;\ \text{Sch. d. Ecl.} = 23^0\ 44'\ 58''{,}1$$
$$\text{wahre Zeit} - \text{mittlere Zeit} = +5^m\ 17^s{,}23$$

Mit diesen Daten wird diese Finsterniss in Rom total, und die grösste Phase fand bei dem Stundenwinkel $7^h\ 31^m$, oder 5^m vor Sonnenuntergang statt, indem die Sonne an diesem Tage (mit Rücksicht auf die Strahlenbrechung) bei dem Stundenwinkel von $7^h\ 36^m$ unterging. Der Ausspruch des Ennius ist also hiemit vollständig erklärt.

Die obigen Unterschiede der Säcularänderungen geben hier, wo $t = -21{,}99$, $z = 17{,}0$, $f + \omega = 7°6$ ist,

$$\delta z = +0''{,}01746$$
$$\delta II = -0°1776$$
$$\delta\omega = -0°1178$$

hiemit wird $\delta f = +0°2521$ und

$$\delta l = +0°0745\ ;\ \delta b = +42''{,}9$$

Da ferner hier

$$\delta\varphi = +2{,}90\,\delta l + 96{,}40\,\delta b$$

ist, so wird

$$\delta\varphi = +1^0\ 21'{,}9$$

Digitized by Google

also die Curve der Totalität kommt mehr wie Einen Grad nördlicher zu liegen. Berechnet man nun mit diesen Aenderungen der Mondörter wieder die grösste Phase und die Zeit derselben für Rom, so findet man, dass die Finsterniss dort nicht mehr total wird, die grösste Phase jedoch 11,84 Zolle beträgt, und bei dem Stundenwinkel $7^h\ 24^m$, also 12^m vor Sonnenuntergang statt findet. Ich meine, dass hiemit auch der Ausspruch des Ennius vollständig erklärt ist, da doch eigentlich darin nicht von einer Totalität die Rede ist, und bei einer Phase von 11.84 Zolle, zumal in der Nähe des Horizonts eine beträchtliche Lichtabnahme statt gefunden haben muss.

5) Die Sonnenfinsterniss von Stiklastad.

König Olaf von Norwegen, später der Heilige genannt, befand sich im Kriege mit aufständigen Bauern, und fiel in einer Schlacht, die er ihnen bei Stiklastad lieferte. Während dieser Schlacht trat eine Sonnenfinsterniss ein, die der Erzählung der Chronikenschreiber nach bei wolkenlosem Himmel eine solche Dunkelheit verursachte, dass Freunde und Feinde sich nicht von einander unterscheiden konnten; diese Dunkelheit soll 1½ Stunden gedauert haben, ja ein Schriftsteller behauptet sogar, dass es ganz finster war von 9½ Vorm. bis 3 Nachm.*) Man sieht aus den letzten Behauptungen, dass die Erzählungen dieser Begebenheit nicht von Uebertreibungen frei sind, und es liesse sich darüber Mehreres anführen.

Für diese Finsterniss ergab sich aus den Mond- und Sonnentafeln

Jahr 1030 August.

m. Gr. Z.	☾ Länge.	☾ Breite.	Aeq. H. Par.	☉ Länge.
$30^d\ 23^h\ 36^m$	161° 36′ 5″,7	+0° 44′ 8″,6	58′ 16″,3	162° 55′ 59″,2
31 0 48	162 47 20,0	47 54,6		
31 2 0	162 58 37,0	51 40,4	19,9	163 1 48,7
31 3 12	163 39 56,6	55 26,0		
31 4 24	164 21 18,8	59 11,3	23,5	163 7 38,2

und ferner für August $31^d\ 2^h\ 0^m$

$\odot$ Decl. $= +\ 6^0\ 42'\ 0''{,}4$; $\odot$ Rad. vect. $= 0{,}00160$

$h = -\ 22^0\ 38'\ 30''{,}2$; Sch. d. Ecl. $= 23^0\ 33'\ 45''{,}9$

wahre Zeit $-$ mittlere Zeit $= +\ 2^m\ 15^s{,}31$

*) S. Ergänzungsheft zu Schum. Astr. Nachr.

Hiemit erhielt ich die folgenden Punkte der nördlichen Grenze der Totalität und der Centralcurve.

Stw.	Nördl. Gr. Curve.		Centralcurve.	
	O. L. v. Gr.	Polhöhe.	O. L. v. Gr.	Polhöhe.
38°	8° 2′	+64° 4′	7° 56′	+63° 43′
39	8 47	63 41	8 40	63 19
40	9 30	63 16	9 23	62 56
41	10 2	62 52	10 5	62 32
42	10 55	62 28	10 48	62 8
43	11 38	62 3	11 31	61 44
44	12 21	61 40	12 14	61 20

Die geographische Lage von Stiklastad ist nach Hansteen

östl. Länge v. Gr. = 11° 35′; Polhöhe = + 63° 48′

Diese ist zwar nur von einer Karte von Norwegen abgegriffen worden, und ich habe auf der Stieler'schen Karte dasselbe gefunden. Es ist nicht unmöglich, dass sie mit wesentlichen Fehlern behaftet ist, aber in Ermangelung einer sichereren Ortsbestimmung muss ich mich hier wieder derselben bedienen.

Die Vergleichung dieses Orts mit den vorstehenden Punkten der nördlichen Grenzcurve der Totalität zeigt, dass die kürzeste Entfernung Stiklastad's von derselben ohngefähr 1° 35′ beträgt, und daher die Sonnenfinsterniss auf dem Schlachtfelde nicht total wird. Die Berechnung der grössten Phase für Stiklastad giebt indess diese = 11,82 Zolle, und daher muss die Dunkelheit daselbst doch nicht unbeträchtlich gewesen sein, zumal da die Sonnenhöhe in diesem Augenblick nur 25° betrug.

Für die Berücksichtigung der obigen Aenderungen der Säcularänderungen wird hier $t = -7{,}70$, $z = 9'6$, $f + \omega = 10'1$, woraus zuerst

$$\delta z = +0'00214$$
$$\delta II = -0''02177$$
$$\delta\omega = -0''01444$$

und dann $\delta f = +0''02871$

$$\delta l = +0''00694\,;\quad \delta b = +4''5$$

folgt. Da nun hier

Digitized by Google

$$\delta\varphi = -\ 4{,}18\,\delta l + 205{,}2\,\delta b$$

ist, so ergiebt sich

$$\delta\varphi = +\ 13{,}7$$

d. h. die Zone der Totalität nähert sich Stiklastad um nahe einen Viertelgrad, und die grösste Phase daselbst muss sich um den entsprechenden Theil vergrössern.

Auf diese Sonnenfinsterniss hat die Abplattung der Erde eine grosse Wirkung. In allen vorstehenden Rechnungen ist sie $= \frac{1}{300}$ angenommen worden, nimmt man sie aber für die Gegend von Stiklastad $= \frac{1}{150}$ an, so rückt die Zone der Totalität 41′ nach Norden, und nähert sich also Stiklastad beträchtlich.

Es ergiebt sich aus den hier angestellten Untersuchungen, dass durch die obigen Unterschiede der Säcularänderungen die chronologischen Finsternisse noch etwas besser dargestellt werden, wie durch die ungeänderten Mondtafeln.

Ich bemerke noch, dass die Berechnung der Mond- und Sonnenörter, die im Vorstehenden gebraucht worden sind, einer neuen Revision unterworfen worden ist, die in Bezug auf die Mondörter die Herren Dr. Auwers und Berkiewicz die Güte gehabt haben auszuführen. Mit Ausnahme der zur Sonnenfinsterniss des Ennius gehörenden Oerter, wurden nur so unerhebliche Unterschiede (hie und da einige wenige Zehntelsecunden) von meinen früheren Rechnungen gefunden, dass ihre Berücksichtigung unnöthig erschien. Bei den zur Sonnenfinsterniss des Ennius gehörigen Oertern wurden grössere Unterschiede gefunden, und oben am gehörigen Orte berücksichtigt, ihre Wirkung auf das Resultat ist jedoch fast unmerklich.

Zusatz II.

Ermittelung des Einflusses von 12″ Veränderung der hundertjährigen Knotenbewegung auf dieselben Finsternisse.

320.

Es scheint mir nicht uninteressant, zu untersuchen, welche Wirkung eine kleine Aenderung in der in den Mondtafeln angewandten Knotenbewegung der Mondbahn, verbunden mit den obigen Aenderungen der Säcularänderungen, auf die im Vorhergehenden untersuchten Son-

Digitized by Google

nenfinsternisse haben wird, und werde daher das Resultat, welches ich dadurch erhalten habe, in seinen Einzelnheiten angeben. Es versteht sich von selbst, dass diese Aenderung der Knotenbewegung nicht grösser angenommen werden darf, wie die Beobachtungen des letzt verflossenen Jahrhunderts es vertragen, und 12″ möchten hiebei nicht zu gross befunden werden, da hiemit, wenn man die Knotenlänge der Mondtafeln für die gegenwärtige Zeit festhält, für die Zeit Bradley's höchstens $\pm 1''$ Veränderung der Mondbreiten in der Nähe der Knotenpunkte entsteht. Die angeführte Aenderung der Knotenbewegung verursacht keine Aenderung der Mondlänge, sondern blos die Aenderung

$$\delta(f+\omega) = -\,0^{0}00333\left(\tfrac{t-1830}{100}\right)$$

aus welcher eine entsprechende Aenderung der Mondbreite hervorgeht.

1) Die Sonnenfinsterniss von Larissa.

Hier wird

$$\delta(f+\omega) = +\,0^{0}0801,\quad \delta b = -\,25''8,\quad \delta\varphi = -\,29',3$$

und da eben $\delta\varphi = +\,7',8$ gefunden wurde, so wird die Totaländerung von φ

$$\delta\varphi = -\,21',5$$

Da die halbe Breite der Zone der totalen Finsterniss, auf dem Meridian gemessen, 21′ beträgt, und bei ungeänderten Elementen Larissa 1′ südlich von der Centralcurve liegt, so bleibt bei der hier angenommenen Aenderung der Knotenbewegung diese Sonnenfinsterniss in Larissa immer noch total, es wird nur die Lage von Larissa an die nördliche Grenze der Totalität verlegt, und hiemit ist immer noch der historischen Ueberlieferung Gnüge geleistet.

2) Die Sonnenfinsterniss des Thales.

Hiefür wird

$$\delta(f+\omega) = +\,0^{0}0810,\quad \delta b = +\,26''1,\quad \delta\varphi = +\,28',8$$

und da oben $\delta\varphi = +\,1^{0}\,7',0$ gefunden wurde, die Totaländerung von φ

$$\delta\varphi = +\,1^{0}\,35',8$$

Die Zone der totalen Verfinsterung liegt jetzt fast ganz in dem oben bezeichneten Airy'schen Polygon, und die nördliche Grenze derselben streift nahe an Boghaskoei vorüber, in dessen Nähe man in neuerer Zeit

Digitized by Google

in Felsen gehauene Denkmäler gefunden hat, die offenbar auf den Krieg zwischen den Lydern und Medern, auf die während der letzten Schlacht zwischen diesen Völkern vorgefallene Sonnenfinsterniss, und die Ereignisse des darauf geschlossenen Friedens hindeuten. Die Zone der totalen Verfinsterung erstreckt sich ferner über den ganzen Hellespont, und die grösste Phase in Alexandrien ergiebt sich = 9,4 Zolle, und passt vollständig zur Angabe des Theon.

3) Die Sonnenfinsterniss des Agathokles.

Hiefür bekommt man

$$\delta(f+\omega) = +\ 0{,}0719\,;\quad \delta b = +\ 23{,}2\,;\quad \delta\varphi = +\ 23{,}7$$

und da oben $\delta\varphi = -\ 6{,}0$ gefunden wurde, die Totaländerung von φ

$$\delta\varphi = +\ 17{,}7$$

Diese Sonnenfinsterniss rückt also jetzt auch nach Norden, und die nördliche Grenze derselben nähert sich dem von Airy bezeichneten Orte des Agathokles fast um die Hälfte. Da nun oben mit den unveränderten Elementen an diesem Orte die grösste Phase = 11,8 Zolle gefunden wurde, so muss sie jetzt = 11,9 Zolle werden.

4) Die Sonnenfinsterniss des Ennius.

Hier erhält man

$$\delta(f+\omega) = +\ 0{,}0749\,,\quad \delta b = +\ 23{,}9\,,\quad \delta\varphi = +\ 38{,}5$$

also da oben $\delta\varphi = +\ 1^{0}\ 21{,}9$ gefunden wurde, im Ganzen

$$\delta\varphi = +\ 2^{0}\ 0{,}4$$

Die Centralcurve entfernt sich also etwas mehr von Rom wie vorher, berechnet man aber die grösste Phase in Rom nach dieser Aenderung der Elemente, so ergiebt sich diese = 11,75 Zolle, also nur 0,09 Zoll kleiner wie vorher. Der Stundenwinkel, unter welchem die grösste Phase statt findet, wird jetzt = $7^{h}\ 25^{m}$, und die grösste Phase findet also 11^{m} vor Sonnenuntergang statt. Hiemit ist der Ausspruch des Ennius nicht minder gut erklärt wie vorher.

5) Die Sonnenfinsterniss von Stiklastad.

Hiefür erhält man

$$\delta(f+\omega) = +\ 0{,}0273\,,\quad \delta b = +\ 8{,}7\,,\quad \delta\varphi = +\ 29{,}8$$

Digitized by Google

also da oben $\delta\varphi = +\ 13''{,}7$ gefunden wurde, im Ganzen

$$\delta\varphi = +\ 43''{,}5$$

Die Zone der Totalität rückt also beträchtlich nach Norden und kommt Stiklastad viel näher, als mit den unveränderten Elementen. Die grösste Phase daselbst, die oben 11,82 Zolle gefunden wurde, wird nun = 11,9 Zolle werden.

Es werden daher mit der oben angenommenen Aenderung der Knotenbewegung die historischen Sonnenfinsternisse noch etwas besser dargestellt, ohne dass dadurch der Darstellung der Bradley'schen Beobachtungen ein wesentlicher Abbruch geschieht.

Die vorstehenden Resultate habe ich schon in einem vor Kurzem in den »Berichten« dieser Gesellschaft abgedruckten, »Einige Bemerkungen über die Säcularänderung der mittleren Länge des Mondes« betitelten, Aufsatze kurz angezeigt, und auch dort noch zwei Sonnenfinsternisse des Mittelalters in Betracht gezogen, in Betreff deren ich hier auf den genannten Aufsatz verweise.

Zusatz III.

Vergleichung der Säcularänderung der mittleren Mondlänge von Adams und Delaunay mit denselben Finsternissen.

321.

In den *Comptes rendus* der Pariser Akademie der Wissenschaften Tome L. No. 10 habe ich bereits diese Vergleichung gegeben, ich werde sie aber hier unter einem etwas veränderten Gesichtspunkte wieder vornehmen. Dort war ich von dem Grundsatz ausgegangen, dass man auf jeden Fall die Sonnenfinsterniss von Larissa so darstellen müsse, dass sie total werde, und da dieses mit der genannten Säcularänderung unmöglich war, so blieb kein anderes Mittel übrig als die Knotenbewegung entsprechend zu ändern. Die dazu erforderliche Aenderung dieser fiel aber so gross aus, dass damit den neueren Beobachtungen auf keine Weise Gnüge geleistet werden konnte. Sie betrug $185''{,}3$ in hundert Jahren, und muss daher schon 10 Jahre vor und nach der Epoche eine Aenderung von $1''{,}7$ in den Mondbreiten hervorbringen. Aber nicht nur die neueren Mondbeobachtungen, sondern auch

Digitized by Google

die übrigen chronologischen Finsternisse wurden undarstellbar, die Lage der letzteren auf der Erdoberfläche erlitt so grosse Abänderungen, dass gar keine Uebereinstimmung mit den geschichtlichen Ueberlieferungen mehr stattfand.

Hier werde ich nun davon absehen durch eine Aenderung der Knotenbewegung in Verbindung mit der Säcularänderung von Adams und Delaunay irgend eine der chronologischen Finsternisse mit den Ueberlieferungen in Uebereinstimmung zu bringen, sondern werde blos untersuchen, welche Lage diese Finsternisse auf der Erdoberfläche annehmen, wenn man statt der in den Mondtafeln angewandten Säcularänderungen, die der mittleren Länge von Adams und Delaunay, und die des Perigäums und der Knoten wie oben anwendet. Für die Säcularänderung der mittleren Länge ist also die Abänderung $-6''t^2$, für die des Perigäums $-1''{,}322\,t^2$, und für die des Knotens $-0''{,}445\,t^2$, woraus

$$\delta z = -4''{,}678\,t^2,\ \delta\pi = -1''{,}322\,t^2,\ \delta\omega = -0''{,}877\,t^2$$

sich ergiebt, von welchen die beiden letzten dieselben sind wie vorher. Ehe wir weiter gehen, muss noch ein Umstand in Betracht gezogen werden, welcher im Vorhergehenden wegen der Kleinheit der Aenderungen ausser Betracht gelassen werden konnte, hier aber wegen der grossen Aenderung $-4''{,}678\,t^2$ mit berücksichtigt werden soll. Jede Aenderung der Säcularänderungen muss strenge genommen auch in den Argumenten der Störungen berücksichtigt werden, da sie diese auch ändert, und vor allen Dingen wird sie die grössten Ungleichheiten ändern. Ich werde daher bei der jetzt vorzunehmenden Untersuchung auch die Veränderungen berücksichtigen, die die obigen Aenderungen der Säcularänderungen in der Evection, der Variation und der parallactischen Ungleichheit hervorbringen; die Aenderungen der übrigen Störungsglieder hier auch zu berücksichtigen ist überflüssig, da sie zu klein ausfallen. Die eben genannten Ungleichheiten sind die folgenden,

$$\begin{aligned} &+4467''\sin(g - 2g' + 2(\omega - \omega')) \\ &+2145\ \sin(2g - 2g' + 2(\omega - \omega')) \\ &-125\ \sin(g - g' + \omega - \omega') \end{aligned}$$

und aus den obigen Aenderungen der Säcularänderungen folgt

$$\delta g = -4''{,}678\,t^2;\ \ \delta(\omega - \omega') = -1''{,}322\,t^2$$

Hiemit wird die Aenderung der drei Ungleichheiten

Digitized by Google

$$-\tfrac{4467''}{206265''}\,(7''{,}322\,t^2)\cos(g-2g'+2(\omega-\omega'))$$
$$-\tfrac{2145}{206265}\,(12''{,}000\,t^2)\cos(2g-2g'+2(\omega-\omega'))$$
$$+\tfrac{125}{206265}\,(6''{,}000\,t^2)\cos(g-g'+\omega-\omega')$$

aber in der mittleren Conjunction ist

$$g-g'+\omega-\omega'=0$$

folglich

$$g-2g'+2(\omega-\omega')=-g$$

Hier, wo es sich nur um kleine Glieder handelt, kann man diese Gleichungen auf den ganzen Verlauf einer Sonnenfinsterniss ausdehnen, und sich ausserdem erlauben in der zweiten die wahre Anomalie f statt der mittleren g zu setzen, die Summe der drei Aenderungen wird daher

$$-0''{,}158\,t^2\cos f-0''{,}121\,t^2$$

und wenn man diese zum obigen Werthe von δz addirt, so wird die vollständige Aenderung des Arguments z der Mondtafeln

$$\delta z=-4''{,}799\,t^2-0''{,}158\,t^2\cos f$$

oder in Theilen des mittleren Sonnentages, und wenn die Epoche hinzugefügt wird,

$$\delta z=-0^d{,}0001020\left(\tfrac{t-1800}{100}\right)^2-0^d{,}0000034\cos f\left(\tfrac{t-1800}{100}\right)^2$$

hiezu kommt noch wie oben

$$\delta\Pi=-0^0{,}0003672\left(\tfrac{t-1800}{100}\right)^2$$
$$\delta\omega=-0^0{,}0002436\left(\tfrac{t-1800}{100}\right)^2$$

und es soll jetzt untersucht werden, welche Wirkung diese Aenderungen auf die obigen Finsternisse ausüben.

1) Die Sonnenfinsterniss von Larissa.

Hiefür ist wieder $t=-23{,}56$, $z=9^d{,}60$, $f=280^0{,}92$, $f+\omega=175^0{,}8$, und hieraus folgt

$\delta z=-0^d{,}05699$	$\delta l=-58'\ 3''{,}4$
$\delta f=-0^0{,}7637$	$\delta b=+\ 4\ 49{,}5$
$\delta(f+\omega)=-0^0{,}8990$	$\delta\pi=\quad -2{,}46$

wo $\delta\pi$ die Aenderung der Horizontalparallaxe des Mondes bezeichnet. Bei diesen grossen Aenderungen der Mondlänge und Breite kann es

Digitized by Google

sich wohl ereignen, dass die oben bei den weit kleineren Aenderungen angewandte Gleichung zwischen den Aenderungen des Mondorts und der Punkte der Centralcurve nicht mehr ein Resultat von gewünschter Genauigkeit giebt, und ich habe sie daher hier nicht angewandt. Ich habe vielmehr die oben gegebenen Aenderungen an die im Zusatz I. angeführten, aus den Mondtafeln folgenden, Oerter angebracht, und damit von Neuem einige Punkte der Centralcurve berechnet. Diese erhielt ich wie folgt.

Stw.	O. L. v. Gr.	Polhöhe
104°	41° 18′	+26° 51′
105°	42 50	26 39
106°	43 52	26 8

Vergleicht man diese mit den oben berechneten Punkten der Centralcurve, so zeigt sich dass diese auf dem Meridian von Larissa 9° 53′ nach Süden gegangen ist. Schon aus diesem Grunde wird unter den jetzt angenommenen Säcularänderungen diese Sonnenfinsterniss in Larissa so klein, dass sie unmöglich die von Xenophon beschriebene Wirkung gehabt haben kann, sie kann höchstens 8 Zolle betragen haben. Aber es kommt noch ein Umstand hinzu, der ihre Wirkung abschwächt. An diesem Tage ging die Sonne bei einem Stundenwinkel von 105° in Larissa unter, und die eben berechneten Curvenpunkte fallen daher für Larissa zum Theil nach Sonnenuntergang. Die Sonnenfinsterniss ist also dort nur zum Theil gesehen worden, und muss aus diesem Grunde noch mehr unbedeutende Wirkung gehabt haben. Die Säcularänderung, die hier untersucht wird, passt also nicht.

2) Die Sonnenfinsterniss des Thales.

Hier haben wir wieder

$$t = -23{,}84;\quad z = 14{,}36;\quad f = 348°0,\quad f + \omega = 3°3$$

und bekommen damit

$$\delta z = -0{,}05986;\quad \delta l = -1° 4′ 51″6$$
$$\delta f = -0°8723;\quad \delta b = -\ 5\ 25{,}8$$
$$\delta(f+\omega) = -1°0180;\quad \delta\pi = -\ 0{,}56$$

Durch directe Rechnung ergeben sich hiemit die folgenden Punkte der Centralcurve.

Digitized by Google

Stw.	O. L. v. Gr.	Polhöhe
115°	31° 15′	+28° 30′
117	33 26	27 35
119	35 40	26 40

Diese Sonnenfinsterniss ist auf dem Meridian 9° 19′ nach Süden gegangen, und trifft die Längengrade des Schlachtfeldes erst nach Sonnenuntergang, welcher bei einem Stundenwinkel von 108° erfolgte. Sie ist also auf dem Schlachtfelde entweder ganz unsichtbar, oder wenigstens sehr unbedeutend gewesen, und kann die beschriebene Wirkung nicht gehabt haben. Mit der Nachricht bezüglich des Hellesponts und Alexandriens trifft sie eben so wenig ein. Die hier angewandte Säcularänderung kann also auch diese Sonnenfinsterniss den Ueberlieferungen gemäss nicht darstellen.

3) Die Sonnenfinsterniss des Agathokles.

Hier wird

$$t = -21{,}09\,;\quad z = 16{,}93\,,\quad f = 25°47\,,\quad f+\omega = 3°9$$

und hiemit

$$\delta z = -0{,}'04673\,; \qquad \delta l = -50'\,20{,}''4$$
$$\delta f = -0°6756\,; \qquad \delta b = -\ 4\ 12{,}5$$
$$\delta(f+\omega) = -0°7840\,; \qquad \delta\pi = +0{,}91$$

und auf dieselbe Art wie vorher ergeben sich die folgenden Punkte der Centralcurve.

Stw.	O. L. v. Gr.	Polhöhe
−47°	13° 50′	+38° 35′
−45	15 19	38 39
−43	16 47	38 43

Bei dieser Sonnenfinsterniss rückt die Centralcurve auf dem Meridian 3° 34′ nach Norden, kommt nördlich von Sicilien im Tyrrhenischen Meer zu liegen, und geht durch die Ligurischen Inseln. Die südliche Grenzcurve liegt ohngefähr 0°7 nördlich von Syrakus. Diese Sonnenfinsterniss kann daher mit der hier angewandten Säcularänderung den Ueberlieferungen auch nicht gnügen, da mit Sicherheit angenommen werden kann, dass Agathokles südlich um Sicilien gesegelt ist.

Digitized by Google

4) Die Sonnenfinsterniss des Ennius.

Hier ist

$$t = -21{,}99\,;\quad z = 17{,}04\,;\quad f = 41°45.\quad f+\omega = 7°6$$

und hiemit wird

$$\begin{aligned} \delta z &= -0'{,}05055\,; & \delta l &= -54'\,27'{,}0 \\ \delta f &= -0°7299\,; & \delta b &= -\ 4\ 31{,}2 \\ \delta(f+\omega) &= -0°8477\,; & \delta\pi &= +1{,}04 \end{aligned}$$

Berechnet man hiemit die Zeit des Anfangs dieser Sonnenfinsterniss überhaupt, mit anderen Worten die Zeit der ersten äusseren Ränderberührung in Rom, so findet man $8^h\ 5^m$ w. Z., während die Sonne an diesem Tage in Rom um $7^h\ 36^m$ w. Z. unterging. Diese Sonnenfinsterniss wird also mit der hier angewandten Säcularänderung in Rom völlig unsichtbar. Ich füge hinzu, dass ich die Finsternisse der anliegenden Jahre durch die ecliptischen Tafeln untersucht, aber keine gefunden habe, die mit der hier angewandten Säcularänderung der Ueberlieferung entsprechen könnte.

5) Die Sonnenfinsterniss von Stiklastad.

Hier wird

$$t = -7{,}70,\quad z = 9{,}64.\quad f = 281°54,\quad f+\omega = 10°1$$

woraus

$$\begin{aligned} \delta z &= -0'{,}006089\,; & \delta l &= -6'\,12'{,}2 \\ \delta f &= -0°0816\,; & \delta b &= -\ 30{,}5 \\ \delta(f+\omega) &= -0°0960\,; & \delta\pi &= -0{,}26 \end{aligned}$$

folgt, und sich die folgenden Punkte der Centralcurve ergeben.

Stw.	O. L. v. Gr.	Polhöhe
46°	10° 50′	+60° 52
47	11 32	60 26
48	12 14	60 1

Hier wird die Centralcurve 1° 18′ südlicher, entfernt sich also mehr vom Schlachtfelde, woselbst ihre Wirkung also wesentlich abgeschwächt wird.

Digitized by Google

Man sieht hieraus, dass mit der Säcularänderung der mittleren Länge von Adams und Delaunay keiner der chronologischen Finsternisse Gnüge geleistet werden kann, wenn man nicht zugleich zu anderen Annahmen seine Zuflucht nimmt. Es kann gar nicht daran gedacht werden, eine Uebereinstimmung durch Aenderungen der Bewegungen der Knoten, des Perigäums oder der mittleren Länge herbei zu führen, denn um diesen Zweck zu erreichen, müssten diese Aenderungen weit grösser angenommen werden, wie die neueren Beobachtungen vertragen. Dagegen kann man allerdings eine Uebereinstimmung herbeiführen, wenn man die Umdrehung der Erde um ihre Achse ungleichförmig, und zwar so annimmt, dass jeder Tag um den 51billionsten Theil länger ist, wie der nächstvorhergehende, wie ich in dem am Ende des Zusatzes II. angeführten Aufsatze nachgewiesen habe.

Digitized by Google

H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 24 Ngr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Erste Abhandlung: über die Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 2 Thlr.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. No. II. Mit 13 Tafeln. 1857. 1 Thlr. 10 Ngr.

SECHSTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Vierter Band. Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. Preis 7 Thlr. 15 Ngr.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Zweite Abhandlung. 1857. 1 Thlr. 10 Ngr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung: über die thermoelektrischen Eigenschaften des Boracites. 1857. 24 Ngr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Dritte Abhandlung: über Elektricitätserregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen. 1858. 16 Ngr.

P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Tafeln. 1858. 2 Thlr.

G. T. FECHNER, Über ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 20 Ngr.

W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Dikotyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zellentheilung wachsendem Endosperm. Mit 27 Tafeln. 1859. 2 Thlr. 20 Ngr.

SIEBENTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Fünfter Band. Mit 30 Tafeln. hoch 4. 1861. Preis 8 Thlr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung: über das Verhalten der Weingeistflamme in elektrischer Beziehung. 1859. 20 Ngr.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Dritte Abhandlung. 1859. 2 Thlr. 12 Ngr.

G. T. FECHNER, Über einige Verhältnisse des binocularen Sehens. 1860. 1 Thlr. 26 Ngr.

G. METTENIUS, Zwei Abhandlungen: I. Beiträge zur Anatomie der Cycadeen. Mit 5 Tafeln. II. Über Seitenknospen bei Farnen. 1860. 1 Thlr.

W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Tafeln. 1861. 2 Thlr. 20 Ngr.

ACHTER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Dritter Band. Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1861. Preis 8 Thlr.

H. C. VON DER GABELENTZ, die Melanesischen Sprachen nach ihrem grammatischen Bau und ihrer Verwandtschaft unter sich und mit den Malaiisch-Polynesischen Sprachen. 1860. 2 Thlr. 20 Ngr.

G. FLÜGEL, die Classen der Hanefitischen Rechtsgelehrten. 1860. 24 Ngr.

JOH. GUST. DROYSEN, das Stralendorffische Gutachten. 1860. 24 Ngr.

H. C. VON DER GABELENTZ, über das Passivum. Eine sprachvergleichende Abhandlung. 1860. 28 Ngr.

TH. MOMMSEN, die Chronik des Cassiodorus Senator v. J. 519 n. Chr. 1861. 1 Thlr. 10 Ngr.

OTTO JAHN, über Darstellungen griechischer Dichter auf Vasenbildern. Mit 8 Tafeln. 1861. 2 Thlr.

NEUNTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Sechster Band. Mit 10 Tafeln. hoch 4. 1864. Preis 6 Thlr. 12 Ngr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfte Abhandlung. Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Erster Theil. 1861. 16 Ngr.

W. G. HANKEL, Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. 1862. 12 Ngr.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Erste Abhandlung. 1862. 3 Thlr.

G. METTENIUS, über den Bau von Angiopteris. Mit 10 Tafeln. 1863. 1 Thlr. 14 Ngr.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. 1864. 1 Thlr.

ZEHNTER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Vierter Band.

Hiervon ist bis jetzt erschienen:

J. OVERBECK, Beiträge zur Erkenntniss und Kritik der Zeusreligion. 1861. 28 Ngr.

G. HARTENSTEIN, Locke's Lehre von der menschlichen Erkenntniss in Vergleichung mit Leibnitz's Kritik derselben dargestellt. 1861. 1 Thlr. 10 Ngr.

WILHELM ROSCHER, Die deutsche Nationalökonomik an der Gränzscheide des sechzehnten und siebzehnten Jahrhunderts. 1862. 20 Ngr.

JOH. GUST. DROYSEN, Die Schlacht von Warschau 1656, 1863. 1 Thlr. 14 Ngr.

ELFTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Siebenter Band.

Hiervon ist bis jetzt erschienen:

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Zweite Abhandlung. 1864. 3 Thlr.

Leipzig, Juli 1864. **S. Hirzel.**

Digitized by Google

ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

ERSTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Erster Band. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. broch. Preis 4 Thlr. 16 Ngr.

A. F. MÖBIUS, über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. 24 Ngr.

P. A. HANSEN, allgemeine Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. 12 Ngr.

A. SEEBECK, über die Querschwingungen elastischer Stäbe. 10 Ngr.

C. F. NAUMANN, über die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Cornens. 10 Ngr.

W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 1 Thlr.

F. REICH, neue Versuche mit der Drehwaage. 20 Ngr.

M. W. DROBISCH, Zusätze zum florentiner Problem. 16 Ngr.

W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus.) 20 Ngr.

ZWEITER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Erster Band. Mit einer Karte. hoch 4. 1850. broch. Preis 6 Thlr.

A. WESTERMANN, Untersuchungen über die in die attischen Redner eingelegten Urkunden. 2 Abhandlungen. 1 Thlr.

F. A. UKERT, über Dämonen, Heroen und Genien. 24 Ngr.

TH. MOMMSEN, über das römische Münzwesen. 1 Thlr. 20 Ngr.

E. v. WIETERSHEIM, der Feldzug des Germanicus an der Weser. 1 Thlr.

G. HARTENSTEIN, Darstellung der Rechtsphilosophie des Hugo Grotius. 20 Ngr.

TH. MOMMSEN, über den Chronographen vom Jahre 354. Mit einem Anhange über die Quellen der Chronik des Hieronymus. 1 Thlr. 10 Ngr.

DRITTER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Zweiter Band. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1857. broch. Preis 7 Thlr. 10 Ngr.

W. ROSCHER, zur Geschichte der Englischen Volkswirthschaftslehre im sechzehnten und siebzehnten Jahrhundert. 1851. 1 Thlr.

——— Nachträge. 1852. 8 Ngr.

J. G. DROYSEN, Eberhard Windeck. 1853. 24 Ngr.

TH. MOMMSEN, Polemii Silvii laterculus. 1853. 16 Ngr.

——— Volusii Maeciani distributio partium. 1853. 6 Ngr.

J. G. DROYSEN, zwei Verzeichnisse, Kaiser Karls V. Lande, seine und seiner Grossen Einkünfte und anderes betreffend. 1854. 20 Ngr.

TH. MOMMSEN, die Stadtrechte der latinischen Gemeinden Salpensa und Malaca in der Provinz Baetica. 1855. 1 Thlr.

——— Nachträge. 1855. 16 Ngr.

FRIEDRICH ZARNCKE, Die urkundlichen Quellen zur Geschichte der Universität Leipzig in den ersten 150 Jahren ihres Bestehens. 1857. 3 Thlr.

VIERTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Zweiter Band. Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. br. Preis 6 Thlr. 20 Ngr.

M. W. DROBISCH, über musikalische Tonbestimmung und Temperatur. 1852. 1 Thlr.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Mit 18 Tafeln. 1852. 1 Thlr. 10 Ngr.

P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 1 Thlr.

——— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2+r'^2-2rr'(\cos U\cos U'+\sin U\sin U'\cos J)$. 1854. 1 Thlr.

O. SCHLÖMILCH, über die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 8 Ngr.

——— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. 16 Ngr.

P. A. HANSEN, die Theorie des Aequatoreals. 1855. 24 Ngr.

C. F. NAUMANN, über die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 10 Ngr.

A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. 1855. 20 Ngr.

FÜNFTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Dritter Band. Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. br. Preis 6 Thlr. 12 Ngr.

M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 12 Ngr.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 1856. 1 Thlr. 20 Ngr.

R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. 1856. 16 Ngr.

Digitized by Google

11914

G. METTENIUS
MITGLIED DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ÜBER DIE

HYMENOPHYLLACEAE.

Des VII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° II.

MIT 5 TAFELN.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1864.

Digitized by Google

Vom Verfasser übergeben den 28. Mai 1864.
Der Abdruck vollendet den 3. September 1864.

Digitized by Google

ÜBER

DIE HYMENOPHYLLACEAE.

VON

G. METTENIUS.

Digitized by Google

Eine der auffallendsten Erscheinungen unter den Farnen sind ohne Zweifel die Hymenophyllaceae; durch die Zusammensetzung ihres Blattparenchyms aus einer oder aus wenigen (2—4) Zelllagen stehen dieselben nicht allein unter den Farnen, sondern unter den Gefässpflanzen überhaupt fast einzig da und schliessen sich in dieser Beziehung vielmehr niederen Pflanzen an, bei welchen Gefässbündel entweder nur angedeutet sind oder gänzlich fehlen.

Diese Combination von Gefässbündeln mit einer so einfachen Ausbildung des Blattparenchyms bei den Hymenophyllaceis muss aber um so auffallender erscheinen, als diese Gewächse nach Maassgabe des Ringes ihrer Sporangien den Cyatheaceis sich anschliessen, welche nicht nur durch die complicirteste Structur, sondern auch die colossalsten Dimensionen ihrer vegetativen Organe sich am weitesten unter den Farnen von denselben entfernen.

Aber auch in der Ausbildung der Fruchthaufen an einem über die Blattsubstanz sich fortbildenden Nerven, der Entwickelung der Sporangien in absteigender Folge an diesem, der Erweiterung und Fortbildung des den fertilen Gefässbündel umgebenden Gewebes zu einer den Fruchthaufen umscheidenden Hülle, sind Verhältnisse ausgesprochen, die ebensowenig als die Entwickelung eines confervenartigen Vorkeims nach dem jetzigen Stand unserer Kenntnisse bei anderen Farnen wiederkehren.

Vermittelt auch die Gattung Loxsoma in mehrfacher Beziehung, sowohl durch die complicirte Structur ihres mit Spaltöffnungen versehenen Blattes, wie auch die Bildung ihres Schleiers den Uebergang zu anderen Farnen, so weichen doch die Ansichten über die systematische Stellung der Hymenophyllaceae weit aus einander, und während die einen nach Maassgabe derjenigen Organe, die bei Farnen in her-

Digitized by Google

kömmlicher Weise zur Begründung von Abtheilungen ausreichend erachtet werden, ihnen eine solche an der durch diese Organe vorgeschriebenen Stelle anweisen, tragen andere und unter diesen grade diejenigen beiden Forscher,[1]) welche diese Gewächse am sorgfältigsten untersuchten, kein Bedenken, die Hymenophyllaceae von den Farnen auszuschliessen und zu einer denselben gleichwerthigen Abtheilung zu erheben.

Indess schienen nicht nur zur Prüfung der im Allgemeinen den Hymenophyllaceis einzuräumenden Stellung neue Untersuchungen wünschenswerth, sondern es waren solche auch nothwendig, um die Natur verschiedener bei der Eintheilung der Hymenophyllaceae in den Vordergrund gezogener Gebilde, z. B. der Scheinnerven zu ermitteln; es war endlich, nachdem man die Unzulänglichkeit der der äusseren Ausbildung des Blattes behufs der Unterscheidung der Arten entnommenen Merkmale nachgewiesen hatte, vielmehr auch in dieser Beziehung der anatomischen Structur des Parenchyms der Blätter den Vorzug gegeben, ja dieselbe zum Prüfstein der Identität oder Verschiedenheit zweier Arten erhoben hatte, ein unabweisbares Bedürfniss, diese Structurverhältnisse sowohl überhaupt in sorgfältigerer Weise zu untersuchen, als auch die Beständigkeit oder die Schwankungen derselben zu constatiren.

Von diesen Gesichtspunkten aus wurden die folgenden Untersuchungen angestellt, deren Resultate indess, je nachdem es erforderlich schien, in grösserer oder geringerer Ausführlichkeit mitgetheilt werden.

§ 1.

Der Stamm der Hymenophyllaceae besitzt im Allgemeinen einen mit der Anordnung der Blätter Hand in Hand gehenden Wuchs, insofern er gewöhnlich bei zweizeiliger Anordnung derselben in horizontaler Richtung hinkriecht, bei mehrzeiliger Blattstellung hingegen in schräger Richtung ansteigt oder eine aufrechte Haltung annimmt; in dem ersten Fall hat derselbe gewöhnlich gedehnte, seltner, wie bei Tricho-

---

1) Presl, Hymenophyllaceae, Prag 1843, und Van den Bosch, Inleiding tot d. Kennis d. Hymenophyllaceae, und Eerste Beidräge tot d. Kennis der Hymenoph. in Versl. en Mededeel. d. K. Akademie. Amsterd. 1861. XI. 300; auch im Journ. d. Botanique Neerland. 1861. 1. p. 147.

Digitized by Google

manes maximum, Hymenophyllum fuciforme gestauchte Internodien; in dem zweiten Fall sind gewöhnlich sämmtliche Internodien verkürzt, oder es wechseln kürzere und längere, z. B. T. Arbuscula, Martiusii, und sind nur in seltenen Fällen, in welchen der Stamm zugleich den kriechenden Wuchs annimmt, sämmtliche Internodien gedehnt, z. B. T. crispum var. accedens.

Es kommt deshalb ihrer Beständigkeit entsprechend der Anordnung der Blätter eine durchgreifende, der Richtung des Stammes und der Länge seiner Internodien eine nur untergeordnete Bedeutung zu, und zwar ist die zweizeilige Blattstellung Loxsoma, allen Arten von Hymenophyllum und der grösseren Hälfte der Arten von Trichomanes eigen, und werden vielzeilige Blätter nur bei der kleineren Hälfte der letzteren Gattung angetroffen.

§ 2.

Wie bei einer andern Veranlassung[1]) dargethan wurde, kommt bei den Hymenophyllaceis einem jeden Blatt eine Seitenknospe zu und entspringt dieselbe

1) aus dem Stamme oberhalb und vor der Mitte der Blattachsel,
2) aus dem Stamme vorn und aussen von dem Insertionspunkt des Blattes oder neben demselben,
3) auf der Mittellinie des Blattstielgrunds.[2])

Ersteres ist der Fall bei Arten, deren Blätter in zwei diametral einander gegenüber liegenden Zeilen angeordnet sind, z. B. T. Ankersii, pedicellatum, radicans; das zweite wird angetroffen bei der Mehrzahl der Hymenophyllaceae mit zweizeiligen Blättern, deren Insertionspunkte der Mittellinie des Stammrückens näher liegen; die dritte Anordnung charakterisirt vielleicht sämmtliche Hymenophyllaceae mit mehrzeiligen Blättern, z. B. T. pinnatum, Javanicum, crispum, ist hingegen bei Arten mit mehrzeiligen Blättern eine seltnere Erscheinung, z. B. T. proliferum, reniforme, H. fuciforme.

Adventivknospen fehlen bei den Hymenophyllaceis gänzlich.

Blattständige Knospen treten auf:

---

1) Abh. d. K. Gesellschaft d. Wissenschaften. VII. 611 u. f.

2) Ein 4. Fall scheint bei Loxsoma, nach der Abbildung Hooker's (Gard. f. 31) zu schliessen, vorzukommen.

Digitized by Google

1) am Blattstiel oder doch am Anfang der Blattspindel,

2) an der über die Blattfläche verlängerten Blattspindel.

Ersteres ist der Fall bei einer kleinern Gruppe von Trichomanes,[1] deren bekanntester Repräsentant T. proliferum ist. Bei diesem treten diese Knospen stets auf der oberen Seite des Blattstiels, einzeln, seltener zu mehreren beisammen stehend, auf, entwickeln gewöhnlich sehr rasch, bevor ihr Stammtheil deutlicher hervortritt, ein Blatt, so dass ein Blatt unmittelbar aus dem andern hervorzusprossen und die Theilung des Blatts eine ganz paradoxe zu sein scheint, zumal dann, wenn die Knospe am Grund der Blattspindel entspringt und das derselben entspriessende Blatt die Grösse und Theilung der Fläche ihres Mutterblatts erreicht. Doch fehlt es nicht an Fällen, in welchen diese Blattstielständigen Knospen kurze Rhizome mit mehreren Blättern entwickeln und diese sind ganz insbesondere zur Aufklärung dieser Sprossungen geeignet.

In dem gewählten Beispiel bringt nicht selten das Blatt der letzten Generation allein Fruchthaufen und hat selbst die Fähigkeit, einem neuen Spross den Ursprung zu geben, eingebüsst, an andern Exemplaren aber fructificirt bereits das erste Blatt und sprosst ein fruchttragendes Blatt aus dem andern hervor; bei andern Arten wird letzteres Verhalten zur Regel.

Während diese Blattstiel-ständigen Sprosse in übereinstimmender Weise bei andern Farnen nicht wiederkehren, entspricht die zweite Art der hier zu erörternden Knospen der vieler andern Farne; dieselbe besteht darin, dass an der verlängerten mit abnehmenden oder fehlschlagenden Fiedern besetzten Blattspindel eine oder in geringen Entfernungen von einander mehrere Knospen entstehen. So bei T. diversifrons, spicatum, botryoides, pinnatum, Arten, die ebenfalls alle einer engen Verwandtschaft angehören.

Bei anderen Arten von Trichomanes, bei Loxsoma, und allen Arten von Hymenophyllum fehlen blattständige Knospen gänzlich.

---

1) Van den Bosch erkannte zuerst die innige Verwandtschaft dieser Arten und vereinigte dieselben in seiner Gattung Gonocormus, die ich als Abtheilung anerkenne, nachdem sich Merkmale gefunden haben, die auch dann, wenn diese Blattstiel-ständigen Knospen nicht zur Entwickelung gekommen sind, zur Charakteristik derselben ausreichen.

Digitized by Google

§ 3.

Bei den Arten von Trichomanes mit mehrzeiligen Blättern treten Adventivwurzeln nicht nur als eine normale Erscheinung auf, sondern es erlangen dieselben gewöhnlich eine nicht unbedeutende Stärke und Länge, und geben Zweigen den Ursprung, die meist in 2, selten, wie bei T. pinnatum, in 4 Zeilen angeordnet sind. Ebenso sind alle Arten von Hymenophyllum, sowie ein Theil der Arten von Trichomanes mit zweizeiligen Blättern, z. B. T. reniforme, digitatum, album, macroclados, pyxidiferum, trichoideum, gewöhnlich mit Adventivwurzeln versehen; bei zahlreichen andern Arten von Trichomanes, welche dieselbe Blattstellung besitzen, sind hingegen Adventivwurzeln eine seltene Erscheinung, z. B. bei T. speciosum, radicans, venustum, bei welchen der Anfang der Seitensprosse am häufigsten einer Wurzel den Ursprung giebt, dann bei T. pedicellatum, Ankersii, muscoides, bei welchen unter Hunderten von Exemplaren nur ein einziges Mal eine Adventivwurzel gefunden wurde; an diese reihen sich alsdann zahlreiche andere, später verzeichnete Arten an, die mir nur im wurzellosen Zustand, d. h. ohne Adventivwurzeln vorgekommen sind.

In dem nämlichen Maass, als die Adventivwurzeln schwinden, treten bei diesen Arten Haare auf, welche die Funktion der Wurzeln übernehmen und deshalb als Haarwurzeln zu bezeichnen sind.

Diese Haarwurzeln fehlen wiederum allen Arten, deren Stamm mit mehrzeiligen Blättern versehen ist und, wie angeführt wurde, stets Adventivwurzeln treibt, gänzlich, treten, wo letztere seltner werden, bereits als eine normale Erscheinung auf dem Stamm auf, z. B. T. radicans, scandens, venustum, speciosum, oder entspriessen gleichzeitig auf der unteren Blattseite dem die Gefässbündel bedeckenden Gewebe, z. B. T. pedicellatum, oder es ist das Rhizom nebst seinen sämmtlichen Auszweigungen bis in die Nähe des Vegetationspunkts von diesen Haarwurzeln bedeckt, und entspringen gleichzeitig solche von dem Blattstiel, dem Rand der an demselben oder längs der Blattspindel herabsteigenden Blattsubstanz, z. B. T. reptans, melanorhizum oder selbst von der untern Seite des Blattparenchyms, wie z. B. bei T. nummularium, Henzaianum.

Nur bei wenigen Arten kommen neben einer normalen und häufigen Ausbildung von Adventivwurzeln diese Haarwurzeln reichlich zur

Digitized by Google

Entwickelung, und diese dürften ganz insbesondere geeignet sein, um die Unterschiede sowohl der Adventivwurzeln von den mit Haarwurzeln bedeckten Sprossen, als auch die dieser Haarwurzeln von den Wurzelhaaren, d. h. den der Epidermis der Adventivwurzeln entspriessenden Haaren festzustellen. Solche Beispiele bieten T. diaphanum, pyxiferum, exsectum, tenerum, venosum.

Das auf der Lage des Vegetationspunkts beruhende Kriterium zwischen Stamm und Wurzel ist bei Pflanzen, die man zum grösseren Theil nur im getrockneten Zustand zu untersuchen Gelegenheit hat, zumal aber bei Farnen, bei welchen die Wurzelmütze stets nur eine geringe Mächtigkeit erreicht, nur mit Schwierigkeiten zur Anwendung zu bringen, und wenn ich auch in einigen Fällen im Stande war, die Spongiola an den Adventivwurzeln, so wie an dem Stamm den das äusserste Ende desselben einnehmenden Vegetationspunkt zu erkennen, so musste es immerhin wünschenswerth sein, in andern Merkmalen Anhaltspunkte zur Unterscheidung der Adventivwurzeln von den Auszweigungen des Stammes zu gewinnen.

In dieser Beziehung ergab sich zunächst bei den Untersuchungen über das Wachsthum, dass der Vegetationspunkt des Stammes und seiner Auszweigungen von einigen schildförmig befestigten Spreuhaaren bedeckt und überragt werde, dass den Adventivwurzeln hingegen solche Spreuhaare gänzlich fehlen. Dieselben werden indess auch an dem Stamm meist frühzeitig abgestossen und persistiren nur spärlich bei wenigen Arten, z. B. bei T. reptans.

Einen zweiten Unterschied bietet das Verhalten der Haarwurzeln und Wurzelhaare zur Epidermis des Stammes und der Adventivwurzeln. Die Haarwurzeln werden nämlich von der in eine konische Papille ausgezogenen freien Wand der Epidermiszellen des Stammes getragen, sind von dem Ende derselben durch eine Scheidewand abgetrennt, selbst stets unseptirt, einfach oder an ihrem Ende in mehrere Zweige aufgelöst; sie bedecken ferner, da sämmtliche Epidermiszellen schon in geringer Entfernung von dem Vegetationspunkt in solche Haarwurzeln auswachsen, die Oberfläche des Stammes dicht, sie stehen ferner gewöhnlich rechtwinklicht von demselben ab und nehmen frühzeitig eine dunkelbraune, fast schwarze Farbe an.[1]) Die gleichen Eigenthümlich-

1) Uebereinstimmend verhalten sich die Haarwurzeln bei T. diaphanum, mem-

Digitized by Google

keiten kommen den Haarwurzeln auch zu, wenn sie am Blattstiel, dem Blattrand oder auf der Blattfläche ihren Ursprung nehmen.

Durchaus anders verhalten sich die Wurzelhaare.[1]) Diese stehen stets in continuirlichem Zusammenhang mit der Epidermiszelle, der sie entspriessen, nehmen gewöhnlich an dem der Wurzelspitze zugekehrten Ende derselben ihren Ursprung, sind der Wurzel mehr oder minder angedrückt, erscheinen stets locker angeordnet, und nehmen nur selten die dunkle Farbe der Haarwurzeln an.

Nicht minder geeignet zur Unterscheidung der Adventivwurzeln und Stammzweige ist alsdann die Stellung beider; der Ursprung der Zweige ist, wie oben angeführt wurde, stets an den eines Blattes gepaart, die Wurzeln hingegen entspringen in unbeständiger Zahl und regelloser Stellung in der Ausdehnung der Internodien.

Nach Feststellung dieser Unterschiede — auf einige andere werde ich später (§ 7) hinzuweisen Gelegenheit haben, — dürfte es nun möglich sein, den Nachweis zu führen, dass ein nicht unbedeutender Theil der Arten von Trichomanes gewöhnlich wurzellos sei. Als Beispiel mache ich namhaft: T. concinnum, saxifragoides, Henzaianum, Petersii, sublimbatum, Hookeri, punctatum, cuspidatum, membranaceum, nummularium, pusillum, Krausii, intramarginale, latemarginale, Borbonicum, melanotrichum, acutilobum, Schmidianum, emarginatum, cavifolium, olivaceum, humile, Filicula, bilabiatum, melanorhizum, capillatum.

Bei allen diesen Arten eilt die Hauptachse der Entwickelung der

---

branaceum, pusillum, cuspidatum, reptans, muscoides, Krausii, pyxidiferum, capillatum, Filicula, cavifolium, concinnum, saxifragoides, venosum, tenerum und humile, bei welchem letzteren die Papille der Epidermiszelle fadenförmig ausgezogen und in Folge dessen die Haarwurzel fast in ihrer Mitte septirt erscheint. — Eine Ausnahme von diesem Verhalten machen hingegen die Haarwurzeln von T. speciosum. Dieselben sind, wie Newman (Brit. ferns 288) erkannte, häufig septirt. Indess ist gleichzeitig zu bemerken, dass in diesen Haarwurzeln ausser Scheidewänden auch Einstülpungen auftreten, die Scheidewänden täuschend ähnlich sehen und dass bei dem Eintrocknen dieser Haare die Richtung, in der die auf einander folgenden Zellen oder zellenähnlichen Abtheilungen zusammensinken, ähnlich wie bei manchen Conferven und andern gegliederten Haaren sich rechtwinklicht kreuzt.

1) Uebereinstimmend verhalten sich dieselben bei T. diaphanum, pyxidiferum, exsectum, tenerum, Schiedeanum, sinuosum, digitatum, Arbuscula, reniforme, ferner bei Hymenophyllum cruentum, asplenioides, fucoides, polyanthos, fuciforme, caudiculatum, dichotomum, ciliatum, latifrons, Lindeni, interruptum.

Digitized by Google

Blätter voraus und überragt im Vergleich zu den Dimensionen, welche Blätter und Internodien erreichen, die Insertion des jüngsten Blattes in bei weitem höherem Maass, als dies bei irgend einer Polypodiacea der Fall ist,[1]) ja es haben ganz gewöhnlich mehrere Internodien ihr Wachsthum völlig abgeschlossen, während die diese Internodien abgrenzenden Blätter noch in der Ausbildung begriffen sind; ferner kommen an Internodien, deren Blätter noch unentwickelt sind, die diesen angehörigen Seitensprosse zur Ausbildung und auch diese wiederholen alsbald die Erscheinungen der Hauptachse, und eilen weit der Ausbildung ihrer Blätter voran.

Diese scheinbar blattlosen Seitensprosse sind es, die man bei diesen Arten von Trichomanes für Wurzeln gehalten hat; bei genauerer Beobachtung ihrer Stellung, ihres Wachsthums, ihrer Structur, ihrer Bekleidung erweisen sich dieselben als Zweige.

Complicirter werden alsdann bei einem Theil der genannten Arten die in Rede stehenden Verhältnisse dadurch, dass an der Hauptachse einzelne Blätter, deren Zweige ausgebildet wurden, unterdrückt werden, so dass letztere alsdann mitten aus einem Internodium zu entspringen scheinen, während bei sorgfältiger Untersuchung, z. B. T. saxifragoides, Rudimente der fehlgeschlagenen Blätter aufgefunden werden. Ebenso kann bei geeigneten Exemplaren in solchen Fällen aus der Thatsache, dass auf der nämlichen Seite des Stammes zwei Blätter unmittelbar auf einander folgen, der Schluss abgeleitet werden, dass zwischen denselben ein mit ihnen alternirendes Blatt unterdrückt sei.

Bei anderen Arten, z. B. T. humile, Filicula u. a., herrscht dieses Schwinden der Blätter vor und schlägt nicht nur an der Hauptachse der grössere Theil der Blätter fehl, während die denselben angehörigen Seitensprosse zur Entwickelung gelangen, sondern auch diese letzteren wiederholen die gleiche Erscheinung in gesteigertem Maass, insofern an denselben alle Blätter unterdrückt sind, ihre Auszweigungen aber einen sehr hohen Grad erreichen. Diese Arten bieten dann das Ansehen, als entsprängen an der Insertionsstelle der Blätter und zwischen denselben vielfach verzweigte Wurzeln. Aber auch hier weist nicht

---

1) Unter den Arten von Hymenophyllum erreichen bei H. axillare und den Verwandten die Zweige eine sehr bedeutende Länge, bevor Blätter an denselben zur Ausbildung kommen; diese Zweige entwickeln jedoch frühzeitig zahlreiche Wurzeln.

Digitized by Google

nur die Berücksichtigung der oben erörterten Verhältnisse nach, dass diese bis zu den äussersten Auszweigungen den Charakter der Stämme an sich tragen, sondern man findet auch bei ihnen an der Hauptachse sowohl, wie an den primären Auszweigungen derselben kleine oft sehr unansehnliche, von Haarwurzeln bedeckte Blattrudimente. An den secundären und tertiären Auszweigungen ist es indess nicht gelungen, solche Rudimente noch nachzuweisen.

Nicht unerwähnt bleiben mag ferner, dass bei diesen Arten nicht selten die den ausgebildeten Blättern der Hauptachse angehörenden Seitensprosse die Eigenthümlichkeiten der Hauptachse wiederholen, die den fehlgeschlagenen Blättern angehörenden vorzugsweise blattlos bleiben, sich rasch vielfach verzweigen und dadurch das wurzelähnliche Ansehen erhalten und behaupten.

Mit dem Nachweis, dass diese bei diesen Arten bisher als Wurzeln beschriebenen Gebilde den Auszweigungen des Stammes angehören, ist der Beweis nicht geführt, dass diese Arten überhaupt wurzellos seien, denn einerseits könnte die Keimpflanze bewurzelt sein, anderntheils könnten an der ausgebildeten Pflanze Adventivwurzeln eine noch seltnere Erscheinung, als bei T. pedicellatum, muscoides, und deshalb trotz der Untersuchung einer grossen Fülle von Exemplaren nicht aufgefunden worden sein; auf der andern Seite aber dürfte wohl hervorzuheben sein, dass wie in dem Auftreten der Haarwurzeln, so in manchen anderen Organen der Hymenophyllaceae Verhältnisse ausgesprochen sind, die bei Gefässpflanzen nur spärlich angetroffen werden oder nur angedeutet sind, bei den moosartigen Gewächsen hingegen zur Regel werden, und von diesem Standpunkt aus dürfte der Vermuthung Raum zu geben sein, dass unter den zahlreichen Arten, die nur im wurzellosen Zustand beobachtet wurden, eine oder die andere sei, bei der Adventivwurzeln überhaupt nicht zur Entwickelung kommen.

Unter den andern Abtheilungen der Farne werden Haarwurzeln vorzüglich bei Arten mit klimmendem Stamm, z. B. Acrostichum axillare angetroffen; dieselben unterscheiden sich von den Haaren der Adventivwurzeln in der nämlichen Weise, wie bei den Hymenophyllaceis.

Digitized by Google

§ 4.

Das Blatt der Hymenophyllaceae besitzt die den Farnen überhaupt zukommende Knospenlage,[1]) hängt stets continuirlich mit dem Stamm zusammen; sein Stiel hat bei manchen Arten constant nur eine sehr geringe Grösse, z. B. T. pedicellatum, variirt bei andern, z. B. T. muscoides, radicans an Länge, ist entweder nackt oder mit einem von der Blattspindel herabsteigenden Fortsatz der Blattsubstanz geflügelt, der ebenfalls wiederum bei manchen Arten sich constant verhält, bei andern aber, z. B. H. clavatum, rarum, T. cellulosum, nicht nur an Breite vielfach schwankt, sondern zuweilen gänzlich schwindet.

Die Spreite ist entweder einer unbegrenzten Fortbildung fähig und innovirt alljährlich, wie die Blätter von Nephrolepis, z. B. bei H. interruptum, Karstenianum, plumosum, zuweilen auch bei H. caespitosum und H. trapezoidale, oder sie ist, wie bei der Mehrzahl der Hymenophyllaceae, von begrenztem Wuchs.

Ungetheilt ist dieselbe bei T. reniforme, ferner bei H. cruentum, dessen sterile Kerbzähne indess zuweilen sich zu Zipfeln verlängern, ferner bei T. nummularium, zuweilen bei T. pusillum, punctatum, erosum, Hookerianum, dann bei T. exsectum, welches neben den normalen in höherem Grad getheilten Blättern anormaler Weise hie und da ungetheilte entwickelt, die in den vorliegenden Exemplaren eine Länge von 9 Linien bei einer Breite von 2½ Linien erreichen.

Bei der grossen Mehrzahl der Hymenophyllaceae ist die Blattfläche getheilt und zwar seltner in dichotomer, als in fiederartiger Weise.

Einmalige Dichotomie ist Regel bei H. marginatum, wiederholte, 3—4malige bei H. Sibthorpioides; bei andern, als H. digitatum, nitidulum, schwankt die Theilung des Blattes zwischen der dichotomen und fiederartigen.

Auch als anomale Theilungsweise tritt Dichotomie unter den Hymenophyllaceis nur sehr selten auf und beschränken sich die Beispiele, bei welchen eine solche mir begegnet ist, auf H. caespitosum, H. Javanicum und T. sinuosum; Formen, bei welchen sämmtliche Blätter eines Stammes oder sämmtliche Fieder eines Blattes dichotom getheilt sind,

1) Martius ic. sel. pl. crypt. 103.

Digitized by Google

scheinen weder im spontanen Zustand beobachtet, noch in Folge der Kultur bis jetzt entstanden zu sein.

Dagegen ist bei den Hymenophyllaceis mit fiederartig angeordneten Abschnitten eine ungewöhnliche Verlängerung einzelner oder mehrerer Abschnitte eine häufige Erscheinung, z. B. H. undulatum, reniforme, amoenum, Pöppigianum, sphaerocarpum, T. olivaceum.[1]) Unter diesen sind einfach fiedertheilige seltener, als in höherem Grad getheilte; Beispiele der ersteren bieten H. caespitosum, abruptum, T. crispum, Javanicum; unter den letztern erreichen T. polyanthos, elegans, nächst Loxsoma, bei welchem Abschnitte 5. Ordnung noch angedeutet sind, die höchste Stufe.

Eine seltene Erscheinung ist es endlich, dass die primären Abschnitte nur auf ihrer innern Seite fiedertheilig sind, z. B. H. pectinatum.

§ 5.

Die Nervatur des Blattes der Hymenophyllaceae, insbesondere von Trichomanes, bietet in gewisser Beziehung eine grössere Mannigfaltigkeit dar, als irgend eine Gattung der Polypodiaceae.

Der einfachste Fall der Nervatur, nämlich ein ungetheilter Gefässbündel, findet sich in fructificirenden Blättern von T. nummularium, in krüppelhaft ausgebildeten, wenn auch bereits fructificirenden Blättern von T. pusillum, Hookeri, bei den oben erwähnten anomalen Blättern von T. exsectum, dann bei H. marginatum im ungetheilten Zustand seines Blattes, während wenn dasselbe gabelt, der Nerv desselben eine entsprechende Theilung erfährt.

Ein wiederholt dichotom getheilter, seine Zweige fächerartig ausbreitender Nerv kommt bei T. reniforme mit ungetheilter, dann bei H. Sibthorpioides mit nach Art von Caenopteris getheilter Spreite vor.

Den Uebergang der fächerartig ausstrahlenden zu der gefiederten Anordnung der Nerven bietet dann eine Gruppe von Trichomanes, die ich als Micro-trichomanes bezeichnet habe, z. B. T. digitatum, palmati-

---

1) Ueberhaupt ist die Länge der verschiedenen Fiederabschnitte eines Blattes bei den Hymenophyllaceis und in Folge dessen der Umriss des Blattes sehr grossen Schwankungen unterworfen; z. B. haben H. gracile, Blumeanum bald lanzetthaarige, bald lineare, bald eiförmige Blätter, und ist z. B. bei T. muscoides die Basis des Blattes bald herz-, bald keilförmig gestaltet.

Digitized by Google

fidum; bei diesen gelangt eine geringe Zahl fiederartig angeordneter Nerven zur Ausbildung, von welchen die unteren oder die untersten eine höhere Auszweigung erreichen als die oberen, und wiederholt gabeln oder in einer Weise sich theilen, die zwischen der dichotomen und fiederartigen schwankt, der ersteren aber insofern näher steht, als an ihren Auszweigungen die Stellungsverhältnisse, die den fiederartig angeordneten Nerven zukommen, nicht nachgewiesen werden können; durch diesen letzteren Umstand lassen sich selbst Arten, wie T. dichotomum, bei welchen eine grössere Zahl fiederartig angeordneter Nerven auftritt, als Glieder dieser Gruppe erkennen.

Abweichend von dem Verhalten der Arten der Gruppe von Microtrichomanes schliessen andere Arten, z. B. T. membranaceum, Hookeri, punctatum, pusillum, deren Mittelrippe zwar ebenfalls gewöhnlich nur wenige einmal oder wiederholt gabelnde Nerven abgiebt, sich entschieden an diejenigen Arten an, deren Nerven fiederartig angeordnete Zweige entbinden, und treten mit einer kräftigeren Ausbildung des Blattes und der Theilung desselben in mehrere Abschnitte constant in diesen zahlreichere fiederartig in bestimmter (katadromer) Folge angeordnete Nerven auf. Ebenso erfährt bei andern Arten, z. B. T. reptans, wenn die Ausbildung des Blattes hinter der normalen zurückbleibt und die Zahl der tertiären Nerven sich verringert, die gesetzmässige Folge der letzteren keine Veränderung.

Bei der Mehrzahl der Hymenophyllaceae ist die fiederartige Anordnung der Nerven aller Grade unzweideutig ausgesprochen oder es sind sämmtliche, mit Ausnahme der der letzten Ordnung, die einmal oder wiederholt gabeln, fiederartig angeordnet.

Bei diesen Arten mit gefiederten Nerven findet entweder, wie überhaupt bei der Mehrzahl der Farne, in Betreff der Seite des Blattes, auf welcher der erste Secundärnerv auftritt, eine Gesetzmässigkeit nicht statt, oder es ist nur bei wenigen Arten von Trichomanes, deren Blätter in zwei diametral einander gegenüber liegenden Zeilen stehen und zugleich von einem verschwindend kurzen Blattstiel getragen werden, die Seite des Blattes, welche den ersten secundären Nerven aufnimmt, eine bestimmte und wird bei diesen Arten durch diese Gesetzmässigkeit eine vollkommene Symmetrie der Blätter beider Zeilen herbeigeführt. Von den beiden hier möglichen Fällen ist der eine bei T. Ankersii, pedicellatum, der andere bei T. auriculatum, venustum ausgebildet. Bei den

Digitized by Google

ersteren fällt der erste Secundärnerv auf die der Stammspitze zugekehrte Seite des Blattes, bei den beiden letzteren auf die derselben abgewandte.

In dem einfachsten Fall der Auszweigung bleiben sämmtliche secundäre Nerven ungetheilt, z. B. bei H. cruentum, caespitosum, oder es gabeln dieselben einmal, wie in den fertilen Blättern von T. diversifrons.

Mit der fiederartigen Auszweigung der secundären Nerven und dem Auftreten tertiärer, sowie der Nerven höherer Ordnungen wird alsdann die Folge der Nerven einer jeden Ordnung eine gesetzmässige, und fällt entweder der 1., 3., 5. tertiäre Nerv auf die innere, der 2., 4., 6. auf die äussere Seite des secundären Nerven u. s. w., oder umgekehrt der 1., 3., 5. gehört der äusseren, der 2., 4., 6. der inneren Seite an. In dem ersten Fall werden die Nerven als anadrome, in dem zweiten als katadrome bezeichnet, entsprechend den Verhältnissen, die ich bei der Charakterisirung der Abtheilungen von Aspidium und Phegopteris[1]) hervorgehoben habe und seitdem von van den Bosch zur Unterscheidung seiner Gattungen der Hymenophyllaceae in Anwendung gebracht wurden.[2]) Und thatsächlich erschienen ganz insbesondere die Hymenophyllaceae geeignet, der Berücksichtigung dieser Verhältnisse Eingang zu verschaffen, einmal wegen der Deutlichkeit, mit welcher die Nerven ausgebildet sind und in Folge dessen der Leichtigkeit, mit der dieselben übersehen werden können, dann aber auch, weil Schwankungen dieser Verhältnisse bei den Hymenophyllaceis seltener als bei vielen Polypodiaceis sind.

Anadrome Anordnung der Nerven und dieser gemäss der Habitus Polystichoideus charakterisirt sämmtliche Arten von Hymenophyllum und einen Theil der Arten von Trichomanes, sowohl diejenigen mit zweizeiligen, als diejenigen mit mehrzeiligen Blättern. Beispiele, bei welchen die tertiären Nerven ungetheilt sind, bieten H. asplenioides, T. sinuosum, manche Stadien von T. Ankersii, Beispiele, bei welchen dieselben gabeln, H. fucoides, T. Javanicum, Beispiele, bei welchen die Blätter in höherem Grad getheilt sind, T. polyanthos und zahlreiche andere.

---

1) Ueber Phegopteris und Aspidium p. 2 u. flg.

2) Eerste Bidrage l. c. p. 312.

Digitized by Google

Abweichungen von der anadromen Anordnung der Nerven kommen vor:

1) bei H. interruptum, fuscum, T. Ankersii, insofern zuweilen die mittleren Abschnitte den ersten tertiären Nerven auf der äusseren Seite entbinden;

2) bei T. venosum, bei welchem die Nerven 4. Ordnung in den unteren secundären Zipfeln zuweilen eine katadrome Anordnung besitzen;

3) bei T. Smithii, das bald den Habitus Polystichoideus streng einhält, bald nur an den oberen Abschnitten anadrome Nerven enthält, an den unteren hingegen dieselben in katadromer Folge auszweigt. Der erste Fall liegt der ausgezeichneten Abbildung van den Bosch's,[1]) der zweite der minder gelungenen Hooker's[2]) zu Grunde; endlich

4) bei Trichomanes § Gonocormus, z. B. T. proliferum, welches an das letztere Verhalten von T. Smithii sich anschliesst, insofern bei ihm normal an den untersten oder den unteren Abschnitten die Nerven 3. Ordnung in katadromer, an den oberen hingegen, wie die Nerven letzter Ordnung in der ganzen Ausdehnung des Blattes in anadromer Folge auftreten.

Die katadrome Anordnung der Nerven kommt nur bei einem kleinen Theil der Arten von Trichomanes und bei Loxsoma vor und erstreckt sich entweder über die ganze Ausdehnung des Blattes, oder es sind am Grunde des Blattes ein oder einige Abschnitte mit anadromen Nerven versehen.

Ersteres ist der Fall bei T. reptans, muscoides, Krausii, Arbuscula mit fiedertheiligen Blättern, ferner bei T. alatum mit fiedertheiligen primären Abschnitten, dann unter Arten mit in höherem Grad getheiltem Blatt bei T. bicorne und bei Loxsoma.

Das Zweite wird angetroffen bei T. sinuosum, bei welchem häufig nur der unterste Abschnitt auf einer Seite anadrome Nerven erhält, dann bei T. pinnatum, dessen beide unterste Abschnitte normal anadrome Nerven besitzen, während die Nerven der oberen in katadromer Folge angeordnet sind, ja die ersten derselben schon aus der Blattspindel entbunden werden; ferner bei T. botryoides, crispum, von welchen

1) Hymenoph. Javanicae T. 12.
2) Icones plantarum 704.

Digitized by Google

das erstere an den beiden untersten Paaren der Abschnitte, das letztere an einer grösseren Zahl derselben anadrome Nerven enthält, die bald ungetheilt sind, bald einmal, bald wiederholt gabeln.

Abweichungen von der katadromen Anordnung der Nerven sind vorgekommen:

1) bei T. Arbuscula, bei welchem zuweilen durch das Schwinden des ersten secundären Zipfels an den mittleren Abschnitten des Blattes eine anadrome Anordnung der tertiären Nerven herbeigeführt wird;

2) bei T. nanum, bei welchem zuweilen der erste tertiäre Nerv auf der innern Seite der Abschnitte auftritt, dann aber dadurch, dass auf denselben zwei tertiäre Nerven auf der äusseren Seite folgen, die katadrome Anordnung hergestellt wird;

3) bei T. alatum, dessen secundäre Abschnitte häufig anadrome Nerven enthalten;

4) bei T. Mougeosii, bei welchem die wenigen Blätter, die ich untersuchen konnte, an einzelnen Abschnitten anadrome Nerven enthielten; und endlich

5) bei T. sinuosum und zwar der von Kaulfuss als T. incisum bezeichneten Varietät. Diese überschreitet das geringe Maass der bisher aufgezählten Schwankungen und bietet, insofern an einem Theil ihrer Exemplare sämmtliche Nerven in anadromer, an einem andern Theil in katadromer Anordnung auftreten, das einzige Beispiel von dem Vorkommen dieser beiden Anordnungen der Nerven bei ein und dem nämlichen Farne. Es ist dieses Beispiel um so auffallender, als gleichzeitig mit der Anordnung der Nerven die der Fruchthaufen wechselt, insofern endständige Fruchthaufen mit katadromen Nerven, axilläre mit anadromen vereinigt angetroffen werden.

Es lag nahe, bevor man zugab, dass zwei in systematischer Beziehung bedeutende Merkmale bei ein und der nämlichen Art als trügerisch sich erwiesen, anzunehmen, dass hier zwei specifisch verschiedene Arten verwechselt würden; eine solche Annahme erscheint aber nach Vergleichung des Wuchses, der Gestalt, Theilung und Behaarung des Blattes, wie der Beschaffenheit der Fruchthaufen naturwidrig.

Netzaderungen werden nur bei T. diversifrons und zwar nur an sterilen Blättern kräftig ausgebildeter Exemplare angetroffen. Die katadromen Nerven derselben gabeln einmal oder wiederholt, und schliessen nach Art von Doodya eine oder zwei Reihen von Maschen ab. An

Digitized by Google

den Blättern schwächerer, aber immerhin schon fructificirender Exemplare enden alle Nerven frei.

Ausnahmsweise fliessen die benachbarten Nerven bei T. pinnatum zusammen.

§ 6.

Mit Ausnahme von Loxsoma, dessen Stamm eine geschlossene Gefässbündelröhre enthält, sind in der Längsachse des Stammes der Hymenophyllaceae die Gefässbündel zu einem sogenannten centralen Strang[1]) vereinigt, der überwiegend aus treppenförmigen Zellen von sehr verschiedener Weite zusammengesetzt wird, indess auch stets in der Nähe seiner Peripherie und häufig auch in seiner Mitte an einigen Stellen Ring- und abrollbare Spiralfaserzellen und ausser diesen und den treppenförmigen Zellen langgedehnte, zartwandige Zellen enthält. Die Peripherie dieses centralen Stranges nehmen alsdann die eigenen Zellen ein, die selbst wieder mancherlei Verschiedenheiten erkennen lassen, zu deren Erörterung indess die Hymenophyllaceae nicht sehr geeignet sind.

An der Grenze dieses centralen Stranges und der Rinde liegt gewöhnlich, z. B. T. venustum, eine Lage von Zellen, die an Länge den eigenen Zellen des ersteren fast gleichkommen, an Weite dieselben übertreffen, mit horizontalen oder in geringem Grad geneigten Wandungen über einander stehen, und auf ihren radialen Seitenwandungen mit eigenthümlichen, schwierig zu entziffernden Verdickungen versehen sind, auf die ich ebenfalls bei andern Farnen, wo sie deutlicher auftreten, zurückkommen werde.

Die Rinde in der Umgebung dieses Gefässbündels besteht stets aus zwei zu unterscheidenden Geweben, von welchen das eine als Parenchym, das andere als Sklerenchym bezeichnet werden soll.

Das letztere bildet stets den mittleren Theil der Rinde und ist sowohl auf seiner inneren Seite von dem Gefässbündel durch das Parenchym getrennt, als auf der äussern Seite von demselben umgeben.

Das Parenchym zwischen dem Sklerenchym und dem Gefässbündel ist entweder auf eine oder wenige Lagen von Zellen beschränkt, oder

---

1) Ueber die Structur der Hymenophyllaceae ist von Mohl, de struct. caud. fil. arbor. und Taschner, de duabus Trichomanum speciebus etc. Jena 1843, zu vergleichen.

Digitized by Google

bildet einen breiten aus zahlreichen Zelllagen bestehenden Ring, z. B. H. sanguinolentum, scabrum, dilatatum, demissum; das das Sklerenchym umgebende Parenchym besteht ausser der Epidermis aus zwei Zelllagen, z. B. H. caudiculatum, cruentum, oder nur aus einer einzigen, z. B. T. pinnatum. Die Epidermis selbst wird von Zellen zusammengesetzt, die eine geringere Grösse als diese Parenchymzellen haben, und entbehrt stets der Spaltöffnungen.

Das Sklerenchym besteht aus gestreckten getüpfelten Zellen, die entweder alle übereinstimmen und dann gewöhnlich prosenchymatisch zugespitzt sind, derbe Wandungen besitzen, auch frühzeitig eine braune Farbe annehmen, z. B. T. reniforme, H. caudiculatum, cruentum, sanguinolentum, oder es ist dasselbe in zwei Zonen getheilt, von welchen die eine mehr die Charaktere des parenchymatischen Gewebes behauptet, insofern ihre Zellen mit horizontalen, gewöhnlich reichlich getüpfelten Wandungen übereinander stehen, auch zartere Wandungen besitzen, die andere aber sich weiter von dem Parenchym entfernt und von derbwandigen, länger gedehnten prosenchymatisch zugespitzten Zellen zusammengesetzt wird.

Die Lage dieser beiden Zonen des Sklerenchyms, wie ihre Stärke ist indess mancherlei Verschiedenheiten unterworfen; bei manchen Arten, wie z. B. bei T. pinnatum, H. exsectum, fuciforme, nimmt die zartwandige Zone den innern Theil der Rinde ein, die derbwandige den äusseren, ebenso bei T. reptans, wo die erstere sehr vorherrscht, die letztere aber auf wenige Prosenchymzellen beschränkt ist, oder umgekehrt es ist die innere Zone des Sklerenchyms derbwandig, die äussere zartwandig, z. B. bei T. radicans, venustum, scandens, pallidum, H. dilatatum, scabrum, demissum, flabellatum.

Die an das oberflächliche Parenchym angrenzenden Zellen des Sklerenchyms haben endlich bei der Mehrzahl der Arten von Trichomanes theilweise oder sämmtlich eine Theilung erfahren, durch welche dieselben in Reihen von tafelförmigen quadratischen oder rechteckigen Zellen umgewandelt werden.

Diese Zellen habe ich, da sie stets das Sklerenchym bedecken, insofern sie an der ersteren Grenze desselben von dem Parenchym liegen, als Deckzellen bezeichnet und denselben in Beschreibungen den Namen der Stegmata beigelegt.

Diese Deckzellen sind stets auf der dem Sklerenchym aufliegenden

Digitized by Google

Wand in eigenthümlicher Weise verdickt und inkrustirt, wie später erörtert wird.

§ 7.

Wie in dem Stamm, so sind auch in den Adventivwurzeln die Gefässbündel zu einem feinen, die Längsachse derselben einnehmenden Strang vereinigt, der indess an Stärke stets hinter dem des Stammes auffallend zurücksteht. Der Zahl nach sind meist zwei, z. B. T. venustum, Loxsoma, oder wie bei T. pinnatum, vier Gefässbündel vorhanden; dieselben beginnen ihre centripetale Entwickelung von der Peripherie des centralen Stranges und treten schliesslich an ihrem inneren Ende mit den hier an Weite stets zunehmenden treppenförmigen Zellen in Verbindung.

Das Sklerenchym der Rinde nimmt an Festigkeit seiner Zellen stets nach Aussen zu, Deckzellen kommen nicht zur Entwickelung.

Das Parenchym der Wurzelrinde besteht stets nur aus wenigen Zelllagen, z. B. zwei bei T. crispum, von welchen die innere aus sehr weiten Zellen zusammengesetzt wird; bei andern, z. B. T. muscoides, das Wurzeln nur sehr selten ausbildet, besteht das Parenchym aus den zierlichsten Spiral- und Netzfaserzellen, die in der Rinde des Stammes und seinen sämmtlichen Auszweigungen stets vermisst werden; bei T. Arbuscula zeigen die Parenchymzellen der Wurzeln noch Andeutungen solcher netzfaseriger Verdickungen, bei der Mehrzahl der in dieser Beziehung untersuchten Arten aber waren alle Spuren derselben geschwunden, z. B. T. crispum, pinnatum, sinuosum, diaphanum.[1])

§ 8.

Wie bei andern Farnen, deren Stamm ein centrales Gefässbündel besitzt, nimmt auch bei den Hymenophyllaceae der Blattstiel nur einen einzigen Strang auf, der auf seinem Querschnitt rund, abgeplattet oder gekrümmt ist.

Die Structur dieses Gefässbündels stimmt bei der grossen Mehrzahl vollkommen mit der des Stammes überein und weicht nur bei ei-

1) Unter Farnen aus andern Abtheilungen, z. B. bei Acrostichum (Leptochilus) axillare und Polypodium fallax besteht das Parenchym der Wurzelrinde ebenfalls aus netzfaserigen Zellen.

Digitized by Google

nigen wenigen Arten, als T. pinnatum, elegans Rich. dadurch ab, dass in demselben ein mehr oder minder scharf umgrenzter Bündel prosenchymatischer Zellen auftritt, die durch die bedeutende Stärke, die gelbe Farbe ihrer Wandungen, die punktförmigen oder elliptischen entfernter stehenden Tüpfel auffallend von den treppenförmigen Zellen abweichen. Letztere nehmen die untere und seitliche Region des Bündels ein und setzen sich über die vordere Seite derselben so weit fort, dass sie die Prosenchymzellen entweder vollständig, wie in dem Grund des Blattstiels, oder fast vollständig, wie in dem obern Theil desselben, umschliessen. Nur in der Mitte der vordern Seite grenzen letztere unmittelbar an die eigenen Zellen an, welche wie im Stamm, so auch im Blattstiel das ganze Gefässbündel umgeben. In dem centralen Gefässbündel des Stammes liegen diese Prosenchymzellen, wenn sie überhaupt schon ausgebildet sein sollten, wenigstens nicht in einem Bündel beisammen.

Das Sklerenchym der Rinde des Blattstiels wird entweder, z. B. T. reniforme, nur von derbwandigen Zellen zusammengesetzt oder es zerfällt in zwei Zonen, eine innere zartwandige und eine äussere derbwandige, z. B. T. diversifrons, spicatum, elegans, elongatum, Millefolium, crispum, Bauerianum, polyanthos, oder es tritt eine solche Sonderung erst in der Blattspindel hervor, während in dem Blattstiel, wie in dem Stamm, die entgegengesetzte Lagerung beider Zonen sich findet, so z. B. bei T. venustum, dessen Blattstiel stets nur eine sehr geringe Länge erreicht.[1])

Die äusserste Lage der Sklerenchymzellen ist wieder wie bei der Mehrzahl der Arten von Trichomanes in Deckzellen umgewandelt, die durch eine Lage weiter Zellen von der Epidermis getrennt sind.

Im Verlauf durch die Blattspindel und die Mittelrippe der primären Abschnitte nimmt das Gefässbündel allmählig zwar an Umfang ab; es bleiben jedoch alle seine Bestandtheile in den nämlichen Beziehungen zu einander erhalten; erst gegen das Ende der Mittelrippe bei T. pin-

1) Bei einigen wenigen Arten, z. B. T. rigidum, füllt ausserdem ein Strang derbwandigen Sklerenchyms die Rinne aus, welche das Gefässbündel in dem Verlauf durch den Blattstiel bildet; dieselbe steht in unmittelbarer Berührung mit dem Gefässbündel, befindet sich aber stets ausserhalb desselben und ist daher wohl zu unterscheiden von dem oben angeführten, dem Gefässbündel, selbst bei T. pinnatum, elegans, angehörenden Prosenchym.

Digitized by Google

natum, oder erst in den secundären Abschnitten bei T. elegans, schwinden die Prosenchymzellen in die Längsachse des Gefässbündels, und tritt alsdann auch hier die Structur ein, die den Nerven aller Hymenophyllaceae zukommt.

Diese enthalten stets ein feines Bündelchen von Gefässzellen, die bei genauerer Untersuchung sich als Spiral-, Netzfaser- und treppenförmige Zellen erweisen und von einigen eigenen Zellen umgeben sind. Ein Ring weiterer zartwandiger Parenchymzellen trennt diese von dem Sklerenchym, oder es sind die Sklerenchymzellen nur durch eine einzige Lage langgedehnter zartwandiger Zellen von den verholzten Gefässzellen der Nerven getrennt. Die Sklerenchymzellen selbst werden in dem nämlichen Maass, als sie an Zahl sich verringern, übereinstimmender ausgebildet, erhalten eine bedeutendere Länge, greifen mit fein ausgezogenen Enden in einander und nehmen dadurch eine bastähnliche Beschaffenheit an. Die äussersten dieser Sklerenchymzellen sind bei Trichomanes theilweise oder sämmtlich in Deckzellen umgewandelt, die unmittelbar unter der Epidermis liegen, während in anderen Fällen, wo keine Deckzellen ausgebildet werden, wie bei Hymenophyllum, die Epidermis unmittelbar auf den Sklerenchymzellen liegt.

Die Sklerenchymzellen bilden stets den grössern Theil der Stränge, die das unbewaffnete Auge für die Gefässbündel ansieht, umscheiden entweder gleichmässig den wirklichen Gefässbündel, oder sie sind in zwei plattenförmige Zonen gespalten, die durch die Ansetzstelle des Parenchyms an der Blattspindel oder deren Auszweigungen von einander getrennt sind, z. B. T. intramarginale, humile, Filicula; sie überragen endlich nicht selten, wenn auch nur in geringem Grad, z. B. T. tamarisciforme, papillatum, die Enden der Gefässbündel.

Zuweilen ist das Sklerenchym zu beiden Seiten der Gefässbündel vermehrt und erscheinen diese dann abgeflacht, z. B. in der Costula von T. elegans. Auffallender findet sich die gleiche Erscheinung bei Trichomanes § Craspedoneuron,[1]) insbesondere bei T. album, bei wel-

1) Van den Bosch stellt seine Gattung Craspedoneuron (Bijdr. l. c. 322) zu seinen Diplöophyllaceis, deren Blattparenchym aus mehreren Zelllagen besteht, obwohl er die Structur dieser Arten richtig erkannt hatte. Consequenter Weise hätten alsdann aber alle Hymenophyllaceae dieser Abtheilung zugetheilt werden müssen.

Digitized by Google

chem das Sklerenchym der Gefässbündel sich bandartig über den grösseren Theil der Breite der Blattzipfel ausdehnt. (Taf. I. 22.)

Bei H. Malingii ist endlich das Sklerenchym rings in der Umgebung der Gefässbündel gleichmässig vermehrt, und bietet diese Art zugleich das einzige Beispiel unter den Hymenophyllaceen und Farnen überhaupt, wo alle und jede Spur einer blattartigen Ausbreitung fehlt.[1]) (Taf. I. 32.)

§ 9.

Die Deckzellen auf der äussersten Lage[2]) der Sklerenchymzellen der Rinde, welche bei der Mehrzahl der Arten von Trichomanes die Gefässbündel aus dem Stamm bis zu äussersten Auszweigungen in den Nerven begleiten, und hier leichter kenntlich sind, da sie unmittelbar unter der Epidermis liegen, während im Stamm zwischen ihnen und der letzteren eine Lage weiter Parenchymzellen eingeschoben ist, haben stets eine der Längsausdehnung der betreffenden Gefässbündel folgende gereihte Anordnung; sie entstehen, wie man überall da, wo diese Reihen nicht gedrängt neben einander liegen, nachweisen kann, z. B. am Blattstiel von T. Smithii (Taf. I. 2, 3), im Schleier von T. davallioides (Taf. I. 4c), sinuosum (Taf. I. 1) durch Theilung von gestreckten Sklerenchymzellen; auch lassen sich mit Hülfe der Maceration die je in einer solchen Zelle entstandenen Reihen solcher Deckzellen isoliren und kann alsdann erkannt werden, dass die mittleren Deckzellen quadratische oder rechteckige Tafeln darstellen, die obersten und untersten eine dem zugespitzten Ende der Sklerenchymzellen entsprechende Gestalt besitzen. Diese Theilung der Sklerenchymzellen erfolgt indess schon in den jugendlichsten Theilen des Stammes in geringer Entfernung von dem Vegetationspunkt, z. B. T. Filicula, humile, und ebenso in den jüngsten Theilen der Blätter lange vor Verholzung der Gefässzellen der

---

1) Nach den Beschreibungen sollte man zwar bei verschiedenen Arten den Mangel des Blattparenchyms vermuthen; es ist aber bei denselben, z. B. T. longisetum, stets eine schmale, oft nur aus 1—3 Zellreihen bestehende Ausbreitung des Blattparenchyms vorhanden; ebenso haben die fadenförmigen oder pfriemenförmigen Zipfel des Blattrandes bei T. atrovirens und anderen stets wenigstens eine schmale Flächenausbreitung von 1 oder 2 Zellreihen.

2) Auch auf der innersten Lage des Sklerenchyms in dem Stamm von T. venustum traf ich solche Deckzellen an, doch war es nicht möglich, ihre Verbreitung an dieser Stelle genauer zu verfolgen.

Digitized by Google

Nerven, die sie bedecken. Diese frühzeitige Entstehung erklärt es, dass die in einer Zelle entstandenen Deckzellen bei der Maceration so leicht sich trennen.

Die eigenthümliche Verdickung dieser Deckzellen dürfte dann ebenfalls eine genauere Betrachtung verdienen.

In dem einfachsten und zugleich seltensten Fall ist einzig und allein die Peripherie der innern Wandung dieser Zellen mit einer ringförmigen, geschlossenen oder an einer Stelle unterbrochenen Verdikkungsschichte überzogen (Taf. I. 4 *c*); in anderen kaum minder seltenen Fällen ist die ganze Fläche der inneren Wand gleichmässig von membranartigen Verdickungsschichten bedeckt, die sich nur unbedeutend auf den seitlichen Wandungen der Zelle fortsetzen, eine gleichmässige, nicht granulirte Beschaffenheit und eine gelbliche Farbe besitzen (Taf. I. 4 *d*). Diese beiden Fälle lassen sich am leichtesten da, wo die Reihen der Deckzellen vereinzelt auftreten, z. B. in dem Schleier von T. davallioides, nachweisen.

In der grossen Mehrzahl der Deckzellen ist alsdann nicht nur die ganze Fläche der inneren Wand in der eben geschilderten Weise verdickt, sondern es ragt auf der Mitte derselben eine polsterförmige Erhöhung (Taf. I. 4 *a b*) frei in die Höhle der Zelle vor. Diese Erhöhung besitzt stets eine fein granulirte Beschaffenheit (Taf. I. 5. 6),[1]) und ebenso erhält die innere verdeckte Zellwand in der Umgebung dieser Erhöhungen ein granulirtes Ansehen (Taf. I. 8. 9); in seltneren Fällen, z. B. T. scandens, sind dieselben mit ihrer Basis in eine kreisrunde Vertiefung der Verdickungsschichte eingesenkt.

Diese Polster erheben sich entweder auf kreisrunder Basis (Taf. I. 4. 5) und sind an dem freien Ende mit einer halbkugelförmigen Vertiefung versehen, z. B. T. Javanicum, oder sie sind halbirt (Taf. I. 3. 6. 8. 9), erreichen an der halbkreisförmigen Peripherie eine bedeutendere Höhe (Taf. I. 7 *c*) als an der abgeschnittenen, deren Richtung gewöhnlich der Längsausdehnung der Gefässbündel folgt, sind im Uebrigen auf der freien Endfläche stets ausgehöhlt, z. B. T. pinnatum in der Mehrzahl der Arten. In anderen seltneren Fällen ist das Polster in eine obere und untere Hälfte gespalten (Taf. I. 2 *a b*), oder es ist an einer kleinen

1) Wobei die Bemerkung nicht unterdrückt werden kann, dass vielleicht kleine Hohlräume in diesen Polstern das granulirte Ansehen bedingen.

Digitized by Google

Stelle unterbrochen und laufen von dem Rand der freien Endfläche leistenartige Gräthen über die innere Fläche der Zellwand aus (Taf. I. 15*a*), oder es laufen, wie bei T. membranaceum[1]) und venosum,[2]) entweder von den seitlich halbirten oder in eine obere oder untere Hälfte gespaltenen Polstern mehrere solche Fortsätze aus, die selbst wieder unter einander anastomosiren (Taf. I. 15*b*), oder es enthalten die Deckzellen Leisten, die auf der innern Wand mit breiter Basis aufsitzen, nach oben kammartig sich verschmälern (Taf. I. 10, 14*ab*), unverzweigt sind, oder in der oberen und unteren Hälfte der Zelle um einen freien Mittelraum der Zelle symmetrisch oder annähernd symmetrisch angeordnet sind, oder ein Netzwerk darstellen, dessen Maschen und Fortsätze eine unregelmässige Anordnung besitzen, wie ein Blick auf die Abbildungen Taf. I. 11—14, deren Mannigfaltigkeit leicht hätte vermehrt werden können, lehrt.

In jugendlichen Zellen schien in der Vertiefung des Polsters der Zellkern zu liegen.

Bei dem Zusatz von Iodtinktur und Schwefelsäure färben sich die Membranen der Deckzellen sammt ihren Verdickungen, sowohl den gleichmässigen, der inneren Wand aufliegenden, als den polster- oder leistenartig in die Höhle der Zelle vorragenden, von granulirtem Ansehen blau, z. B. T. membranaceum, reptans, humile, Filicula, pinnatum, speciosum; durch Kochen in chlorsaurem Kali und Salpetersäure werden nicht nur die Deckzellen von einander gesondert, sondern es trennen sich auch die granulirten Verdickungen von den gleichmässigen, und auch dann gelingt es die Reaktion auf Cellulose zu constatiren; bei dem Verbrennen und Glühen erweisen sich die granulirten Verdickungen feuerbeständig und erfahren nachher weder in Essigsäure noch Salzsäure eine Veränderung.[3]) Lässt man Flussspathsäure auf die be-

---

1) In allen Organen von dem Stamm bis zu den Schleiern der Fruchthaufen.

2) Im Stamm und den Blättern.

3) Nach dem Glühen erscheint nicht selten der die concave Endfläche bildende Theil dieser Polster durch eine spaltenförmige Vertiefung von der Peripherie derselben getrennt (Taf. I. 6*ab*), oder er steht nur an einer Stelle mit der Peripherie der letzteren in Verbindung (Taf. I. 6*c*), z. B. T. pinnatum.

Auch mag noch erwähnt werden, dass gewöhnlich das granulirte Ansehen der Kieselsäureconcretion in der Mitte der halbirten Basis der Polster undeutlicher wird oder gänzlich schwindet (Taf. I. 6*b*).

Digitized by Google

treffenden Pflanzentheile einwirken oder kocht man dieselben mit Kali, so werden dieselben alsdann bei dem Verbrennen vollständig zerstört.

Sonach ist in diesen polsterförmigen Verdickungen, so weit dieselben ein granulirtes Ansehen besitzen, die Cellulose von Kieselsäure durchdrungen.

Durch Theilung von Prosenchymzellen entstandene kubische oder tafelförmige Zellen, die den beschriebenen Deckzellen der Trichomanesarten analog sind, sind sowohl bei Monocotyledonen wie Dicotyledonen bekannt; sie entstehen hier durch Theilung der äussersten Zellen der Bastbündel und enthalten entweder, wie Payen[1]) und Sanio[2]) gezeigt haben, einen Krystall oxalsauren Kalks, oder sie enthalten, wie Crüger[3]) und v. Mohl[4]) bei verschiedenen Chrysobalaneen nachgewiesen haben, eine Kieselsäureconcentration, die nach der Beschreibung von v. Mohl's namentlich in der granulirten Beschaffenheit mit den polsterförmigen Verdickungen der Deckzellen von Trichomanes übereinstimmen dürfte, jedoch dadurch abzuweichen scheint, dass dieselbe in der Zellhöhle entsteht, nicht eine aus Cellulose bestehende Verdickung die Zellmembran durchdringt.

Bei anderen Farnen sind diese Deckzellen nur in seltenen Fällen bis jetzt bekannt geworden, so z. B. bei einigen Baumfarnen aus der Abtheilung der Cyatheaceae sind die äussersten Zellen der Sklerenchymscheide der Gefässbündel in Deckzellen abgetheilt, die Krystalldrusen oxalsauren Kalks enthalten; ferner bei Aspidium deltoideum, bei welchem die Epidermis auf der oberen Seite der Nerven der Blattzipfel in Deckzellen umgewandelt ist, die Concretionen von Kieselsäure enthalten, wie denn überhaupt die genannte Art eine entschiedene Kieselpflanze ist.

Diese beschriebenen Deckzellen fehlen bei Loxsoma, bei allen Arten von Hymenophyllum (incl. H. caespitosum), bei T. reniforme, bei T. § Micro-Trichomanes (T. digitatum, palmatifidum, dichotomum), bei T. § Craspedoneuron v. d. Bosch, bei T. § Macro-Trichomanes (T. Bauerianum, polyanthos, apiifolium).

---

1) Mém. s. l. developpement d. veget. 365 u. a.
2) Monatsb. d. Berl. Akademie 1857. 261.
3) Bot. Zeitung. 15. 300. T. VII. f. 53—55.
4) Bot. Zeitung. 19. 230 bei Hirtella, Davilla und Mirbelia.

Digitized by Google

Bei allen anderen Arten von Trichomanes werden dieselben als eine constante Erscheinung angetroffen; sie fehlen indess allgemein in den Wurzeln nach Untersuchungen von T. pinnatum, Javanicum, crispum, Arbuscula, pyxidiferum, exsectum, diaphanum; in dem Stamm werden sie vermisst bei T. saxifragoides, concinnum, capillatum und cavifolium, dagegen werden sie in dem Stamm von T. pinnatum, crispum, Ankersii, venustum, minutulum, membranaceum, pusillum, cuspidatum, reptans, muscoides, Krausii, Filicula, pyxidiferum, diaphanum, humile, ferner spärlich bei T. tenerum, trichoideum angetroffen; in dem Blattstiel von T. pinnatum, elegans, Millefolium wurden dieselben reichlich, bei T. crispum, elongatum, Hostmannianum, diversifrons, Smithii, trichoideum, Arbuscula in geringer Menge nachgewiesen; in der Blattfläche sind dieselben stets auf der oberen Seite reichlicher, als auf der unteren Seite ausgebildet, z. B. T. Javanicum, rigidum, elongatum, longicollum, dentatum, pumilum, macroclados, capillatum, muscoides, pyxidiferum, Filicula, Milnei, caudatum, venosum, achilleaefolium, diversifrons, Hostmannianum, membranaceum, oder sind nur auf der oberen Seite des Blattes ausgebildet, fehlen hingegen auf der unteren Seite gänzlich oder sind wenigstens bei den angestellten Untersuchungen mir entgangen, z. B. T. crispum, Martiusii, lucens, Arbuscula, Singaporianum, punctatum, davallioides, Mougeosii.

§ 10.

Als Scheinnerven[1] (nervi spurii) werden Stränge bezeichnet, die in der Blattfläche auftreten, ein den wahren Nerven ähnliches Ansehen besitzen, auch in ihrer Lage, insofern sie gewöhnlich von oberflächlichen unveränderten Parenchymzellen des Blattes bedeckt sind, mit denselben übereinstimmen, hingegen in ihrer Structur und gewöhnlich in ihrer Anordnung und in ihrem Verlauf von den wahren Nerven abweichen.

Die Eigenthümlichkeiten der Structur dieser Scheinnerven sind zunächst negative, insofern dieselben stets durch den Mangel von Gefässzellen von dem Gefässbündel der wahren Nerven sich verschieden erweisen; sie werden vielmehr einzig und allein von dem die Scheide

1) Vergl. Taschner l. c. 23. und van den Bosch, Bijdr. l. c. 313.

Digitized by Google

der wahren Nerven bildenden Sklerenchym zusammengesetzt, bieten indess eine dreifache Abstufung dar, indem sie

1) einzig und allein aus bastähnlichen Sklerenchymzellen,

2) aus bastähnlichen Sklerenchymzellen, die von Deckzellen bedeckt sind,

3) einzig und allein aus Deckzellen, oder richtiger gesagt aus Zellen, die in Deckzellen sich abgetheilt haben, bestehen.

Der erste Fall wird angetroffen bei Trichomanes § Craspedoneuron, welche Abtheilung, wie bereits oben bemerkt wurde, durch den Mangel von Deckzellen auf dem die wahren Nerven umhüllenden Sklerenchym ausgezeichnet ist. 1—3 neben einander liegende derbwandige Sklerenchymzellen bilden hier den intramarginalen Scheinnerven der Blattzipfel. (Taf. I. 23.)

Die zweite Ausbildung der Scheinnerven ist die verbreitetste; eine oder zwei, selten eine grössere Zahl bastähnlicher Sklerenchymzellen, auf der oberen oder auf beiden Seiten von Deckzellen bedeckt, bilden dieselben, z. B. T. Filicula (Taf. II. 38—40), reptans, Hookeri, pinnatum.

Aus Deckzellen allein werden endlich die Scheinnerven zusammengesetzt bei T. § Lacostea, wo van den Bosch[1]) dieselben bereits erkannte, dann bei T. Singaporianum, elegans Rich., diversifrons.

Bei T. Ankersii (Taf. I. 19), pedicellatum erinnern diese Scheinnerven bei flüchtiger Betrachtung in Ausdehnung und Fortbildung an Sklerenchymzellen, die auf der oberen und unteren Fläche von je einer Reihe von 4—8 Deckzellen bedeckt sind; bei genauerer Betrachtung aber ergiebt sich, dass in diesen Scheinnerven zwei Reihen von Deckzellen mit ihren charakteristisch verdickten Wandungen aufeinander liegen (Taf. I. 20. 21) und eine Sklerenchymzelle zwischen denselben fehle. Die auf diesen Deckzellen liegenden oberflächlichen Zellen sind tafelförmig abgeflacht und zartwandig.

Es wird keinem Zweifel unterliegen, dass während sonst bei der Ausbildung der Scheinnerven die Parenchymzellen des Blattes in drei neben einander liegende Zellen getheilt werden, von welchen die mittlere entweder unmittelbar zur Sklerenchymzelle wird, oder eine weitere Theilung erfährt und zwei oder mehrere Sklerenchymzellen bildet.

---

1) Bijdr. l. c 320.

Digitized by Google

von welchen alsdann die äussersten (oder ein Theil der äussersten) in Deckzellen sich abtheilen, hier die mittlere von den drei nach der ersten Theilung der Parenchymzelle des Blattes entstandenen in zwei Sklerenchymzellen sich umbilde, die sich alsbald in Deckzellen abgliedern. Diese in Deckzellen abgetheilten Parenchymzellen stellen den einfachsten Fall der Scheinnerven dar.

In voller Uebereinstimmung mit den Scheinnerven von T. Ankersii stehen die von T. diversifrons (Taf. I. 25. 26), wo dieselben indess bei weitem seltener, gewöhnlich nur in der Nähe der Mittelrippe der Fiederabschnitte auftreten.

Bei T. Singaporianum (Taf. I. 16) ist die streifenförmige Ausdehnung dieser Scheinnerven seltener als eine fleckenförmige Ausbreitung derselben, die bei T. pedicellatum und Ankersii nur selten angetroffen wird; ein Durchschnitt durch diese Scheinnerven weist die nämliche Lagerung der Deckzellen nach (Taf. I. 17); nicht selten liegen auch zwei durch eine Parenchymzelle von einander getrennte Scheinnerven übereinander, von welchen indess die eine von einer einfachen Lage von Deckzellen, die andere von zwei übereinander liegenden gebildet wird (Taf. I. 18).

Bei T. elegans Rich., dessen Blattparenchym gewöhnlich aus mehreren Zelllagen (Taf. IV. 2—3), nicht selten aber auch gegen den Rand der Zipfel (Taf. IV. 1) nur aus einer einzigen Zelllage besteht, kommen diese Scheinnerven sowohl in dem mehrschichtigen, wie dem einschichtigen Gewebe zur Entwickelung; in dem letzteren stimmt ihre Lage vollkommen mit der bei T. Ankersii angegebenen überein, in dem ersteren liegen dieselben den weiten Zellen der mittleren Parenchymschichte des Blattes auf und bestehen alsdann stets aus einer einzigen Reihe von Deckzellen, und scheint es, als ob die oberflächliche Zelle sich in eine äussere und eine innere getheilt habe, von welchen die letztere die Eigenthümlichkeiten der Deckzellen angenommen habe.

Nicht minder mannigfaltig als die Structur erscheint die Anordnung der Scheinnerven.

Nicht unpassend dürfte es sein, in dieser Beziehung zunächst das Auftreten von Scheinnerven an der Stelle wahrer Nerven hervorzuheben, z. B. bei T. reptans, Krausii, bei welchen von den katadromen Nerven die Zipfel häufig die erste, seltener mehrere oder sämmtliche durch Scheinnerven vertreten sind, die entweder mit der Mittelrippe in

Digitized by Google

continuirlichem Zusammenhang stehen, oder von derselben durch einige Parenchymzellen getrennt sind. Unter Arten mit fast fächerförmig ausstrahlenden Nerven bieten T. membranaceum und punctatum hieher gehörige Beispiele; bei dem ersten stehen alle Nerven in continuirlichem Zusammenhang, ein Theil derselben nimmt frühzeitig die Structur der Scheinnerven an, bei dem letzteren sind hingegen die Scheinnerven gewöhnlich durch eine einzige, selten durch mehrere Parenchymzellen von den wahren Nerven geschieden, deren Auszweigungen stets in einem continuirlichen Zusammenhang stehen.

An zweiter Stelle ist anzuführen, dass das Ende der wahren Nerven überaus häufig die Structur der Scheinnerven annimmt, indem nach dem Erlöschen des Gefässbündels nur die dasselbe umscheidenden Sklerenchymzellen sich bis zu dem Blattrand fortbilden, z. B. bei T. venosum, Petersii u. a.

An diese reiht sich alsdann an die Fortbildung der Nervenenden als Scheinnerven innerhalb des Randes und das Zusammenfliessen der letzteren zu einem intramarginalen Bogen, der entweder continuirlich innerhalb des Blattrandes hinzieht und die Enden sämmtlicher wahren Nerven verbindet, z. B. bei T. Hookeri, cuspidatum, oder wie bei T. sublimbatum in verschiedener Weise unterbrochen ist, oder nur mit einem Theil der Nervenenden in Verbindung steht. Gleichzeitig entspringen gewöhnlich von diesem intramarginalen Scheinnerven kleinere Zweige, die parallel mit den wahren Nerven gegen den Ursprung derselben zurücklaufen, Streifen von verschiedener Länge bilden oder unter einander anastomosiren, z. B. T. reticulatum. Wieder bei andern kommt eine intramarginale Anastomose der Scheinnerven nicht zu Stande, wohl aber treten dieselben in der Form von Streifen zwischen den Nerven und in einer mit denselben parallelen Lage bei T. reptans, muscoides, Krausii, pusillum u. a. auf, oder sie stellen feine Streifen oder kleine Flecken von unregelmässiger Zahl, Stellung und Ausdehnung dar, wie z. B. bei T. Ankersii, pedicellatum, Singaporianum, elegans Rich., diversifrons, bei welchen sie stets nur in der Nähe der Mittelrippe und in sehr geringer Zahl ausgebildet sind; oder sie bilden ausser einer intramarginalen Vereinigung der Enden sämmtlicher Nerven zahlreiche Querstränge, die entweder parallel mit der Mittelrippe hinziehen und die benachbarten Nerven verbinden, nicht selten aber auch in dieser Richtung isolirt auftreten oder eine schräge Richtung verfolgen, frei

Digitized by Google

endigen, sich verzweigen, auch wohl unter einander anastomosiren, z. B. T. pinnatum.

Bei Arten, deren Blatt nach Maassgabe von Caenopteris zerschlitzt ist, ist entweder ein continuirlicher oder in verschiedener Weise unterbrochener intramarginaler Scheinnerve ausgebildet, z. B. bei T. album, Filicula, oder es finden sich ausser diesem in schräger Richtung von dem Rand gegen den Nerven hinziehende streifenförmige Scheinnerven, z. B. bei T. Filicula var. striata, T. latemarginale, oder es finden sich letztere allein, z. B. bei T. capillatum, bei andern sind dieselben auf die Einschnitte der Zipfel beschränkt und erstrecken sich nur in geringem Grad gegen die Enden derselben, z. B. bei T. spicatum, bei dem nur einzelne Sklerenchymzellen an dieser Stelle ausgebildet sind, dann bei H. dilatatum, bei dem deren mehrere beisammen liegen.

Die Scheinnerven treten mehrfach bei sämmtlichen Arten einer Abtheilung von Trichomanes auf, zeichnen in andern Fällen einzelne Arten aus, z. B. T. Singaporianum in der Gruppe von T. Javanicum, und schwanken gewöhnlich nur innerhalb enger Grenzen, insofern ihre Zahl und Ausdehnung eine verschiedene ist, z. B. T. muscoides, reptans, Krausii, capillatum, oder insofern sie nur einen intramarginalen, oder ausser diesem isolirte schräge Streifen bilden, z. B. T. Filicula, melanorhizum; bedeutenderen Schwankungen sind dieselben nur bei T. pinnatum unterworfen, das in einer Varietät, die man wegen des vermeintlichen Mangels der Scheinnerven als T. Hostmannianum unterschieden hatte, diese so spärlich ausbildet, dass man dieselben nur vereinzelt, und nur bei der Untersuchung der Blattabschnitte in grösserer Ausdehnung auffindet, während dieselben an der Grundform sehr häufig und augenfällig auftreten.

Die Scheinnerven haben endlich, wie überhaupt das Sklerenchym, welches dieselben zusammensetzt, niemals Antheil an der Bildung der Fruchthaufen, ja auch die wahren Nerven, wie wir später sehen werden, entkleiden sich stets ihrer Sklerenchymhülle, wenn sie sich anschicken, einen Fruchthaufen zu bilden.

An diese Scheinnerven reihen sich dann als eine seltene Erscheinung Reihen oder Stränge oberflächlich liegender Sklerenchymzellen an, die wegen mehrfacher Abweichungen von den beschriebenen eine gesonderte Betrachtung verdienen.

Bei T. humile bilden dieselben einen Strang, der innerhalb der

Digitized by Google

mässig gedehnten Randzellen hinzieht und den intramarginalen Zellen der Blattfläche seinen Ursprung verdankt. Diese theilen sich durch eine mit der Fläche des Blattes parallele Scheidewand in zwei übereinander liegende Zellen, die sich strecken, nach beiden Seiten verschmälern, und auf den aufeinander liegenden Wandungen sich verdicken und auf diesen Verdickungsschichten mit je einer Reihe in die Zellhöhle vorspringender halbkugelförmiger oder kurzcylindrischer Polster versehen sind. (Taf. I. 28. 29.)

Bei einigen anderen Arten, z. B. T. Endlicherianum (Taf. I. 30) und Viellardii (Taf. I. 31), nehmen die randständigen Zellen des Blattes selbst mehr oder minder eine spindelförmige Gestalt an und weichen durch diese, sowohl wie ihre Verdickungen, auffallend von den Parenchymzellen der Blattfläche ab; bei T. Endlicherianum sind diese Randzellen ringsum gleichmässig verdickt; bei T. Viellardii ist die freie Wand dieser Zellen gewaltig verdickt, die an die intramarginalen Zellen angrenzende hingegen zart geblieben und längs dieser zieht das enge Lumen dieser Zellen hin.

Die randständigen Zellen dieser beiden Arten, wie die intramarginalen von T. humile bieten dann wieder Beispiele von Zellen, die zwar leicht auf Cellulose reagiren, gleichzeitig aber in der Ausdehnung ihrer Verdickungsschichten von Kieselsäure durchdrungen sind.

An diese Fälle reiht sich endlich H. cruentum, dessen Blatt von 4 — 8, in zwei Lagen übereinander liegenden Sklerenchymzellen berandet ist (Taf. II. 29). H. marginatum verhält sich vermuthlich in der nämlichen Weise.

§ 11.

Es wird vielleicht nicht unpassend sein, zum Schlusse dieser Betrachtung eine Bemerkung über das Sklerenchym überhaupt beizufügen und die allgemeine Verbreitung dieses Gewebes bei Gewächsen, sowohl höherer, wie niederer Organisation darzuthun. Scheinen doch zu einem solchen Nachweis die Hymenophyllaceae vor andern einen geeigneten Ausgangspunkt zu bieten, da bei ihnen nicht nur der continuirliche Zusammenhang dieses Gewebes in der Umgebung der Gefässbündel von dem Stamm aus durch den Blattstiel bis zu den äussersten Auszweigungen der Nerven, zumal bei den Arten von Trichomanes, bei welchen die der Oberfläche zugekehrten äussersten Zellen dieses Gewebes in

Digitized by Google

Deckzellen abgetheilt werden, constatirt werden kann, sondern auch dieses Gewebe wie in den Scheinnerven der Blätter zahlreicher Arten von Trichomanes unabhängig von den Gefässbündeln auftritt.

Diese Unabhängigkeit des Sklerenchyms von den Gefässbündeln wird aber auch da, wo die letzteren von dem ersteren umscheidet werden, dadurch dargethan, dass in dem Stamm die Grenze des centralen Gefässbündels von der Rinde stets so scharf gezogen ist — sonder Zweifel tritt dieselbe wie bei andern Pflanzen mit centralem Gefässbündel bei der ersten Sonderung der Gewebe auf — dass wohl Niemand in dem Sklerenchym der Stammrinde einen Theil des Gefässbündels erblicken dürfte; die bereits hervorgehobene continuirliche Fortsetzung des Sklerenchyms von dem Stamm bis zu den äussersten Auszweigungen der Nerven, in welchen dasselbe nur durch eine Schichte langgedehnter zartwandiger Zellen von den verholzten Gefässzellen der Nerven gesondert ist, lehrt ferner, dass auch hier, wo aus einer oder wenigen Zellreihen der Blattfläche das Gefässbündel sammt seiner Sklerenchymscheide hervorgeht,[1]) dieses Gewebe nicht als Bast des Gefässbündels, sondern als eine Modification des parenchymatischen Gewebes, wie schon von Mohl[2]) bei andern Farnen festgestellt hat, anzusehen sei; wenn man dann festhält, dass wie in den Scheinnerven am leichtesten, aber auch in den wahren Nerven nachweisbar ist, die Sklerenchymzellen der Theilung einzelner oder weniger Parenchymzellen ihren Ursprung verdanken und dass da, wo die Entstehung des Sklerenchyms nicht verfolgt werden konnte, die Annahme eines analogen Ursprungs wahrscheinlich ist, weil dasselbe frühzeitig von dem Parenchym scharf abgegrenzt auftritt, so wird man in dem Sklerenchym nicht nur eine Modification des Parenchyms, die durch eigenthümliche Ausbildung einzelner Parenchymzellen zu Stande komme, erblicken, sondern erkennen, dass dasselbe in Folge der Sonderung des Parenchyms durch Theilung eines Theils seiner Zellen den Ursprung erhalte und mithin nicht nur durch die Ausbildung, sondern auch durch die Entstehung seiner Zellen von dem parenchymatischen Gewebe zu unterscheiden sei. Von diesem

1) Nicht unerwähnt bleiben mag, dass dieses Gewebe ganz gewöhnlich die Enden der Gefässbündel in den Blattnerven überragt und so weit die Entwickelung verfolgt werden konnte, auch vor diesen entsteht.

2) De struct. caud. fil. arbor. § 31.

Digitized by Google

Standpunkt aus schien es gerechtfertigt, dieses Gewebe mit einem besonderen Namen zu belegen.

Die Bezeichnung desselben als Sklerenchym hebt wenigstens eine fast allgemeine Eigenthümlichkeit[1]) desselben hervor und mag so lange beibehalten werden, bis eine tiefere Einsicht in die Bedeutung desselben eine passendere Benennung ermöglicht.

Die weite Verbreitung dieses Gewebes dürfte ferner ebenfalls einen besonderen Namen für dasselbe rechtfertigen.

Bei den Cyatheaceis zunächst, bei welchen dieses Gewebe zuerst die Aufmerksamkeit der Forscher auf sich gezogen hat, bietet dasselbe unter allen Farnen die grösste Mannigfaltigkeit dar. Dasselbe bildet hier

1) eine Scheide der Gefässbündelröhre des Stammes,

2) feine in dem Mark auftretende Stränge,

3) eine unter der oberflächlichen Rinde hinziehende continuirliche Zone.

Die Scheide der Gefässbündelröhre des Stammes ist wiederum entweder eine vollständige, indem das Sklerenchym auf beiden Seiten der Gefässbündel eine der Ausbildung derselben entsprechende Zone bildet, oder sie ist eine unvollständige, halbirte und alsdann auf die innere Seite der Gefässbündelröhre beschränkte, z. B. manche Arten von Cibotium, Alsophila pruinata, blechnoides. In dem ersten Fall schwindet bei dem Eintritt der Gefässbündel in den Blattstiel dieses Gewebe allmählig, lässt sich indess gewöhnlich auf der inneren der Längsachse des Blattstieles zugekehrten Seite der Gefässbündel weiter verfolgen als auf der äusseren, in dem zweiten Fall hingegen folgt es den Gefässbündeln in ihrem Verlauf durch den Blattstiel und die Blattspindel bis zu den Auszweigungen der letzteren.

Die im Mark verstreuten Sklerenchymstränge fehlen bei Dicksonia, Cibotium, Alsophila pruinata und blechnoides, sind hingegen bei der Mehrzahl der Arten von Alsophila, Hemitelia und Cyathea eine constante Erscheinung; dieselben haben wie die marksständigen Gefässbündel dieser Stämme nur eine geringe Stärke, stehen hie und da mit der inneren

---

1) Bei zahlreichen und grade solchen Arten, deren Parenchym von zartwandigen Zellen gebildet wird, persistirt nach Zerstörung des Parenchyms das Gefässbündelsystem der Pflanze noch lange Zeit vermöge der Dauer, die dem dasselbe umscheidenden Sklerenchymgewebe zukommt, z. B. H. obtusum, T. digitatum u. a.

Digitized by Google

Seite der Scheide der Gefässbündelröhre in Zusammenhang, treten bei dem Austritt der markständigen Gefässbündel in das Blatt zu einer dieselben umscheidenden Röhre zusammen, schwinden aber dann, wie diese Gefässbündel selbst, wenigstens in manchen Fällen alsbald.

Die Sklerenchymzone in der äussern Rinde[1]) ist von wenigen Lagen parenchymatischen Gewebes bedeckt und durch diese von der Epidermis des Stammes getrennt; sie kommt nicht allein allen Cyatheaceis ohne Unterschied zu, sondern setzt sich auch überall von dem Stamm in das Blatt fort und hat in diesem eine bedeutendere Verbreitung, als das die Gefässbündel umscheidende oder in Form feiner markständiger Stränge auftretende Sklerenchym.

In dem Blattstiel zunächst und der Blattspindel liegt diese Sklerenchymzone, wie in dem Stamm, unter der äussersten parenchymatischen Rinde; dieselbe tritt alsdann in den Auszweigungen der Blattspindel den Gefässbündeln näher und begleitet schliesslich die Nerven der Blattabschnitte bis zu den äussersten Auszweigungen, auf der oberen und unteren Seite derselben einen dünnen Strang bildend, z. B. Alsophila pruinata, Dicksonia Culcita, der nur durch wenige Parenchymzellen von den Gefässbündeln, fast in der nämlichen Weise, wie dies bei den Hymenophyllaceis der Fall ist, getrennt ist.

Es stehen daher die die Nerven der Blattfläche begleitenden Sklerenchymstränge nicht im Zusammenhang mit der Sklerenchymscheide der Gefässbündel des Stammes, sondern sie sind die continuirlichen Fortsetzungen und Auszweigungen der in der äusseren Rinde liegenden Sklerenchymzone, grade wie dies Verhalten bei den Hymenophyllaceis constatirt werden konnte. Die Sklerenchymscheide der Gefässbündelröhre des Stammes erweist sich in Folge dessen als eine Eigenthümlichkeit der Cyatheaceae. Zu dem nämlichen Resultat gelangt man bei Vergleichung derselben mit andern Abtheilungen der Farne.

Den Stämmen dieser kommt entweder einzig und allein die in der

1) Schon v. Mohl (de struct. caud. fil. arbor. II. § 19) hat hervorgehoben, dass die Structur der Prosenchymscheide der Gefässbündel und des Prosenchyms in der äusseren Rinde übereinstimme; nur in wenigen Fällen sind mir zwischen denselben Verschiedenheiten von untergeordneter Bedeutung vorgekommen, insofern die äussersten Zellen der Gefässbündelscheide in Krystall führende Deckzellen abgetheilt waren, welche hingegen in den äusseren Zellen der Rindensklerenchymzone stets vermisst wurden.

Digitized by Google

äusseren Rinde liegende Sklerenchymzone zu oder es kommen denselben ausser dieser einzelne dünne Mark-, zuweilen auch Rinden-ständige Sklerenchymstränge zu, oder endlich es fehlt dem Stamm alle und jede Spur des Sklerenchyms.

Die feinen Mark- oder gleichzeitig auch Rinden-ständigen[1]) Stränge dieses Gewebes haben gewöhnlich nur eine geringe Längsausdehnung, verzweigen sich nicht, anastomosiren auch nicht mit einander, sind entweder auf den Stamm beschränkt, z. B. Polypodium Lingua, und werden auch noch in dem Grund des Blattstiels angetroffen, z. B. Aspidium aristatum, Mexicanum. Gleichzeitig bildet das Sklerenchym der Rinde entweder eine breite Zone, wie bei Polypodium Lingua; oder es ist, wie bei den genannten Aspidien, nicht scharf umschrieben und wird von zartwandigen Zellen gebildet, die durch ihre bedeutendere Länge, ihre innigere und festere Verbindung, insofern Intercellulargänge zwischen denselben fehlen, von den Zellen des innern und äussern Rindenparenchyms verschieden sind. — Bei den Polypodiaceis, welchen markständige Sklerenchymstränge fehlen, ist das Sklerenchym der Rinde entweder mit allen seinen Eigenthümlichkeiten ausgestattet, oder es ist dasselbe nur angedeutet, oder es fehlt endlich alle und jede Spur desselben, z. B. Davallia stenocarpa, Acrostichum axillare, verschiedene Arten von Polypodium. Das Letztere gilt auch von dem Stamm von Angiopteris.

In dem Blattstiel dieser Farne ist überall das Sklerenchym entschieden ausgebildet und zwar tritt dasselbe, da wo es im Stamm wie bei den zuletzt genannten Beispielen fehlt, an der Grenze des Blattkissens von dem Blatt auf, erlangt rasch, namentlich bei Angiopteris, eine bedeutende Mächtigkeit, setzt sich hingegen da, wo die Stammrinde mit einer Sklerenchymzone versehen ist, continuirlich von dieser in den Blattstiel fort.

Dasselbe ist entweder wie bei Angiopteris[2]) durch etliche Lagen

1) z. B. Aspidium Mexicanum Pr.

2) Harting, monog. d. Marattiac. 46 hat dieses Gewebe hier als Bast beschrieben und in demselben ein Analogon der Gefässbündelscheide der Cyatheaceae (l. c. 57) erblickt, und in Folge dessen die Ansicht aufgestellt, dass in dem Stamm der letzteren Achse und Blatt verschmolzen seien, und deshalb die Gefässbündel des Stammes zu beiden Seiten von diesem Gewebe umgeben seien. Es wird nach den oben mitgetheilten Beobachtungen über die Verbreitung dieses Gewebes bei Cyatheaceae nicht nothwendig sein, das Irrige dieser Ansicht zu widerlegen.

Digitized by Google

von Parenchymzellen von der Epidermis getrennt, oder es liegt unmittelbar unter der letzteren, z. B. Polypodium Lingua, Woodwardia aspera, Davallia stenocarpa, oder es hat endlich eine oberflächliche Lage, indem die Zellen der Epidermis[1]) selbst in allen Eigenschaften mit den unten liegenden Sklerenchymzellen übereinstimmen, z. B. Adiantum aethiopicum, hispidulum, denticulatum, Allosorus falcatus, Nephrolepis tuberosa, Pteris hastata, repandula, Asplenium ebenum. Hierbei ist jedoch zu bemerken, dass zunächst im Grund des Blattstiels, wie in dem Stamm das Sklerenchym unter der Epidermis liegt, dass erst allmählig die Eigenthümlichkeiten der letzteren schwinden und dass eben so bei dem Uebergang der Blattspindel in die blattartigen Ausbreitungen die Epidermis wieder als eine von dem Sklerenchym verschiedene Schichte hervortritt, z. B. bei Adiantum hispidulum.

In der Blattfläche selbst begleitet das Sklerenchym entweder wie bei den Hymenophyllaceis die Gefässbündel bis zu den äussersten Auszweigungen, z. B. Oleandra neriiformis, Aspidium deltoideum, oder es begleitet einzig und allein die Mittelrippe, setzt sich nicht auf die Seitennerven fort, z. B. Aspidium falcatum, Asplenium lucidum, Polypodium sporadocarpum, Brownianum, Pteris esculenta, oder es begleitet nur die die primären Maschen abschliessenden Stränge, z. B. Platycerium, oder es folgt nur auf der unteren Seite des Blattes den Nerven, z. B. Aspidium Sieboldi, Woodwardia aspera, oder es umgiebt noch den Anfang der äussersten Nerven und schwindet erst im Verlauf derselben, z. B. Polypodium solidum.

Seiner Lage nach ist dieses Gewebe in der Blattfläche entweder sowohl dem Gefässbündel, als auch von der Epidermis deutlich getrennt, z. B. Polypodium Lingua, Platycerium, oder es erstreckt sich von dem Gefässbündel bis zu der Epidermis, z. B. Loxsoma, bei welchem der die obere Seite der Nerven bedeckende Sklerenchymstrang eine bedeutendere Stärke als der der unteren Seite besitzt. Gleichzeitig erfährt die das Sklerenchym bedeckende Oberhaut eine Veränderung, in Folge der ihre Zellen dem unter liegenden Gewebe weit ähnlicher geworden sind, als den benachbarten das Blattparenchym bedeckenden Epidermiszellen, ja in einem Fall, bei Aspidium deltoideum, theilen sich

1) Mit Ausnahme der Stellen, an welchen das Luft führende Zellgewebe ausgebildet ist.

Digitized by Google

selbst die die Nerven bedeckenden Epidermiszellen der Blattoberseite in kleine Kieselconcretionen enthaltende Zellen ab.

Massenhafte Entwickelung des Sklerenchyms, den Gefässbündeln eine ungewöhnliche Breite ertheilend, in gewisser Beziehung an Trichomanes § Craspedoneuron erinnernd, findet sich bei Davallia parallela, pedata u. a., bei welchen auf der untern Seite des Blattes die Nerven von bandartig abgeflachten Zonen des in Rede stehenden Gewebes bedeckt sind.

Unabhängig von den Gefässbündeln, den Scheinnerven von Trichomanes analoge Stränge bildend, tritt das Sklerenchym bei den verschiedensten Farnen, häufiger in continuirlichem Zusammenhang mit dem Sklerenchym der Blattspindel, seltener unabhängig von denselben auf.

Ersteres ist der Fall bei Polypodium Lingua, vexatum, sporadocarpum, Brownianum, Asplenium lucidum, Polybotrya cervina, Stenochlaena Meyeriana, Aspidium falcatum, deren Blätter oder Blattabschnitte am Grunde oder in ihrer ganzen Ausdehnung von einem unter der Epidermis liegenden Sklerenchymbündel umsäumt werden, das sich continuirlich in den Sklerenchymring des Blattstiels fortsetzt, dann bei Polypodium Marginellum, Adiantum denticulatum u. a., bei welchem längs des halbirten Randes der Fieder die Epidermis die Eigenthümlichkeiten des darunter liegenden Sklerenchyms theilt.

Isolirte Sklerenchymstränge treten in der Blattfläche auf bei Todea hymenophylloides, bei welcher, wie bei H. dilatatum, an den Einschnitten der Zipfel der secundären Blattabschnitte unter der Epidermis ein Strang von 2—5 Sklerenchymzellen liegt, der sich in verschiedener Ausdehnung gegen die Spitze der Zipfel erstreckt; ferner bei Pteris (Cassebeera) pinnata, an den Einschnitten der Kerbzähne, wo sie zugleich eine Unterbrechung der Fruchthaufen herbeiführen, dann bei Davallia elata und elegans u. a., und bei Polypodium solidum,[1] bei welchen dieselben von dem Rand der Blattabschnitte nach innen gegen den Ursprung der Nerven sich erstrecken.

Endlich treten vereinzelte bastähnlich gestaltete sehr stark verdickte Sklerenchymzellen in der Epidermis von Monogramme, Vaginularia, zahlreichen Arten von Adiantum und Antrophyum auf, in Betreff

1) Ueber Polypodium T. I. F. 2. 3.

Digitized by Google

deren ich jedoch unentschieden lasse, ob sie der Epidermis selbst angehören oder etwa unter derselben entstehen und zwischen die Zellen derselben sich einschieben.

Den Scheinnerven von Trichomanes analoge Stränge von Sklerenchym treten ferner in den Blättern verschiedener Arten von Isoëtes[1]) in constanter Zahl und Stellung auf, während in dem knollenförmigen Stamm dieses Gewebe nicht nachgewiesen zu sein scheint. Die Equisetaceae hingegen sind ausgezeichnet durch die starken die Kanten des Stammes einnehmenden Sklerenchymbündel.

Bei Gewächsen aus der Abtheilung der Gymnospermen begegnen uns Sklerenchymzellen unter der Epidermis der Blattkissen und Blätter zahlreicher Nadelhölzer, bei Encephalartos, während bei andern, z. B. Ceratozomia, dieselben auf die Umgebung der Gefässbündel beschränkt sind; ich trage ferner kein Bedenken, die bei Welwitschia mirabilis, am reichlichsten in Blatt und Rinde des Stammes auftretenden, von Hooker[2]) mit besonderer Sorgfalt beschriebenen Spicularzellen hierher zu stellen.

In den Blättern von Monocotyledonen treten z. B. bei Pandanus graminifolius Sklerenchymstränge[3]) auf, die sich bis in die Blattscheide verfolgen lassen und in dieser erlöschen.

Unter Dicotyledonen bietet Berberis ein Beispiel von Sklerenchym; die Rinde des Stammes enthält eine breite Zone dieses Gewebes, welches sich in die dornförmigen Blätter fortsetzt, während bei andern, z. B. manchen Papilionaceis, isolirte Sklerenchymstränge in den Kanten des Stammes auftreten; bei andern, z. B. Ilex Aquifolium, tritt dieses Gewebe erst in dem Blattstiel auf, und bildet dann bei dem Eintritt in die Blattfläche den den Rand derselben verdickenden Strang; bei Camella Japonica endlich treten isolirte Sklerenchymzellen in der Rinde des Blattstiels auf.

Unter Pflanzen, die ihrer Organisation nach eine tiefere Stufe in dem System als die Farne einnehmen, tritt namentlich bei den Laubmoosen das Sklerenchym als eine constante Erscheinung auf.

---

1) Braun, Sitzb. d. Berl. Akadem. 1863. 588 u. f.

2) Trans. Linn. society. Vol. 24. I. 12.

3) Die von v. Mohl, de struct. Palmarum § 74, 76, beschriebenen Stränge 4. Ordnung gehören hierher.

Digitized by Google

Bei Polytrichum commune, welches unter den einheimischen Bryaceis die complicirteste Structur besitzt, enthält die Längsachse des Stammes einen Strang feiner Zellen, eine Andeutung eines Gefässbündels, der seine Zweige den Blättern zusendet, in der von Unger[1]) bei Dawsonia nachgewiesenen Weise. Die Rinde in der Umgebung dieses Gefässbündels besteht aus einer inneren und einer äusseren Zone, von welchen die erstere aus zartwandigen weiteren, die letztere aus gedehnteren, engeren, derbwandigeren Zellen zusammengesetzt wird; diese letztere entspricht dem Sklerenchym, das in dem Stamm dieses Mooses, ähnlich wie in dem Blattstiel zahlreicher Farne, sich bis zur Oberfläche fortbildet und selbst die Epidermis in sein Bereich zieht.

Alle andern Laubmoose verhalten sich, wie aus den von Unger mitgetheilten Untersuchungen[2]) bekannt ist, einfacher, insofern entweder der centrale, das Gefässbündel höherer Pflanzen ersetzende Strang keine Zweige nach den Blättern sendet, z. B. Hypnum alopecurum, tamariscinum, Mnium punctatum, Fissidens, Bartramia Halleriana, Paludella squarrosa, Bryum pseudo-triquetrum, oder selbst jede Spur dieses Gefässbündels fehlt, z. B. Schistostega, Sphagnum, verschiedenen Arten von Jungermannia.

In dem ersten Fall ist das Rindenparenchym, wie bei Polytrichum commune, in eine äussere und innere Zone gesondert, und erstere mit den Eigenschaften des Sklerenchyms versehen; in dem zweiten Fall findet entweder das nämliche statt, oder es ist wie bei Sphagnum eine mittlere, jedoch der Oberfläche näher liegende Zone, von dieser durch 2 — 4 Lagen weiter Zellen getrennte Schichte in Sklerenchym umgewandelt.[3])

Für die Ausbildung eines Streifens von Sklerenchym an der Stelle der Mittelrippe anderer Blätter, oder längs des Randes, wie bei H. cruentum, Polypodium Marginellum, finden sich bei zahlreichen Moosen Beispiele.

---

1) Sitzb. d. K. K. Akademie. B. 43. II. 506.

2) l. c. 497 u. f.

3) Unger sowohl wie Zuchal (bot. Zeit. 21. 353) haben bereits entschieden, dass die bei Sphagnum von manchen Forschern für einen Holzring gehaltene Sklerenchymzone der Rinde angehöre; es bleiben jedoch noch über den Ursprung der das Gewebe bedeckenden weiten Zellen Zweifel, die ich dermalen nicht zu lösen im Stande bin.

Digitized by Google

§ 12.

Wie bereits oben erwähnt wurde, beruht auf der Combination von Gefässbündeln mit einer einzigen oder wenigen (2—4) Lagen parenchymatischen Gewebes, die wir in den Blättern der Hymenophyllaceae antreffen, die wichtigste Eigenthümlichkeit der vegetativen Organe dieser Gewächse.

Die genauere Betrachtung[1]) dieses parenchymatischen Gewebes wird nun unsere Aufgabe sein und zwar soll dasselbe zunächst bei den einschichtigen, dann bei den mehrschichtigen Arten untersucht und so weit als es möglich ist, die Gestalt seiner Zellen gesondert von der Structur oder Schichtung ihrer Membran betrachtet werden.

Als Einleitung dieser Untersuchungen dürfte es vielleicht nicht unpassend sein, zunächst die Zellen des Blattrandes und zwar grade die freie seitliche dem Blattrand zugekehrte Wand derselben zu betrachten, da in ihr Verhältnisse klar zu Tage liegen, die bei den Hymenophyllaceis eine grosse Rolle spielen, aber auf den mit andern Zellen in Berührung stehenden Wandungen schwieriger zu entziffern sind.

Bei zahlreichen Arten von Hymenophyllum, z. B. H. caudiculatum (Taf. III. 1. 2), H. fuciforme (Taf. II. 6), H. abruptum (Taf. III. 9), H. brachyglossum (Taf. III. 11. 12), ist nämlich diese Wand der Randzellen des Blattes nicht überall von gleicher Stärke, sondern sie erscheint mit nach innen in die Zellhöhle vorragenden Anschwellungen und Fortsätzen besetzt, die bald niedere Höcker, bald Zacken von bedeutenderer Länge darstellen.

In vielen Fällen lässt sich bei aufmerksamer Betrachtung in der Mittellinie dieser Fortsätze eine Contour erkennen, die darauf schliessen

1) In Betreff der Methode, die bei den vorhergehenden und folgenden Untersuchungen angewandt wurde, ist vielleicht die Bemerkung nicht überflüssig, dass um Einsicht in die Structurverhältnisse der Hymenophyllaceae zu erlangen, eine Entfärbung des Zellinhalts eine unerlässliche Bedingung ist. Eine solche wird am leichtesten durch Maceration mikroskopischer Präparate oder grösserer Abschnitte der zu untersuchenden Theile in Salpetersäure erreicht; Kochen in Salpetersäure führt zwar rascher die Entfärbung des Zellinhalts herbei, lockert aber gleichzeitig den Zusammenhang der Zellen in einem solchen Grad auf, dass nur dann, wenn es sich um die Trennung der Zellen handelt, mit Erfolg Gebrauch von demselben gemacht werden kann.

Digitized by Google

lässt, dass dieselben Einfaltungen der Zellmembran ihren Ursprung verdanken; durch Einwirkung solcher Reagentien, welche eine Quellung der Zellmembran herbeiführen, z. B. von Kalilösung oder von Schwefelsäure, tritt alsdann diese Contour nicht nur deutlicher hervor, sondern es gelingt auch, die in diesen Duplicaturen dicht auf einander liegenden Lamellen der Zellmembran von einander zu trennen und diese Einfaltungen in wellenförmige Biegungen überzuführen. An solchen Präparaten kann alsdann zugleich constatirt werden, dass die Zellmembran überall die gleiche Stärke besitze und dass an diesen Einfaltungen sämmtliche Schichten der Zellmembran Antheil haben, mit Ausnahme der Cuticula, welche als gleichmässig dünnes Häutchen die freie Wand sämmtlicher Zellen überkleidet.

Nicht minder wichtig ist es, die Ausdehnung dieser Falten zu verfolgen, zu welchem Behuf der freie Saum dieser Zellen von dem Rand der Blattzipfel durch den Schnitt abzutrennen ist. An auf diese Weise erlangten Präparaten, die man sowohl von der Schnittfläche, wie von der äussern Randfläche betrachten kann, ist die Beschaffenheit der letzteren in ihrer ganzen Ausdehnung zu übersehen (Taf. III. 3. 4. 7. 8) und erkennt man, dass die Falten entweder als grade, getrennte, den seitlichen Wandungen der Randzelle parallele Streifen in die Höhle der Zellen vorspringen, oder dass dieselben in zwei Schenkel sich theilen oder dass benachbarte Falten durch eine Querfalte oder durch zahlreichere und unregelmässige Verbindungen netzartig vereinigt seien.

In solchen Fällen besitzt die äussere Wand der Randzellen das Ansehen einer mit Netzfasern verdickten Zelle und erscheinen die Maschen des Netzes als Tüpfel.

Indessen ist dieser Schein ein trügerischer, denn es rühren diese Tüpfel weder von Löchern der Verdickungsschichten her, noch dringen dieselben bis zur primären Membran der Zelle vor, sondern es ist diese sammt ihren Verdickungsschichten überall geschlossen und von gleicher Stärke, und verursachen faltenförmige Einstulpungen derselben das grad- oder netzfaserige Ansehen.

Es sind daher solche Zellen nicht als netzfaserige, sondern als netzförmige gefaltete, als cellulae dictyoptyctae, zu bezeichnen.[1])

---

1) Naegeli machte bereits (Linnaea 16. 248) bei der Beschreibung der partiellen warzenförmigen Einstülpungen der Membran der Haarwurzeln von Marchantia dar-

Digitized by Google

Gleichzeitig ist zu betonen, dass die Betrachtung der Randzellen nicht nur zahlreiche Mittelstufen zwischen Einfaltungen und wellenförmigen Biegungen der Membran nachweist, sondern dass auch erstere in letztere übergeführt werden können und dass daher dieselben nur gradweise Verschiedenheiten der nämlichen Erscheinung darstellen, wie bereits von Cohn[1]) bei seinen Untersuchungen über die Epidermis verschiedener Pflanzentheile festgestellt wurde.

Diese Betrachtung vorauszuschicken, schien gerechtfertigt, weil bei der Mehrzahl der Hymenophyllaceae Biegungen oder Faltungen der Zellmembran oder beide gleichzeitig angetroffen werden, Zellen hingegen, bei welchen solche fehlen, eine bei weitem seltnere Erscheinung sind.

Nach der An- oder Abwesenheit von Biegungen und Falten und noch mehr nach der Ausdehnung derselben zerfallen alsdann die Zellen der Hymenophyllaceae in erster Linie in zwei Abtheilungen.

Bei der einen haben die Seitenwandungen der Zellen eine verticale Stellung, und Biegungen und Faltungen, wenn solche überhaupt auftreten, erstrecken sich gleichmässig über die ganze Höhe der Seitenwand; bei der andern sind hingegen Biegungen oder Faltungen stets vorhanden, und zwar auf der Grenze der Seitenwandungen von den äussern freien Wandungen beschränkt, während der mittlere Theil der Seitenwandungen entweder wie bei polyedrischen Zellen flach ist, oder Biegungen beschreibt, die von denen ihres oberen oder unteren Endes verschieden sind.

Bei den dieser zweiten Abtheilung angehörenden Zellen besitzt der mittlere Theil derselben gewöhnlich flache Seitenwandungen und erscheint daher, wenn man diesen in den Focus des Mikroskops einstellt, die Zelle als eine polyedrische, während diese Zellen, wenn die Grenzlinien der freien Wandung eingestellt werden, als wellenförmige (z. B. Taf. III. 22. 44) oder divaricate erscheinen, weshalb dieselben in der Folge als doppelgestaltete oder als cellulae amphimorphae bezeichnet werden.

---

auf aufmerksam, dass Faltungen der Zellmembranen eine weite Verbreitung besässen und dass dieselben sowohl in der Form von Spiral- als Netzfasern u. s. w. auftreten könnten.

1) Nova act. Nat. Curios. Acad. Caes. Leop. Vol. XXII. Pars II. 529.

Digitized by Google

Diese amphimorphen Zellen wurden bisher mit wellenförmigen Zellen nicht nur bei den Hymenophyllaceis, sondern auch bei zahlreichen andern Farnen von complicirter Structur, z. B. Arten von Antrophyum, Asplenium, Adiantum, Lycopodium etc. — bei welchen indess stets nur der an die freie Oberfläche angrenzende Rand der Epidermiszellen die hier in Rede stehenden Biegungen zeigt — verwechselt, sie wurden hingegen in der Epidermis der Equiseten von Sanio.[1]) der der Gräser von v. Mohl[2]) richtig erkannt.

Die Zellen beider Abtheilungen zeigen alsdann die nämlichen Modificationen, insofern ihre Biegungen oder Falten, die also bei der einen über die ganze Höhe der Seitenwandungen sich erstrecken, bei der andern auf die Grenze der äusseren freien und seitlichen Wandungen beschränkt sind, entweder wellenförmige oder zickzackförmig gebrochene Linien beschreiben, in welchem letzteren Fall die einspringenden Kanten der Zelle gleichzeitig in Falten ausgezogen sind, oder Falten an den ebenen Wandungen polyedrischer Zellen sich ausbilden.

Polyedrische faltenlose Zellen, wie sie ohne Unterschied den Blättern aller Hymenophyllaceae im jugendlichen Zustand als erstes Entwickelungsstadium zukommen, werden im ausgebildeten Zustand nur bei einem kleinen Theil derselben angetroffen, z. B. T. digitatum, pyxidiferum, splendidum, nanum, H. caespitosum. Dieselben gehen unmerklich in Zellen über, deren Seitenwandungen gleichmässig über ihre ganze Höhe sich erstreckende wellenförmige oder zickzackförmig gebrochene Biegungen beschreiben.

Beispiele der wellenförmigen Zellen geben T. crispum (Taf. II. 11), Martiusii, Beispiele der divaricaten T. (§ Gonocormus) saxifragoides (Taf. II. 9—11), minutum u. a.

Die Falten, welche bei den Zellen der ersten Abtheilung auftreten, erstrecken sich gleichmässig über die ganze Höhe der Seitenwand, springen gewöhnlich nur als schwache leistenförmige Verdickungen in die Zellhöhle vor, sind bei divaricaten Zellen auf die einspringenden Kanten der Biegungen beschränkt, demgemäss von einander getrennt, unverzweigt und alterniren auf den aneinander liegenden Membranen benachbarter Zellen, z. B. T. § Gonocormus (Taf. II. 10. 12), treten

1) Linnaea 29. 392.

2) Verm. Schriften 262. Anmerk.

Digitized by Google

hingegen in polyedrischen Zellen zahlreicher auf, haben alsdann eine gedrängtere Stellung, gehen häufig netzförmige Verbindungen ein und correspondiren auf den aneinander liegenden Membranen, so weit man dieses Verhältniss bei der Betrachtung der äusseren freien Zellwandung ermitteln kann, z. B. H. Neesii, fucoides, ciliatum (Taf. III. 21. 16. 17. 20).

Entsprechend diesen Modificationen der Zellen der ersten Abtheilung erscheinen auch die der zweiten oder die amphimorphen Zellen entweder als wellenförmige, als divaricate, oder als polyedrische.

Bei den ersteren beschreiben die äusseren Enden der Seitenwandungen wellenförmige Biegungen und sind mit Ausbuchtungen versehen, die über die Nachbarzelle übergreifen und in einen entsprechenden Einschnitt derselben passen, z. B. T. spicatum (Taf. III. 22. 23), crispum (Taf. II. 15).

In den beiden andern Modificationen der amphimorphen Zellen treten hingegen Falten auf, die in gleichmässiger Ausdehnung auf die äussere freie Wand und auf die Seitenwand der Zelle sich erstrecken, und längs der Peripherie der freien Wandung der Zelle eine Reihe kleiner unvollständiger Fächer abtheilen, die in der Höhle der Zelle ausmünden (Taf. II. 30. 35. III. 25); diese Falten lassen sich niemals wie die Verdickungsschichten von der Zellmembran loslösen, wohl aber gelingt es, hier und da die Grenzlinie der beiden in den Falten aneinander liegenden Lamellen zu erkennen oder eine solche an in Kalilösung oder Schwefelsäure aufgequollenen Zellen nachzuweisen, oder durch die Einwirkung der Schultz'schen Mischung diese Lamellen von einander zu trennen (Taf. II. 23. III. 30). Diese Falten alterniren ferner constant auf den aneinander liegenden Membranen benachbarter Zellen, sind gewöhnlich von geringer, seltner von bedeutender Breite und stellen alsdann eine in die Höhle der Zelle vorspringende Anschwellung dar, ja erweitern sich zuweilen an ihrem innern Ende, z. B. T. Javanicum (Taf. III. 34. 35). In diesem letzteren Fall enthalten dieselben eine Ablagerung von Kieselsäure, die nach dem Verbrennen der Zellen als eine kleine farblose homogene, nicht granulirte, in Salz- oder Essigsäure unverändert bleibende Masse übrig bleibt, in ihrer halbkeilförmigen Gestalt noch vollkommen mit diesen Anschwellungen übereinstimmt, an Grösse aber hinter denselben zurücksteht (Taf. III. 37 *a*, *b*, *c*).

Die amphimorphen divaricaten Zellen sind alsdann dadurch ausge-

Digitized by Google

zeichnet, dass ihre Grenzlinie eine zickzackförmig gebrochene ist; sie schliessen sich indess innig an die wellenförmigen an, indem nicht selten die vorspringenden Winkel ihrer Grenzlinie, wie bei T. intramarginale, Arbuscula (Taf. II. 5. 7), abgerundet oder abgestutzt, wie bei T. Javanicum (Taf. III. 34), sind. Ihre Falten haben entweder, wie in dem letztgenannten Beispiel, eine bedeutende Breite und greifen die durch diese Falten getrennten und über dieselben hinaus vorspringenden Läppchen des Randes benachbarter Zellen auffallend in einander (Taf. III. 35), oder es haben die Falten nur eine geringe Stärke, und liegen alsdann die vorspringenden Läppchen dicht beisammen und greifen die der Nachbarzellen nur in geringem Grad über einander, z. B. bei T. pinnatum.

In diesen letzteren Fällen, z. B. bei T. rigidum, lehrt die Entwickelungsgeschichte, dass die polyedrischen Zellen des jugendlichen Blattes bei ihrer Vergrösserung zunächst längs der Peripherie ihrer freien Wandungen Biegungen beschreiben (Taf. III. 24) und alsdann zunächst die Ausbildung besitzen, die von den Zellen des T. spicatum nicht überschritten wird; erst dann gehen ihre wellenförmigen Biegungen in zickzackförmige über und treten an den einspringenden Kanten derselben Einfaltungen auf (Taf. III. 25).

So gering auch diese Resultate der Entwickelungsgeschichte erscheinen mögen, so lehren sie doch unzweideutig, dass die nämliche Art in verschiedenem Alter polyedrische und amphimorphe Zellen besitze und demnach, wenn der frühere Zustand stabil bleibe, mit ersteren, wenn dagegen die volle Entwickelung erreicht werde, mit letzteren versehen sei. Beispiele hierfür bieten T. crispum, das bereits unter den Arten mit polyedrischen und amphimorphen Zellen angeführt wurde; ein zweites täuschenderes Beispiel bietet T. diversifrons, welches an manchen Exemplaren nur polyedrische (Taf. I. 25), an andern amphimorphe divaricate (Taf. I. 27 *b*) Zellen besitzt, und zwar sind diese verschiedenen Zellformen in so entschiedener Weise an verschiedene Exemplare gebunden, dass ich lange Zeit glaubte, zwei Arten aufgefunden zu haben, die bei einer völligen Uebereinstimmung der morphologischen Ausbildung aller Organe nur in der Gestalt ihrer Zellen verschieden seien. Zur Bestätigung meiner Annahme, dass es sich hier nur um eine Art handele, kann ich aber hinzufügen, dass nicht nur nach der sorgfältigsten Vergleichung zahlreicher Exemplare eine Uebereinstimmung

Digitized by Google

derselben in allen Organen festgestellt werde, sondern dass auch bei den Exemplaren mit amphimorphen Zellen längs der Nerven bald in geringerer, bald in bedeutenderer Breite polyedrische Zellen vorkommen.

Wie die amphimorphen divaricaten Zellen auf der einen Seite in die wellenförmigen übergehen, so schwindet auf der andern Seite, indem mit einer Vermehrung der Falten an Zahl die Ausdehnung derselben, wie die der durch dieselben gesonderten Läppchen abnimmt und ein Ineinandergreifen derselben in geringerem Maasse stattfindet, eine scharfe Grenze von denjenigen amphimorphen Zellen, die polyedrisch gestaltet erscheinen.

Bei diesen stimmt die äussere Form völlig mit der einer polyedrischen Zelle überein und findet ein In- und Uebereinandergreifen der aneinander liegenden Wandungen nicht statt, der amphimorphe Charakter dieser Zellen wird vielmehr durch die nur in der Höhle der Zelle vorspringenden Falten hervorgebracht.

Die Falten dieser Zellen, wie die von diesen Falten getrennten unvollständigen Fächer sind vielfach von so geringer Ausdehnung, dass man dieselben leicht übersieht oder dieselben erst nach Entfernung der Verdickungsschichten erkennt (Taf. II. 22. 23*a*. 30. 36), oder auf dieselben erst bei der Zusammenziehung des Zellinhalts durch kleine warzenförmige Fortsätze, die von dem die Zellhöhle erfüllenden Inhaltsballen vorragen und sich aus den unvollständigen Fächern längs der Peripherie der freien Zellwandung zurückgezogen haben, aufmerksam wird, z. B. H. cruentum, asplenioides, brachyglossum, abruptum, T. trigonum, alatum, sinuosum etc.

§ 13.

Die freien Wandungen der Zellen des Blattparenchyms beschreiben bei der Mehrzahl der Hymenophyllaceae schwache Convexitäten (Taf. II. 41), erheben sich in selteneren Fällen, ähnlich den Epidermiszellen des Stammes an den Stellen, wo Haarwurzeln auftreten, zu einem conischen oder meistentheils cylindrischen am Ende gewölbten Fortsatz, der entweder nur eine geringe Höhe erreicht, z. B. T. venustum (Taf. II. 42. 43), oder an Höhe dem mittleren Theil der Zelle gleichkommt, z. B. T. auriculatum (Taf. II. 49), oder denselben selbst übertrifft, wie es bei H. Karstenianum (Taf. I. 33), speciosum, plumo-

Digitized by Google

sum,[1]) und noch mehr in der Epidermis von H. Malingii der Fall ist (Taf. I. 32), dem, wie schon oben bemerkt wurde, die parenchymatische Ausbreitung des Blattes fehlt.

Diese Auswüchse erinnern an die mancher Blumenblätter und noch mehr an die der Blattzellen mancher Laub- und Lebermoose; dieselben sind bei den letztgenannten Arten von Hymenophyllum eine normale Erscheinung, werden bei T. venustum hingegen normal nur bei einem kleinen Theil der Zellen angetroffen und schwanken noch mehr bei T. auriculatum. Von dieser Art liegen Exemplare mir vor, deren sämmtliche Zellen auf beiden Seiten diese Auswüchse getrieben haben, neben andern, bei welchen dieselben nur auf der einen Seite des Blattes entwickelt sind und solchen, bei welchen dieselben gänzlich fehlen, Thatsachen, die darauf hinweisen, dass die Entwickelung derselben von der Einwirkung eigenthümlicher, freilich nicht näher zu bezeichnender, Umstände bedingt werde.

Diese Auswüchse sind jedenfalls von den haarartigen Gebilden, die wir später kennen lernen werden, zu unterscheiden, da sie weder die ersten Anfänge, noch die Träger der letzteren darstellen, und werden vielleicht richtiger mit den Auswüchsen der Epidermis des Stammes, die Haarwurzeln tragen, verglichen.

§ 14.

Die Verdickungsschichten der Zellen einschichtiger Blätter der Hymenophyllaceae sind gewöhnlich, analog solchen Zellen höher organisirter Pflanzen, deren Wandungen theilweise mit andern Zellen in Berührung stehen, theilweise frei sind, auf den äusseren freien und den seitlichen an die benachbarten Zellen angrenzenden Wandungen in verschiedener Weise, sowohl in Bezug ihrer Stärke, wie ihrer Structur ausgebildet.

In Bezug ihrer Mächtigkeit treten die Verdickungsschichten auf der äusseren freien Wand gewöhnlich so sehr zurück gegenüber der auf den Seitenwandungen abgelagerten, dass vielfach die erstere gleichmässig dünn und ungeschichtet, die letztere aber von bedeutenderer Mächtigkeit und geschichtet erscheint.

---

1) Auch die Zellen, welche die von den Nerven sich erhebenden Lamellen bilden, wachsen bei der genannten Art ebenfalls in solche Fortsätze aus.

Digitized by Google

Bei genauerer Untersuchung mit Hülfe quellender Mittel gelingt es indessen, z. B. bei T. Arbuscula, die Schichtung der freien Aussenwand dieser Zellen zu erkennen und den Zusammenhang der Verdickungsschichten derselben mit den auf den Seitenwandungen in bedeutenderer Mächtigkeit abgelagerten Schichten zu constatiren.

In Bezug der Structur der Schichten wird alsdann, wie bei der Betrachtung der Gestalt der Zelle, eine gesonderte Untersuchung der seitlichen und freien Wandung zweckmässig sein.

Die Verdickungsschichten der erstern sind entweder in ihrer ganzen Ausdehnung von gleicher Stärke oder dieselben schwellen an gewissen Stellen an.

In dem ersten Fall haben dieselben gewöhnlich eine geringe Mächtigkeit und sind von Tüpfeln, die auf den aneinander liegenden Membranen correspondiren, und ohne bestimmte Ordnung bald zahlreicher und von geringerer Grösse, seltner in geringerer Zahl und bedeutenderer Weite auftreten, durchbrochen, z. B. in den polyedrischen Zellen von T. digitatum, membranaceum, venosum, glauco-fuscum, Ankersii, H. protrusum, ferner in den divaricaten Zellen von T. § Gonocormus (Taf. II. 12), den polyedrischen netzförmig gefalteten von H. Neesii (Taf. III. 20), bei welchen die Falten der primären Membran durch die Ueberkleidung von den Verdickungsschichten zu bedeutenderer Tiefe in die Zellhöhle vorspringen, die Tüpfel der Verdickungsschichten aber stets nur zwischen diesen Falten, niemals auf denselben auftreten, im Uebrigen von den tüpfelähnlichen Stellen, die von den Maschen der netzförmig vereinigten Falten umschlossen werden, durch geringere Grösse, wie bedeutendere Helligkeit sich unterscheiden lassen (Taf. III. 21 *b*).

Eine Reihe von Veränderungen, die theilweise auch bei andern Arten gefunden werden, theilweise den Hymenophyllaceis eigenthümlich zu sein scheinen, erfahren alsdann die Verdickungsschichten der Seitenwandungen durch Quellungen.

Als die geringfügigste der hierher gehörigen Erscheinungen ist zunächst das Anschwellen der Verdickungsschichten an den aneinander stossenden Kanten benachbarter Zellen anzuführen (Taf. III. 16. 21), eine Erscheinung, die in den Blättern zahlreicher Lebermoose, in dem Collenchym der Rinde dikotyledoner Pflanzen gewöhnlich angetroffen wird.

Digitized by Google

Bei den Hymenophyllaceis sind solche Anschwellungen eine häufige Erscheinung, erreichen jedoch stets nur einen geringen Grad, auch bleiben in denselben die Grenzlinien der aneinander stossenden Zellen stets kenntlich; H. caespitosum zeigt diese Anschwellungen am deutlichsten, bei H. holochilum, Neesii, multifidum, T. venosum, polyanthos, intermedium erreichen dieselben in den dem Blattrand genäherten Zellen eine bedeutendere Stärke, als in den innern den Gefässbündeln näher liegenden.

Auffallender als diese Quellungen sind andere, welche die seitlichen Wandungen der Verdickungsschichten entweder längs ihres Randes an der Grenze von der äusseren Wand oder in ihrer Mitte erfahren.

In dem ersten Fall bilden die Verdickungsschichten zwei ringförmige Anschwellungen, die den Rand der Zelle resp. ihre Seitenwandungen umsäumen, in dem zweiten Fall aber stellen dieselben ein breites Band dar, das die Mitte der Seitenwandung gürtelartig überzieht.

Erstere Zellen werden deshalb als umsäumte oder cellulae limbatae, letztere als umgürtete oder cellulae cingulatae bezeichnet.

In beiden Zellenarten treten gewöhnlich ihre charakteristischen Verdickungen so auffallend und scharf abgegrenzt hervor, dass man dieselben zunächst nicht nur allein wahrnimmt, sondern auch eine Fortsetzung der Verdickungsschichten von der seitlichen Wand auf die äussere gänzlich vermisst, indessen ist auch hier wieder durch die Einwirkung quellender Mittel nicht nur der continuirliche Zusammenhang der Verdickungsschichten, sondern auch die stärkere Anschwellung der letzteren in dem Saum oder dem Gürtel dieser Zellen zu erkennen.

In den umgürteten Zellen (Taf. II. 2. 8. 16. 17. 27. III. 47) erreicht der angeschwollene Theil der Verdickungsschichten gewöhnlich in der Mitte der seitlichen Wandungen seine bedeutendste Stärke, und ist entweder, wie in den Zellen in der Nähe der Gefässbündel, auf die Mitte der seitlichen Wandung beschränkt, und erreicht nicht den obern und untern Rand derselben, z. B. T. Borbonicum (Taf. I. 17), oder er dehnt sich über die ganze Höhe derselben aus. Derselbe ist entweder mit zahlreichen kleinen, auf den aneinander liegenden Wandungen correspondirenden Tüpfeln durchbrochen, z. B. T. pyxidiferum, Cunninghami, Borbonicum, diaphanum, nummularium, und gewöhnlich von geringerer Mächtigkeit und bietet dann vielfach den Uebergang, z. B. bei T.

Digitized by Google

pusillum, zu Zellen, deren Verdickungsschichten in gleichmässiger Stärke die Seitenwandungen in ihrer ganzen Ausdehnung überziehen, oder er ist nur von wenigen Tüpfeln durchbrochen und erreicht dann das Maximum seiner Ausbildung, z. B. bei T. crispum, Martiusii, lucens, Lambertianum, Smithii.

Partielle Ausbildung eines Cingulums kommt als häufige Erscheinung bei T. Millefolium vor, indem die aneinander liegenden Wandungen verschiedener in der Blattfläche ohne Ordnung zerstreuter Gruppen von 2 — 4 Zellen ihre Verdickungsschichten in so hohem Grad anquellen lassen, dass oft der grössere Theil ihres Lumens von denselben erfüllt wird (Taf. II. 3. 4). Anomaler Weise kommt die gleiche Erscheinung bei H. holochilum u. a. vor.

In dem vielschichtigen Gewebe höher organisirter Pflanzen ist eine dem Cingulum dieser Zellen analoge Verdickung nicht bekannt; in Organen solcher Gewächse, die nur aus einer einzigen Zelllage bestehen, fehlt es hingegen nicht an hierher gehörigen Beispielen. So sind z. B. die Zellen des Schleiers von Aspidium cucullatum Bl. mit einem Cingulum versehen, sind in dem Schleier von Diacalpe aspidioides die Kanten der aneinander liegenden Zellen mit partiellen Verdickungsschichten versehen, die von den Seitenwandungen ihren Ursprung nehmen und eine weit über ihre Basis sich ausdehnende Anschwellung bilden.

Der Uebergang von Zellen, deren Seitenwandungen mit dünnen gleichstarken, in ihrer ganzen Ausdehnung gleichmässig getüpfelten Verdikkungsschichten versehen sind, zu den umsäumten Zellen wird in Zellen angetroffen, bei welchen auf einem Streifen längs der freien Ränder der Seitenwandungen die Tüpfel der Verdickungsschichten fehlen, z. B. T. sublimbatum, cuspidatum; durch Quellung dieser tüpfellosen Streifen kommen alsdann die leistenartig vorspringenden Anschwellungen zu Stande, die Anlass gegeben haben, solche Zellen als cellulae limbatae zu bezeichnen (Taf. II. 18. 19. 29. 33. 34. 37). Diese ringförmigen Anschwellungen sind daher stets tüpfellos, während der zwischen denselben befindliche zartere Theil der Verdickungsschichten getüpfelt ist, haben gewöhnlich nur eine geringe oder eine mässige Höhe, z. B. T. trigonum, Filicula, Hookeri, reptans, Krausii, muscoides, Henzeianum, Petersii nebst Schaffnerianum, emarginatum, retusum, Schmidianum, alatum, sinuosum, H. asplenioides, cruentum, sibthorpioides, ricciaefolium, caudiculatum, und erstrecken sich nur in seltenen Fällen, wie

Digitized by Google

bei H. flabellatum (Taf. II. 21), bis gegen die Mitte der Seitenwandung und sind hier nur durch einen schmalen spaltenförmigen Zwischenraum von einander getrennt.

Der Limbus lässt sich ferner aus angeschnittenen Zellen ohne Schwierigkeit, wenn auch gewöhnlich nicht ohne Zerreissung entfernen (Taf. II. 22. 23. 31. 32), und erinnert dann vielfach an Ringfasern, von welchen er aber, wie bereits oben angeführt wurde, dadurch abweicht, dass er continuirlich mit den dünnen Verdickungsschichten auf der äusseren freien und der Mitte der seitlichen Wandung zusammenhängt. Er kann also nicht als eine ringfaserige Verdickung der Zelle angesehen werden, er stellt vielmehr eine partielle ringförmige Anschwellung der membranartigen Verdickungsschichten dar.

§ 15.

Die äussere freie Wand der Zellen ist 1) nur mit sehr dünnen tüpfellosen Verdickungsschichten versehen, die gegenüber denjenigen, welche auf den Seitenwandungen abgelagert sind, so sehr zurücktreten, dass sie erst nach der Einwirkung quellender Mittel erkannt werden können, so z. B. bei den Zellen von T. auriculatum, reptans, proliferum, crispum, cupressoides, Boivini, spicatum, Arbuscula, H. Neesii, unilaterale u. a.

2) es ist die äussere Wand der Zellen längs ihrer Peripherie mit einer Reihe von Tüpfeln versehen (Taf. II. 26, 29. 31. III. 9. 10). So gewöhnlich bei amphimorphen Zellen, indem die von den benachbarten Falten seitlich getrennten Feldchen der äusseren Wand mit einem Tüpfel versehen sind.[1]) Diese Tüpfel kommen an Ausdehnung der Area dieser Feldchen annähernd gleich, alterniren auf den aneinander liegenden Membranen benachbarter Zellen, grade wie die sie begrenzenden Falten; sie sind in vielen Fällen so fein (Taf. II. 26), dass man dieselben erst bei besonderer Aufmerksamkeit, zumal da, wo das Cingulum oder der Limbus an Stärke den Abstand dieser Tüpfel von dem Rand der Zellen übertrifft, z. B. H. microcarpum, divaricatum, cruentum, flabellatum, T. polyanthos, alatum, trigonum, Smithii, erkennt und treten in solchen

---

1) Das Nämliche gilt auch von den amphimorphen Zellen anderer Pflanzen, z. B. Lycopodium squarrosum, manchen Arten von Antrophyum, den Gräsern nach von Mohl's Untersuchungen an Elymus arenarius. (Verm. Schrift 262. T. 9. f. 1. 2.)

Digitized by Google

Fällen nach Entfernung der Verdickungsschichten deutlicher hervor (Taf II. 31); in andern Fällen wird man durch ihre Anwesenheit erst auf die Faltungen des Randes dieser Zellen aufmerksam, z. B. bei H. Tunbridgense. Diese Tüpfel nehmen alsdann, z. B. bei T. rigidum, mit Zunahme der Ausdehnung der Falten und der von denselben getrennten Felder an Weite zu, und lässt sich dann erkennen, dass sie auf der der Peripherie der Zelle zugekehrten Seite eine bedeutendere Tiefe, als auf der entgegengesetzten, dem Centrum der Zelle zugekehrten, besitzen und demgemäss die Verdickungsschichten an der Grenze der seitlichen und äusseren Wand der Zelle eine bedeutendere Stärke besitzen, und allmählig gegen die Mitte der äusseren Wand sich verdünnen.

Bei amphimorphen Zellen endlich, deren vorspringende Läppchen eine bedeutendere Grösse haben, z. B. T. Javanicum (Taf. III. 34), erreichen diese Tüpfel die grösste Ausdehnung, und erstrecken sich über die äussere Wand dieser Vorsprünge bis zu dem Anfang derselben zwischen den innern Enden der Falten.

3) die Verdickungsschichten der äusseren Wand sind netzförmig gefaltet.

Sämmtliche hierher gehörige Zellen gehören zu den amphimorphen divaricaten und sind auf der äusseren Wand mit einer Reihe peripherischer Tüpfel versehen, zeigen ferner in der Anordnung ihrer Falten eine Uebereinstimmung darin, dass die stärkeren derselben an die den amphimorphen Charakter dieser Zellen begründenden Falten unmittelbar sich anschliessen, als Verlängerungen oder Verzweigungen derselben auftreten (Taf. III. 28. 32. 33), also in der Richtung von der Peripherie gegen das Centrum der Zelle hinziehen, hier aber dann häufiger und unregelmässiger sich verzweigen und kleinere Maschen bilden (Taf. III. 38. 39. 40. 43); die Structur dieser Zellen wird dann noch dadurch complicirter, dass die grösseren randständigen Tüpfel durch feinere scheinbar faserige Verdickungen in kleinere Tüpfel abgetheilt werden, wodurch denselben das Ansehen von Gitterzellen verliehen wird (Taf. III. 41).

Dieses letzte Verhalten ist indess besonders lehrreich, weil hier nachweisbar die Höhe der scheinbaren Fasern und die Tiefe der zwischen denselben liegenden tüpfelähnlichen Stellen eine ungleiche ist, wie es bei netzfaserigen Zellen wohl niemals der Fall ist, und wenn auch nicht entschieden werden kann, ob die kleineren Tüpfel in der

Digitized by Google

Area der grösseren zwischen faserähnlichen Falten oder aufgequollenen Streifen der Verdickungsschichten sich finden, so steht doch jedenfalls fest, dass dieselben nicht bis zur primären Membran vordringen; es dürfte kaum zu weit gegangen sein, aus ihrem Auftreten auf den grösseren Tüpfeln den Schluss abzuleiten, dass auch diese nur in dünneren Stellen der Verdickungsschichten nicht in lochartigen Durchbrechungen derselben begründet seien.

Von nicht geringerem Interesse sind ferner Uebergänge zwischen den amphimorphen divaricaten Zellen mit glatter und netzfaltiger äusserer Wand, wie sie bei verschiedenen Formen (Taf. III. 26. 27. 46) von T. rigidum (T. Mandioccanum), T. obscurum (T. papillatum) vorkommen.[1]) Diese stimmen darin überein, dass an einem Theil ihrer Zellen einige faserähnliche Falten über die äussere Wand sich erstrecken und die Falten längs der Peripherie der äusseren Wand in Verbindung setzen (Taf. III. 33). Es wäre ein wunderbares Zusammentreffen, wenn in solchen Zellen Falten und Fasern sich continuirlich aneinander schlössen.

Die Verdickungsschichten der Seitenwandungen verhalten sich in allen diesen Fällen unabhängig von der äussern Wandung, und sind entweder mit dünnen gleichmässigen getüpfelten, oder mit stärkeren nach Art eines Cingulums angeschwollenen, aber ebenfalls getüpfelten Verdickungsschichten versehen (Taf. III. 47).

4) An diese Zellen mit netzfaltiger äusserer Wand reihen sich alsdann ausserordentlich innig Zellen an, deren äussere Wand mit zahlreichen feinen tüpfelähnlichen Stellen versehen ist; diese stimmen mit den netzfaltigen stets insofern überein, als eine Reihe randständiger Tüpfel ihren amphimorphen Charakter bekundet (Taf. III. 48. 49. 50) und weichen nur dadurch ab, dass die Grösse dieser randständigen Tüpfel eine geringere und dass innerhalb derselben auf der Fläche der äussern Membran eine grosse Zahl kleiner Tüpfel ausgebildet ist, Verschiedenheiten, in welchen indess nur gradweise Unterschiede von den Zellen mit netzfaltiger äusserer Membran erblickt werden können.

T. rigidum (T. Mandioccanum) zeigt zuweilen den Uebergang zu die-

---

1) Wie wir oben gesehen haben, dass die nämliche Art mit polyedrischen und amphimorphen Zellen auftreten könne, so lehren diese Uebergänge zwischen Zellen mit glatter und netzfaltiger äusserer Wand, dass auch das Verhalten der letztern allein zur Unterscheidung der Arten nicht ausreiche.

Digitized by Google

sen Zellen, T. pumilum, Milnei, caudatum geben weitere Beispiele; bei andern, z. B. T. formosum, sind diese Tüpfel auf der Fläche der äusseren Wand so fein, dass sie erst bei besonderer Aufmerksamkeit erkannt werden können.

§ 16.

Wie durch die ungleiche Vertheilung der Deckzellen auf beiden Seiten der Blätter bei manchen Arten von Trichomanes, so sind auch mehrfach in den Zellen des Blattparenchyms Verhältnisse ausgesprochen, die eine Verschiedenheit der oberen und unteren Blattfläche beurkunden, und zwar sind diese Verschiedenheiten in den Verdickungsschichten der seitlichen Wandungen ausgeprägt, insofern diese auf den mit der oberen und unteren Seite des Blattes in Berührung stehenden Rändern in ungleicher Mächtigkeit abgelagert sind.

Die bisher beobachteten Beispiele gehören Arten mit umgürteten und umsäumten Zellen an.

Unter den letzteren ist bei H. asplenioides der Saum des oberen Randes von bedeutenderer Höhe und springt zugleich tiefer in die Zellhöhle vor, als der des unteren; das Gleiche ist bei T. cavifolium, emarginatum, und in geringerem Grad bei T. olivaceum der Fall. Bei T. melanotrichum verhalten sich hingegen die Zellen des Parenchyms in dieser Beziehung ungleich, indem nur in den den Gefässbündeln benachbarten Zellen der obere Saum überwiegend ausgebildet ist, während in den den Nerven ferner liegenden oder denjenigen, welche die Mitte zwischen den Gefässbündeln und dem Rand der Zipfel einnehmen, der Limbus der unteren Seite eine bedeutendere Stärke hat (Taf. II. 19).

Unter Arten mit umgürteten Zellen bieten Trichomanes § Gonocormus, z. B. T. concinnum, saxifragoides, die geeignetesten Beispiele; bei dem ersteren übertrifft in allen Zellen, mit Ausnahme der randständigen, die untere Hälfte des Gürtels die obere, oder es nimmt die Stärke des Gürtels von seinem oberen Rand allmählig gegen seinen unteren zu, während bei T. saxifragoides der untere Rand des Cingulums fast plötzlich, limbusartig anschwillt (Taf. III. 13).

Die verschiedene Stärke dieser Verdickungen auf den Seitenwandungen der Zellen hat bei allen diesen Arten bei dem Eintrocknen der Blätter eine Faltung der Blattzipfel zur Folge und nehmen überall die

Digitized by Google

Seiten, welche an die schwächeren Verdickungen angrenzen, die concave, die an die stärkeren angrenzenden die convexe Seite derselben ein.

§ 17.

Ueberschaut man das Blattparenchym in seiner ganzen Ausdehnung, so fallen im Allgemeinen zwischen den Zellen, die an die Nerven angrenzen und die innere Hälfte der Blattzipfel einnehmen, und denjenigen, die die äussere Hälfte derselben bilden oder dem Rand genähert sind oder diesen selbst einnehmen, Verschiedenheiten auf, die, wenn sie auch meistentheils durch allmählige Uebergänge vermittelt werden, doch leicht erfasst werden, wenn man die Extreme beider ins Auge fasst, und zwar gilt im Allgemeinen, dass — abgesehen von den Zellen des Randes, die eine besondere Erörterung finden — die Stärke der Verdickungsschichten von den inneren Zellen zu den äusseren allmählig zunimmt, oder dass zwei oder drei Zellreihen längs des Randes auffallend stärkere Wandungen haben, als die inneren Zellreihen, zwischen welchen eine Verschiedenheit nicht constatirt werden kann, z. B. bei T. venosum, exsectum, Boivini, proliferum, H. Neesii (Taf. III. 16. 17) u. a. So nimmt bei T. crispum (Taf. II. 16), Borbonicum (Taf. II. 28) u. a. das Cingulum der inneren Zellen einen schmalen Streifen von geringer Höhe in der Mitte der Seitenwandungen ein und gewinnt in den äusseren nicht nur an Stärke, sondern dehnt sich auch über die ganze seitliche Wand der Zellen aus.

Analog diesen Beispielen ist bei Arten mit unsäumten Zellen, z. B. T. emarginatum, Schmidianum, trigonum, der Saum der dem Rand genäherten Zellen von bedeutenderer Stärke als der der inneren, ja erreicht bei H. dichotomum in der Nähe des Randes fast eine Stärke, wie bei H. flabellatum; wiederum bei andern Arten, z. B. T. Boivini, sind die peripherischen Tüpfel der freien Zellwandungen nur auf den äusseren Zellen ausgebildet, oder sind hier doch deutlicher als auf den inneren.

§ 18.

Die Zellen des Blattrandes sind entweder, abgesehen von ihrer Lage, nicht von den Zellen der Blattfläche verschieden, oder sie weichen von denselben 1) durch Faltungen oder die Ausbildung ihrer Ver-

Digitized by Google

dickungsschichten, 2) durch ihre Gestalt und Grösse, und 3) durch eine eigenthümliche Theilung ab.

In Betreff des ersten Punktes ist zu bemerken, dass die dem Rand zugekehrte freie Wandung dieser Zellen zart ist, während die an die benachbarten Zellen angrenzenden Wände derselben umgürtet oder umsäumt sind, z. B. T. crispum, Filicula, oder dass umgekehrt, während letztere zart sind, nur die erstere mit den bereits Eingangs unserer Betrachtung über die Gestalt der Parenchymzellen versehenen Einfaltungen versehen ist, oder dass hier diese Duplicaturen stärker und deutlicher ausgebildet sind, als auf den aneinander liegenden Seitenwandungen, vielfach auch durch ihre Ausdehnung von den Falten der inneren Zellen des Blattes sich unterscheiden, z. B. H. caudiculatum, undulatum, polyanthos, myriocarpum, convolutum, reniforme, brachyglossum; ferner ist es Regel, dass die Randzellen an den Einschnitten zweier Zipfel stärker, als an den Enden derselben, diese Falten ausbilden

Bei anderen Arten sind die Randzellen ringsum stärker verdickt und zugleich mit weiteren, zwischen den netzförmig verbundenen Falten ihrer Verdickungsschichten auftretenden Scheintüpfeln versehen, als die inneren Zellen, z. B. H. fuciforme, T. Philippianum, caudatum (Taf. III. 5). Nicht selten sind auch, z. B. bei T. rigidum, die randständigen oder gleichzeitig die nächst inneren Zellen netzfaltig punktirt, während die übrigen nur die peripherische Tüpfelreihe zwischen ihren randständigen Falten ausbilden.

In der Gestalt und Grösse der randständigen Zellen sind nur selten auffallendere Verschiedenheiten ausgesprochen, so z. B. bei T. Philippianum, manche Formen von T. rarum, bei welchen dieselben eine bedeutendere Weite haben, so bei T. Viellardii, Endlicherianum, wo dieselben, wie ich bereits oben angeführt habe, sich bedeutend verlängern, so bei T. Smithii u. a., wie ihre Ausdehnung hinter der der inneren Zellen zurücksteht.

Eine weit verbreitete Erscheinung ist endlich die Theilung der Zellen des Randes vermittelst einer in der Richtung der Blattfläche auftretenden Scheidewand in zwei übereinander liegende Zellen, wobei wiederum zu bemerken, dass an den Einschnitten der Blattzipfel diese Verdoppelung constanter als an dem Ende derselben eintritt. Diese Verdoppelung der Randzellen kommt vor bei zahlreichen Arten von

Digitized by Google

Trichomanes, z. B. T. venustum, davallioides, speciosum, auriculatum, diaphanum, bei H. fuciforme (Taf. II. 17. 44).

In seltneren Fällen sind marginale und intramarginale Zellen (Taf. II. 41), oder einzig und allein die letzteren (Taf. II. 27) verdoppelt, ersteres bei T. venustum und gewissen Formen von H. demissum, letzteres bei T. concinnum, Borbonicum, bei welchen zugleich diese verdoppelten Zellen Wandungen von bedeutender Stärke besitzen. Unter den genannten Beispielen ist ferner T. venustum dadurch ausgezeichnet, dass der Rand des Flügels der secundären Blattspindel in bedeutenderem Maass anschwillt und aus 4—8 Zellen zusammengesetzt wird, die in zwei oder in drei Schichten über einander liegen.

Das Extrem dieser Vermehrung der Randzellen bietet endlich T. reniforme, bei dem ein Bündel gestreckter mässig verdickter, von der unveränderten Epidermis bedeckter Zellen, die die Mitte zwischen dem Parenchym und dem Sklerenchym halten, die Anschwellung des Randes herbeiführt.[1])

§ 19.

Die zwei ersten Beispiele von Hymenophyllaceis mit mehrschichtigen Blättern machte C. Müller in T. membranaceum[2]) und H. dilatatum[3]) namhaft; zwei andere,[4]) T. reniforme und T. elegans Rich. (T. Prieurii Kz.), wurden zur Widerlegung der Ansicht van den Bosch's, der noch in der Einleitung in die Kenntniss der Hymenophyllaceae[5]) allen Angehörigen dieser Abtheilung einschichtige Blätter zuschrieb, von mir angeführt. In der Folge hat van den Bosch die mehrschichtigen Arten als Diplöophyllaceae[6]) zu einer der beiden Hauptabtheilungen seiner Bryopterides erhoben, und denselben ausser den genannten Arten H. scabrum und die Gruppe von T. album zugetheilt, letztere indess mit

---

1) Van den Bosch Bijd. l. c. 313 unterschied diese Anschwellung des Randes von T. reniforme als venula secundaria von den wahren Nerven sowohl, wie von den Scheinnerven; doch scheint seiner Auffassung die Annahme, dass ein Gefässbündel in diesem Rand enthalten sei, zu Grunde zu liegen, was entschieden nicht der Fall ist.

2) Bot. Zeit. 3. 577.

3) Bot. Zeit. 12. 734.

4) Diese Abhandlung. 7. 616.

5) l. c. p. 9.

6) Bijd. p. 322.

Digitized by Google

Unrecht, da bei ihr nicht das Parenchym, sondern das die Gefässbündel begleitende Sklerenchym vermehrt ist (§ 8).

Im Begriff, zur näheren Betrachtung dieser und einiger weiteren Beispiele mit mehrschichtigem Parenchym überzugehen, ist zunächst hervorzuheben, dass bei zahlreichen Hymenophyllaceis, deren Parenchym in der grösseren Ausdehnung des Blattes nur aus einer Zellschichte besteht, die an die Gefässbündel angrenzenden Zellreihen, meist 1, oder 2, selten 3, wie häufig bei H. cruentum, T. Javanicum verdoppelt sind,[1]) und dass die zwischen zweien Nerven an der Trennungsstelle derselben liegenden und ebenso die die Nervenenden überragenden Parenchymzellen verdoppelt seien, ferner, dass nicht zu selten die marginalen, zuweilen gleichzeitig mit den intramarginalen Zellen verdoppelt seien und dass endlich von den Einschnitten zweier Zipfel, an welchen diese Verdoppelung der Randzelle am constantesten eintritt, ein aus zwei Zelllagen bestehender Streifen von nicht unbedeutender Stärke nach innen sich fortbilde, z. B. T. Filicula, H. holochilum, demissum u. a.

Alsdann wird es nicht unpassend sein, diese Betrachtung mit einem Beispiel zu eröffnen, das mit gleichem Recht den einschichtigen, wie den mehrschichtigen Arten zugezählt werden kann. Ein solches bietet H. demissum.

Bei dieser Art ist zwar nur in seltenen Fällen das Parenchym des Blattes in grösserer Ausdehnung und in seiner ganzen Breite aus zwei Zelllagen zusammengesetzt, in der Mehrzahl der Exemplare schwankt die Zahl der verdoppelten Zellreihen längs des Randes zwischen 1—3, längs der Nerven zwischen 2—5, und ist der in der Mitte zwischen beiden liegende aus einer Schichte bestehende Streifen bald auf eine einzige Zellreihe beschränkt, bald über 2—7 Zellreihen ausgedehnt.

Während bei H. demissum die Verdoppelung der Zellen von den Nerven und dem Rand aus gegen die Mitte der Zipfel fortschreitet, beginnt dieselbe bei andern Arten nur von den Zellen längs der Nerven und schreitet von diesen aus gegen den Rand fort, der bald in geringerer, bald in bedeutenderer Breite aus einer einzigen Zelllage besteht. So z. B. wird bei T. cuspidatum das Parenchym zwischen den Nerven am Grund des

1) In seltnern Fällen, z. B. T. Boryanum, ist zuweilen die zweite Zellreihe vom Nerven verdoppelt, die unmittelbar an denselben angrenzende ungetheilt.

Digitized by Google

Blattes von zwei Zelllagen, hingegen in der grösseren Ausdehnung seiner Fläche nur von einer einzigen Zelllage gebildet; so wird bei T. membranaceum das Parenchym zwischen den dichten Nerven in der grösseren Ausdehnung der Blattfläche von 2 oder 3 Zelllagen zusammengesetzt (Taf. I. 10), während der Blattrand in einer Breite von 3—8 Zellen aus einer einzigen Schichte besteht (Taf. I. 11), und ist da, wo 3 Zelllagen über einander liegen, die mittlere stets von bedeutenderer Weite als die oberflächlichen. Ein weiteres Beispiel liefert T. longicollum; bei diesem ist das Parenchym in seiner ganzen Ausdehnung, mit Ausnahme der Randzellen, aus 2, selten zwischen den Nerven am Grund der Abschnitte aus 3 Zelllagen gebildet, während bei dem nah verwandten T. elongatum nur selten das Parenchym zwischen dem äussersten Nerven und dem Rand der Zipfel seine Zellen verdoppelt hat.

Während bei T. longicollum die über einander liegenden Zellen an Grösse übereinstimmen, sind an den sterilen Blättern von T. diversifrons (Taf. I. 24. 27*a*) von den beiden Zelllagen, die längs der Nerven sich ausbilden, die Zellen der oberen kleiner, die der unteren grösser; indess ist auch hier die Ausdehnung des doppelt geschichteten Parenchyms vielfachen Schwankungen unterworfen, in so fern bald sämmtliche Zellen zwischen zweien Nerven sich getheilt haben, bald eine oder mehrere Zellreihen in der Mitte zwischen denselben ungetheilt geblieben sind, bald das Parenchym in der ganzen Ausdehnung der Blattfläche aus einer einzigen Zelllage besteht, oder doch nur zu beiden Seiten der Nerven 1 bis 4 Zellreihen verdoppelt sind. Letzteres ist noch bei T. Mougeotii und spicatum der Fall, die ich wegen der verschiedenen Grösse ihrer Zellen auf beiden Seiten des Blattes hier anführe, bei denen indess, so weit meine Untersuchungen reichen, die Verdoppelung der Zellen niemals eine grössere Ausdehnung gewinnt. Gegenüber diesen Schwankungen der sterilen Blätter bestehen die fruchttragenden Blätter von T. diversifrons constant aus vier Zelllagen, von welchen die beiden inneren von weiteren, die beiden oberflächlichen von kleineren Zellen zusammengesetzt werden.

Nicht minder mannigfaltig in Bezug der Ausdehnung eines geschichteten Parenchyms verhält sich T. elegans, bei dem sterile und fertile Blätter conform sind. Von einer Zelllage nämlich an, die in der Breite von 4—9 Zellreihen zu beiden Seiten der Nerven an den Zipfeln jugendlicher Exemplare ausgebildet ist, findet man in andern Blättern,

Digitized by Google

bei welchen die Verdoppelung der Parenchymzellen von den Nerven aus fortgeschritten ist gegen den Rand, der selbst in geringerer oder bedeutenderer Breite aus einer einzigen Zellschichte besteht (Taf. IV. 1), Uebergänge zu der normalen Ausbildung, bei der die Zipfel des Blattes in ihrer ganzen Breite von 1 oder 2 inneren Lagen weiterer Zellen (Taf. IV. 2. 3. 4) und 2 Lagen oberflächlicher, kleinerer Zellen zusammengesetzt wird, von welchen letzteren wiederum die der Blattoberseite an Grösse hinter den der Blattunterseite zurückstehen. Die bereits oben erwähnten Scheinnerven werden in allen Ausbildungsstufen der in Rede stehenden Art angetroffen.

Constant und in der ganzen Ausdehnung des Blattes besteht endlich das Parenchym von T. reniforme, H. dilatatum, scabrum aus 3 oder 4 Zelllagen, nämlich aus 1 oder 2 innern von weiteren Zellen zusammengesetzten, und 2 oberflächlichen, deren Zellen stets enger sind und von welchen die der obern Seite wie bei T. elegans, T. diversifrons, spicatum, Mougeotii hinter den der unteren an Grösse zurückstehen.

In diesen Beispielen erreicht das Blatt die höchste Stärke, welche bei Arten von Hymenophyllum und Trichomanes angetroffen wird; dieselbe kehrt in völlig übereinstimmender Weise bei den Blättern von Todea (Leptopteris) hymenophylloides, Fraseri wieder, die in dieser Beziehung die niederste Stufe unter allen anderen Abtheilungen der Farne einnehmen und welchen grade wie den Arten von Hymenophyllum und Trichomanes Spaltöffnungen[1]) und Intercellulargänge[2]) abgehen.

Diese finden sich vielmehr nur bei Loxsoma, das in der Structur seiner Blätter sich in voller Uebereinstimmung mit den der Mehrzahl

1) Nach Presl (Suppl. 70) sollen zwar bei Todea § Leptopteris Spaltöffnungen angetroffen werden, doch muss ich nach Untersuchungen lebender Exemplare von Todea hymenophylloides, und getrockneter von T. Fraseri, Wilkesii das Vorkommen derselben in Abrede stellen. Die letzte, die nach dem Bericht von Brackenridge (expl. 309) einen Stamm von 18—20 Zoll Höhe und einem Durchmesser von 1½ Zollen ausbildet und deren Blätter incl. ihres Stiels eine Länge von 3 Fussen erreichen, bietet wohl das colossalste Beispiel einer spaltöffnungslosen Landpflanze.

2) Die Intercellulargänge werden bei den Hymenophylleen nicht nur zwischen den Zellen des mehrschichtigen Blattparenchyms, sondern auch in dem Blattstiel und an dem Stamme, so weit meine bisherigen, freilich in Bezug dieses Punktes nicht sehr ausgedehnten Untersuchungen reichen, vermisst. Es stimmen in dieser Beziehung die Hymenophyllaceae mit den Laubmoosen überein. (Vergl. Unger Sitzb. d. K. K. Akademie Band 43. II. 505.)

Digitized by Google

der Farne und höher organisirten Pflanzen befindet, und dieser gemäss auf der Epidermis seiner Unterseite mit Spaltöffnungen versehen ist, die mit Intercellulargängen in Verbindung stehen, welche das aus 5—8 Zelllagen bestehende Blattparenchym durchziehen.

Im Uebrigen noch die Bemerkung, dass die innern Zellen mehrschichtiger Blätter von Hymenophyllum und Trichomanes auf allen Wandungen gleichmässig getüpfelt sind, und die oberflächlichen Zellen sowohl auf ihren inneren und seitlichen Wandungen die gleiche Beschaffenheit besitzen, hingegen auf den äusseren freien Wandungen und an der Grenze dieser von den Seitenwandungen die nämlichen Verhältnisse bieten, die bei den einschichtigen Arten erörtert wurden.

Polyedrisch gestaltet sind die oberflächlichen Zellen und zugleich mit einer tüpfellosen freien Wand versehen bei T. membranaceum, amphimorph, scheinbar polyedrisch mit einer Reihe peripherischer Tüpfel versehen, bei H. scabrum, amphimorph divaricat mit einer Reihe solcher Tüpfel auf der äussern Wand bei T. elegans, netzfaltig bei T. longicollum und mit zahllosen feinen Tüpfeln auf der äussern Wand bei T. reniforme und H. dilatatum; T. diversifrons endlich besitzt, wie bereits bemerkt wurde, an manchen Exemplaren polyedrische (Taf. I. 25), an andern amphimorph divaricate Zellen (Taf. I. 27 *b*).

§ 20.

Zu wiederholten Malen wurde bereits auf die chemische Zusammensetzung einzelner Theile der Hymenophyllaceae aufmerksam gemacht, und dürfte, ohne auf eine erschöpfende Betrachtung dieser Verhältnisse eingehen zu können, in dieser Beziehung zu erwähnen sein, dass das Gewebe der Hymenophyllaceae mit Ausnahme der dasselbe überkleidenden Cuticula aus Cellulose bestehe, deren Reaktion auf Iodtinktur und Schwefelsäure entweder unmittelbar, oder nach Entfärbung der betreffenden Pflanzentheile in Salpetersäure hervortritt.

Bei dieser Reaktion und selbst dann, wenn alle Gewebstheile aufgelöst werden, bleibt die Cuticula farblos oder wird schwach gelblich gefärbt und persistirt durchaus unverändert; dieselbe ist entweder gleichmässig glatt oder sehr fein granulirt und niemals mit Zeichnungen versehen, die etwa auf die Beschaffenheit der unter ihr liegenden Zellwandungen schliessen liessen; nur in wenigen Fällen werden kleine glänzende Körperchen auf ihrer inneren Seite wahrgenommen, von

Digitized by Google

denen unentschieden geblieben ist, ob sie der Cuticula oder der unter ihr lagernden Zellmembran angehören.

In dem polarisirten Lichte verhalten sich die Zellen der Hymenophyllaceae nach einigen wenigen Untersuchungen an H. Tunbridgense und T. elongatum optisch negativ im Sinne von Mohls[1]) und konnte eine Verschiedenheit in dem Verhalten der Cuticula von den Zellmembranen nicht constatirt werden.

Nach Ermittelung der Thatsache, dass die polsterförmigen Verdickungen der Deckzellen, der Randzellen von T. Vieillardii, Endlicherianum, die intramarginalen von T. humile und die randständigen Falten der Zellen von T. Javanicum und Boryanum Ablagerungen von Kieselsäure enthalten, lag es nahe, auch das übrige Gewebe in dieser Beziehung zu prüfen. Bei den zunächst untersuchten Arten, als T. Filicula, Javanicum, diversifrons, lucens, Millefolium konnte ein Kieselskelett der Zellen nicht hergestellt werden, hingegen gelang es, ein solches bei T. pinnatum, davallioides, speciosum, pallidum, Smithii, trichoideum darzustellen; in T. humile wurde zugleich ein Beispiel gefunden, das in manchen Exemplaren sich wie die ersteren, in anderen wie die letzteren verhielt, und waren in dem letzteren Fall nicht nur alle Membranen von Kieselsäure durchdrungen, sondern es fanden sich auch in einzelnen Zellen nach innen vorspringende Verdickungen der Membranen, die verkieselt waren.

§ 21.

Während auf der einen Seite in allen Eigenthümlichkeiten, welche die Untersuchung der Gestalt und Structur der Parenchymzellen einschichtiger Hymenophyllaceae ermittelte, insbesondere in den Biegungen und Faltungen ihrer Seitenwandungen, dem Ineinandergreifen derselben an der Grenze dieser und der freien Aussenwandungen, der Ausbildung einer Reihe peripherischer Tüpfel auf der äusseren Wand Verhältnisse sich beurkunden, die der freien Lage dieser Zellen entsprechen und bei höher organisirten Pflanzen einzig und allein in den Zellen der Epidermis angetroffen werden, entfernen sich die Parenchymzellen der Hymenophyllaceae auf der andern Seite weit von diesen durch ihren an Chorophyll reichen Inhalt, ja sie stimmen in diesem mit den Zellen des Parenchyms,

1) Bot. Zeitung 16. 11.

Digitized by Google

welches bei höheren Pflanzen unter der Oberhaut liegt, überein. Diesem Verhalten entsprechend sind in der einzigen Zellage der Hymenophyllaceae die Eigenschaften der Oberhaut und des Parenchyms höherer Pflanzen vereinigt. Vermöge des Reichthums an Chlorophyll kommen den Zellen der ersteren die Funktionen des subepidermoidalen Parenchyms der letzteren zu und mehrfache weitverbreitete Structurverhältnisse, wie z. B. die stärkere Verdickung der Seitenwandungen der Zellen der Hymenophyllaceae entsprechen sonder Zweifel einem doppelten Zweck, indem durch denselben eine gewisse Festigkeit der Zelle verliehen wird, ohne eine Beeinträchtigung ihrer Funktionen herbeizuführen, welche eintreten müsste, wenn, wie bei höher organisirten Pflanzen, die oberflächlichen Wände der Epidermiszellen verdickt wären.[1])

Von den Chlorophyllkörnern der Hymenophyllaceae mag dann erwähnt werden, dass dieselben gewöhnlich einen Kern von Amylum einschliessen und dass sie bald vereinzelt oder zu Fäden von verschiedener Ausdehnung an einander gereiht, an der inneren Fläche des Primordialschlauchs haften, z. B T. reptans, H. ciliatum, bald reichlicher auftreten, wie z. B. bei T. crispum, bald, wie bei T. speciosum dicht gedrängt stehen und sich gegenseitig abflachen, oder den Seitenwandungen und der Peripherie der äussern Wand der Zelle so dicht anliegen, dass die Eigenthümlichkeiten in der Structur der letzteren erst nach Entfärbung oder Zerstörung des Inhalts kenntlich werden. Im Uebrigen wird der Zellkern in den jugendlichen Zellen der Hymenophyllaceae niemals vermisst und persistirt der Primordialschlauch, wie es in lebenskräftigen Zellen überhaupt der Fall ist, und ist das Protoplasma vielfach netzförmig vertheilt und liegt der inneren Zellwand so fest an, dass diese das Ansehen besitzt, als werde sie von einer Lage kleinerer Zellen zusammengesetzt.[2])

---

1) Die die Nerven bedeckenden Epidermiszellen bieten bei den Hymenophyllaceis in dem Verhalten ihrer freien Wand keine Verschiedenheit von den Zellen der parenchymatischen Ausbreitung der Blattzipfel.

2) Es dürfte nicht unpassend sein, hier gleichzeitig zu erwähnen, dass die Mehrzahl der Hymenophyllaceae verschiedenen Arten von Coleochaete zum Wohnsitz dienen, in so fern dieselben zu Täuschungen Anlass geben könnten, da das von ihnen bedeckte Gewebe bei flüchtiger Betrachtung eine kleinzellige Structur besitzt. Als Beispiele, bei welchen diese Epiphyten beobachtet wurden, mögen angeführt werden H. gracile, ricciaefolium, caudiculatum, fimbriatum, reniforme, macroglossum, interrup-

Digitized by Google

Es mag endlich nicht unerwähnt bleiben, dass bei dem Aufweichen der Hymenophyllaceae häufig Farbenveränderungen derselben eintreten, die eine genauere Untersuchung verdienen. Schon Taschner[1]) hat derselben gedacht.

§ 22.

Zum Schluss der Betrachtung der vegetativen Organe der Hymenophyllaceae ist der lamellenartigen Wucherungen und der haarartigen Auswüchse der Blattfläche zu gedenken.

Erstere stellen Wiederholungen der parenchymatischen Ausbreitung der Blattfläche dar, entspringen nur, oder doch gewöhnlich von den Gefässbündeln derselben, bestehen stets aus einer einzigen Lage von Zellen, die mit denen der Blattfläche sowohl in ihrer Configuration und ihrer Structur, als auch ihrem Inhalt übereinstimmen.

Diese Lamellen treten entweder auf beiden Seiten der Nerven auf, z. B. H. sericeum, Fusugasugense, pyramidatum, oder sie sind auf die Oberseite des Blattes, wie bei H. tomentosum, oder auf die Unterseite desselben wie bei H. lobato-alatum, fuscum und Trichomanes Martiusii, der einzigen Art von Trichomanes, bei welcher Lamellen angetroffen werden, beschränkt.

Dieselben schwanken an Zahl, sobald mehr als zwei auf einem Nerven zur Ausbildung kommen, z. B. H. Fusugasugense, nehmen an Höhe stets von dem Grund gegen das Ende der Mittelrippe oder der Seitennerven ab, schwanken aber ebenfalls in dieser Beziehung so sehr, dass man bei Arten, deren Lamellen gewöhnlich augenfällig hervortreten, Exemplaren begegnet, an welchen nur sehr schwache Rudimente derselben ausgebildet sind, z. B. H. fuscum, sericeum. Zudem treten diese Lamellen vielfach erst an älteren Blattabschnitten hervor

tum, demissum, Blumeanum, protrusum, pycnocarpum, Neesii, T. pumilum, flavofuscum, Schmidianum, rigidum, Mandioccanum, humile, melanotrichum, elegans, pinnatum, dimorphum, trigonum, Millefolium, pyxidiferum, maximum, longicollum, Ankersii, Beispiele, die Arten aus den verschiedensten Welttheilen angehören, und unter welchen die auf T. Ankersii beobachteten mit Früchten versehen waren, während die Borsten, welche zur Benennung der Gattung Anlass gegeben haben, aber bekanntlich nicht den Charakter derselben bilden, allgemein fehlten. — Freunden dieser Epiphyten noch die Bemerkung, dass dieselben auch auf den Arten von Antrophyum, Schizaea, Angiopteris, Ophioglossum als eine ganz gewöhnliche Erscheinung angetroffen werden.

1) l. c. 14.

Digitized by Google

oder erlangen doch erst ihre volle Ausbildung in einer späteren Periode, während an jüngeren Abschnitten, die indess bereits aufgerollt sind, kaum eine Spur von denselben wahrzunehmen ist, z. B. H. sericeum.

Diese Lamellen erstrecken sich entweder continuirlich über die ganze Ausdehnung der Nerven, oder sie sind unterbrochen wie bei H. lobato-alatum, T. Martiusii, und gehen alsdann in die in grösseren Entfernungen von einander auftretenden, dem Lauf der Nerven in zweizeiliger Anordnung folgenden Gebilde über, die sich bereits haarartigen Auswüchsen nähern, von denen sie indess stets durch ihre in der Richtung der Nerven befestigte lamellenförmige Basis sich unterscheiden, während ihr allmählig sich verschmälerndes Ende vielfach in eine Borstenzelle, wie bei diesen, ausläuft. Solche Gebilde kommen bei H. cristatum, Jamesoni, latipes vor, kehren dann bei H. Fusugasugense, plumosum, pyramidatum und einigen andern, wo die Nerven continuirliche Lamellen tragen, auf dem Parenchym der Blattfläche, als Träger eines Theils der Sternhaare wieder.[1])

In diesen Gebilden ist die letzte Andeutung der Lamellen enthalten, die von den Moosen und Lebermoosen an aufwärts sich bis zu den Hymenophyllaceen erstrecken, bei andern Abtheilungen der Farne nur eine sehr geringe Ausbildung erreichen[2]) oder, wie bei höher organisirten Pflanzen, als eine normale Erscheinung nicht mehr auftreten.

---

1) Solche partielle lamellenartige, auf dem Parenchym der Blattfläche sich erhebende Wucherungen habe ich gegenüber den auf den Nerven entspringenden Lamellen, als Kämme, cristae, bezeichnet.

2) Wenn ich bei andern Farnen von Andeutungen analoger Gebilde rede, so habe ich nicht die auf der untern Seite des Blattes auftretenden mit den Fruchthaufen in Beziehung stehenden Wucherungen und demgemäss weder den Schleier, noch die denselben umgrenzenden Erhebungen des Blattparenchyms, die in sehr verschiedenen Abstufungen auftreten und zuweilen, z. B. bei Asplenium scolopendroides, elegans zu den verkehrtesten Deutungen Anlass gegeben haben, im Auge, sondern ich möchte vielmehr auf Wucherungen aufmerksam machen, die auf der Oberseite des Blattes entweder von dem die Hauptnerven bedeckenden Gewebe, oder in geringer Entfernung zu beiden Seiten derselben auf dem Blattparenchym sich erheben.

In dem geringsten Grad dieser Wucherungen erscheint die Spindel des Blattes oder die Mittelrippe eines Abschnitts auf der obern Seite von einer Längsfurche durchzogen, bei einer etwas stärkern Ausbildung berandet, und ist alsdann dieser Rand an dem Ursprung eines Nerven unterbrochen und häufig gleichzeitig in einen kleinen spitzen Fortsatz ausgezogen. In gleicher Ausdehnung treten die auf dem Parenchym in der Nähe der

Digitized by Google

Von den bei den Laubmoosen[1]) auftretenden Lamellen weichen die der Hymenophyllaceae bereits durch ihre Schwankungen an Zahl und Höhe ab, sie erreichen auch nirgends eine Ausbildung, die der der Lamellen eines Fissidens oder einer Schistostega oder mancher Lebermoose gleichkäme, bei welchen, wie mir scheint, die analogen Gebilde noch nicht hinlänglich gewürdigt worden sind.

Von den haarartigen Auswüchsen war bereits oben Anlass derjenigen zu gedenken, welche als Analoga der Spreuschuppen anderer Farne anzusehen und schildförmig befestigt sind. Dieselben bestehen bei den Hymenophyllaceae gewöhnlich aus einer Reihe von Zellen; ihre Befestigungsstelle liegt entweder dem Ende der Basalzelle so nahe, dass sie leicht verkannt werden kann, z. B. T. reptans, in andern Fällen ist der Stiel an der zweiten Zelle des Haars, oder an der Grenze der zweiten von der dritten Zelle befestigt, z. B. T. reniforme, H. dilatatum, dichotomum.

Diese Spreuhaare wurden beobachtet auf dem Rhizom von H. cruentum, asplenioides, polyanthos, myriocarpum, undulatum, sanguinolentum, caudiculatum, dilatatum, dichotomum, chiloënse, unter den Arten von Trichomanes bei T. reniforme, reptans, cavifolium, Krausii, muscoides, pyxidiferum, diaphanum, maximum, crispum, speciosum, auriculatum, Ankersii, venustum, Mandioccanum, Smithii, cellulosum, Javanicum, asplenioides. Dieselben werden gewöhnlich frühzeitig abgestossen und daher gewöhnlich nach Ausbildung der Haarwurzeln vermisst.

An dem Blattstiel, der Blattspindel und den Nerven sind diese Spreuhaare eine seltene und gewöhnlich eine sehr vorübergehende Erscheinung; in bei weitem seltneren Fällen, z. B. bei H. caespitosum, Gardneri, exsectum, fuscum, chiloënse, T. macroclados persistiren dieselben.

Die einzige Annäherung an flächenförmig ausgedehnte Schuppen

Nerven sich erhebenden Wucherungen auf, doch erreichen diese eine bedeutendere Höhe, erhalten eine der Blattfläche ähnliche Consistenz und Farbe.

Zur Untersuchung dieser Verhältnisse scheint vor vielen andern die Vergleichung der Asplenien aus der Abtheilung Diplazium und Athyrium geeignet, doch bieten auch, da es sich um eine weit verbreitete Erscheinung handelt, die Arten von Aspidium z. B. aus der Verwandtschaft von A. filix mas, von Cystopteris, Dennstädtia, Pteris, Cheilanthes u. a. reichliche Gelegenheit zum Studium derselben.

1) Vergl. C. Müller Linnaea 18. 404; Schimper rech. s. l. Mouss. 41.

Digitized by Google

bieten diese Spreuhaare auf der Blattspindel von H. cristatum Wall., wo neben ungetheilten oder zerschlitzten schildförmig befestigten Haaren noch schuppenförmige von verschiedener aber stets geringer Grösse angetroffen werden.

An diese schildförmig befestigten Spreuhaare reihen sich zunächst borstenförmig gegliederte Haare an, die mit der Grundfläche ihrer Basalzelle auf der Epidermis befestigt sind; dieselben kommen vor auf dem Rhizom von T. Arbuscula, polyanthos, sinuosum, pinnatum, spicatum, digitatum, palmatifidum, dichotomum, H. latifrons, Lindeni, interruptum, ciliatum, fucoides, dann bei H. fuciforme und Loxsoma, bei welchem letzteren die Basalzelle dieser Haare zuweilen getheilt ist, der Art, dass zwei Zellen die Befestigung des Haars vermitteln.

Die nämlichen Haare finden sich auf dem Blattstiel und an der Blattspindel von H. fucoides.

Als eine geringe Modification dieser Borsten erscheinen bei der Mehrzahl der Arten von Hymenophyllum und Trichomanes auf der untern Blattseite an den Nerven kleine Haare, die aus einer kurzen Stielzelle und einer grösseren cylindrischen oder kolbigen Endzelle bestehen, z. B. T. speciosum, minutum, muscoides, polyanthos, H. Blumeanum. Dieselben haben die weiteste Verbreitung, kommen zahlreichen Arten zu, die dem unbewaffneten Auge vollkommen glatt erscheinen und werden gewöhnlich frühzeitig abgestossen.

Eine andere Reihe haarartiger Auswüchse weicht von den bisher aufgezählten dadurch ab, dass sie nicht wie diese allein auf den Nerven, sondern noch von dem Rand oder gleichzeitig von den Zellen der Blattfläche ihren Ursprung nehmen und dass sie gewöhnlich persistiren.

In dem einfachsten Falle trägt eine Parenchymzelle ein oder zwei ungetheilte einfache Borstenhaare, z. B. am Rand von T. digitatum, palmatifidum, oder es bildet sich zunächst eine kurze Stielzelle aus, die eine oder zwei Borstenzellen trägt, z. B. T. Martiusii, crinitum, trigonum, oder es werden von einer längeren Stielzelle 3—5 oder mehr Strahlen getragen, wie bei H. pulchellum, Moritzianum, trichophyllum, interruptum, dann bei H. tomentosum, plumosum, Fusugasugense, bei welchen die Blattfläche wie die Lamellen derselben in gleicher Weise diese Sternhaare tragen und endlich bei H. speciosum, Karstenianum, Malingii (Taf. I. 32), bei welchen dieselben zwischen oder am Grund der Papillen, in welche die Epidermiszellen auswachsen, inserirt sind.

Digitized by Google

Als eine Modification dieser Sternhaare treten dann Haare auf, die zu zweien beisammen von einer Zelle des Blattrandes entspringen und sich in ungleichem Maasse verzweigen, oder von welchen die eine ungetheilt ist, z. B. H. ciliatum.

Einer andern Reihe von Haaren geben Gruppen von Zellen, deren Zahl innerhalb enger Grenzen (von 2—6) schwankt, den Ursprung, und von welchen eine jede eine ungetheilte Borste trägt, z. B. T. muscoides, Krausii, pusillum; oder es wachsen zwei durch Verdoppelung einer Randzelle entstandene Zellen zu cylindrisch gestalteten Stielzellen aus, die sich rechtwinklicht auf beiden Blattflächen diametral einander entgegengesetzt erheben und an ihrem Ende sternförmig angeordnete Strahlen tragen, die theilweise einfach, theilweise verzweigt sind, z. B. bei H. elasticum.

Als eine Modification dieser letzteren haarartigen Gebilde erscheinen endlich die schuppenförmigen, 1½ Schraubenwindungen beschreibenden Auswüchse des Blattrandes von T. membranaceum, die bald für fehlgeschlagene oder sterile Schleier,[1]) bald für schneckenförmig gewundene Lamellen[2]) angesehen wurden, Deutungen, die indess unstatthaft erscheinen, weil dieselben niemals, weder auf den Nerven wie die Lamellen, noch an den Enden derselben, wie die Fruchthaufen, auftreten; sie nehmen vielmehr von einer Gruppe von Randzellen, ähnlich wie die Sternhaare von T. muscoides ihren Ursprung, breiten aber ihre scheibenförmige Ausbreitung auf beiden Seiten der Blattfläche, ähnlich wie die Doppelhaare von H. elasticum ihre Strahlen aus. Durch Vereinigung sämmtlicher Strahlen der letzteren zu einer continuirlichen Schichte würde eine schneckenförmig gewundene Schuppe zu Stande kommen, die an Ausdehnung der von T. membranaceum gleich käme.

§ 23.

Während nach den mitgetheilten Beobachtungen die Ausbildung und Structur der Blätter nur im Allgemeinen bei der Mehrzahl der Arten von Hymenophyllum und Trichomanes einen durchgreifenden Unterschied von andern Farnen bietet, in andern seltneren Fällen die Structur sich bis zu einer Stufe erhebt, auf der auch andere Farne, z. B.

1) Martius, ic. pl. crypt. t 03.
2) C. Müller, Bot. Zeit. 3. 577.

Digitized by Google

Todea § Leptopteris stehen, ja bei Loxsoma ein Unterschied in der Structur des Blattes von der Mehrzahl anderer Farne nicht obwaltet, ist in den Fruchthaufen der Hymenophyllaceae eine Reihe von Verhältnissen in einer bei andern Farnen nicht wiederkehrenden Weise combinirt.

Bevor wir indess zu diesen selbst übergehen, ist die Anordnung der Fruchthaufen zu betrachten und in Betreff dieser zunächst hervorzuheben, dass entweder, abgesehen von der An- oder Abwesenheit der Fruchthaufen, fertile und sterile Blätter völlig übereinstimmen oder eine Verschiedenheit beider dadurch, dass die fruchttragenden Blattzipfel sich verkürzen und zusammenziehen, bemerkbar wird, oder dass Difformität steriler und fertiler Blätter augenfällig hervortritt, sei es, dass bei übereinstimmender Theilung des Blattes die Grösse des Blattstiels, der Blattfläche und der Blattabschnitte, oder die Gestalt der letzteren, wie bei T. pinnatum, heterophyllum, bifrons, Spruceanum, oder die Theilung der Blätter selbst Verschiedenheiten biete, wie bei T. spicatum, nanum, diversifrons, welche alle in der Fiedertheilung ihrer sterilen Blätter übereinstimmen, während die fruchttragenden der beiden ersteren ährenförmig angeordnete getrennte Fruchthaufen, das letztere aber zu beiden Seiten der Mittelrippe seiner ungetheilten Blattfläche, je eine Reihe eingesenkter Fruchthaufen ausbildet. Auch T. pinnatum var. Vittaria kann hier angeführt werden, in so fern sein steriles Blatt wie bei der Grundform fiederschnittig, sein fertiles ungetheilt ist.

In gewisser Beziehung geht mit diesen Verhältnissen Hand in Hand die Anordnung der Fruchthaufen, indem da, wo sterile und fertile Blätter übereinstimmen, gewöhnlich alle Nerven im Stande sind, Fruchthaufen auszubilden, da hingegen, wo die fruchttragenden Zipfel sich verkürzen, nur ein bestimmter Theil der letzteren diese Veränderung erfährt und einen Fruchthaufen ausbildet.

Ersteres ist der Fall bei Arten, deren Nerven dichotom getheilt sind und fächerartig ausstrahlen, z. B. T. reniforme, oder eine zwischen der dichotomen und fiederartigen schwankende Theilung besitzen, z. B. T. digitatum, flabellatum, palmatifidum, dann unter Arten mit anadromen Nerven bei H. ciliatum, microcarpum, manchen Formen von H. rarum, polyanthos (junge Exemplare), Blumeanum, dichotomum, unter Arten mit katadromen Nerven bei T. reptans, Krausii, heterophyllum, manchen Formen von T. sinuosum.

In allen diesen Fällen schreitet, wenn man das Verhalten einiger

Digitized by Google

Arten, z. B. von H. Blumeanum als maassgebend betrachten darf, die Ausbildung der Fruchthaufen der Entwickelung des Blattes von unten nach oben folgend fort und hält dieser gleichen Schritt.[1])

Fast gewöhnlicher als diese Fälle, in welchen alle Nerven Fruchthaufen ausbilden, endet ein Theil derselben steril und dann nehmen die sterilen Nerven entweder den Grund oder die Spitze des Blattes und seiner Abschnitte ein.

In dem ersteren Falle sind entweder ein oder mehrere untere secundäre oder primäre Abschnitte, wie bei H. microcarpum, steril, oder es sind die Fruchthaufen nur am oberen Theil des Blattes auf sämmtlichen Nerven ausgebildet, während der grössere untere Theil derselben steril ist, z. B. H. paniculiflorum, osmundoides, apiculatum, T. asplenioides, oder es kommt ein einziger Fruchthaufen auf der Spitze des Blattes zur Ausbildung, z. B. H. brevifrons, abruptum, verkümmerten Formen von T. Hookeri, muscoides u. a., oder es endet die Blattspitze steril und nehmen die Fruchthaufen entweder das Ende der Fiederabschnitte, wie bei H. sinuosum, oder gleichzeitig mit den oberen Seitennerven ein, z. B. T. crispum, H. tomentosum, T. Arbuscula, bicorne, H. pyramidatum, oder es endigen die Blattspitze sammt den primären Abschnitten steril, die secundären aber enden durch einen Fruchthaufen, während ihre unteren Nerven steril bleiben, z. B. T. trigonum, lucens, Lambertianum, manche Formen von T. alatum.

In dem zweiten Falle enden die Blattfläche und die primären Abschnitte steril, und nehmen die Fruchthaufen entweder alle oder die unteren Nerven dritter und vierter Ordnung ein, z. B. H. polyanthos, rarum, H. lineare, oder sie sind auf den untersten Nerven dritter oder vierter Ordnung beschränkt, z. B. H. rarum, sinuosum.

Unter den angeführten Beispielen bietet T. sinuosum, wie in der Anordnung der Nerven (§ 5), so auch in der der Fruchthaufen, die extremsten Schwankungen dar, und sind gewöhnlich an Exemplaren mit

---

1) In einer andern Weise verhält sich nach Newman (Brit. ferns 288) T. speciosum W. (T. radicans Aut.); hier soll das Blatt, nachdem es in dem zweiten Jahre seine volle Ausbildung erreicht hat, erst in dem dritten Fruchthaufen entwickeln, eine Angabe, die ich an englischen Exemplaren der genannten Art nicht prüfen kann, nach Exemplaren von Madeira, deren Blätter schon im zweiten Jahre reife Fruchthaufen tragen, bezweifle. — Andere verwandte Arten, z. B. T. radicans (mexicanische Exemplare), bilden in dem Jahr ihrer Entfaltung auch ihre Fruchthaufen aus.

Digitized by Google

anadromen Nerven die Fruchthaufen auf die ersten tertiären Nerven beschränkt, während bei Exemplaren mit katadromen Nerven gewöhnlich nur die Mittelrippe der primären Abschnitte einen Fruchthaufen trägt.

In allen andern Beispielen findet eine volle Uebereinstimmung der Nervatur statt, mag die Anordnung der Fruchthaufen sein, welche sie wolle. So z. B. bei T. alatum mit katadromen Nerven trägt bald die Costula der secundären Abschnitte, bald der zweite Nerv der 4. Ordnung den Fruchthaufen.

So z. B. nehmen bei T. intramarginale und latemarginale mit anadromen Nerven die Fruchthaufen ganz gewöhnlich nur die innere Seite der untern Abschnitte und das Ende der obern ungetheilten, nicht aber die Blattspitze ein, während in andern Fällen auch diese einen Fruchthaufen trägt, bei weitem häufiger aber der oberste seitliche Zipfel sich sammt seinem Fruchthaufen aufrichtet und eine scheinbar endständige Stellung einnimmt, während der terminale Blattzipfel, wie gewöhnlich, steril, aber fast bis zur Unkenntlichkeit verkümmert ist. Nicht unwahrscheinlich dürfte sein, dass bei H. minimum der einzige zur Ausbildung gelangende Fruchthaufen dem obersten seitlichen Blattzipfel angehöre, der in Folge der Verkümmerung des endständigen in die Richtung von diesem eingetreten ist.

H. caespitosum bietet ein Beispiel, wo das Blatt bald durch einen Fruchthaufen begrenzt wird und unter diesen einige seitliche Fruchthaufen trägt, bald unbegrenzt sich fortbildet, in welchem letzteren Falle nur seitliche Fruchthaufen zur Ausbildung kommen.

T. asplenioides und Javanicum endlich mit anadromen Nerven unterscheiden sich im Wesentlichen dadurch, dass bei dem ersteren die Spitze des Blattes und die Abschnitte nebst den oberen Seitennerven Fruchthaufen tragen, bei letzteren hingegen die Fruchthaufen auf die oberen Seitennerven beschränkt sind, und weder die Enden der Abschnitte, noch des Blattes selbst einnehmen, Unterschiede, die bei andern Arten, z. B. H. polyanthos, in verschiedenen Altersstufen der Pflanze, d. h. an jüngeren, in geringerem Grade ausgebildeten, aber immerhin schon fructificirenden und an älteren kräftigeren Exemplaren wahrgenommen werden, wesshalb die Wahrscheinlichkeit nahe liegt, dass auch T. asplenioides und Javanicum nur Stadien ein und der nämlichen Art seien, wie dermalen wegen der geringen Zahl der vorliegenden Exemplare nicht festgestellt werden konnte.

Nicht minder auffallend sind die Schwankungen in der Anordnung der Fruchthaufen unter Arten mit katadromen Nerven bei T. pinnatum. Während nämlich gewöhnlich die Fruchthaufen in aufsteigender Ordnung und an jüngeren Exemplaren nur die untersten, zuweilen selbst nur die das Ende der aus der Blattspindel hervortretenden Nerven einnehmenden Fruchthaufen zur Ausbildung kommen, fehlen an andern Exemplaren grade diese unteren Fruchthaufen gänzlich und fructificiren nur die oberen Seitennerven nebst dem Ende der Costa der Fiederabschnitte.

Diese Schwankungen in den Anordnungen der Fruchthaufen verringern zwar den Werth, der in systematischer Beziehung denselben entnommen werden kann, heben denselben jedoch nicht völlig auf, da in der nämlichen Weise, wie gewöhnlich diese Schwankungen nach zwei Seiten sich von einander entfernen, insofern als entweder die oberen oder die unteren Nerven des Blattes und seiner Abschnitte steril bleiben, neben Arten, deren sämmtliche Nerven Fruchthaufen tragen, andere entweder nur auf der Spitze des Blattes, der primären oder secundären Abschnitte, oder gleichzeitig den nächst oberen an diese angrenzenden Seitennerven, oder nur auf den untersten oder den unteren Nerven einer Ordnung Fruchthaufen tragen, also grade derjenigen Fruchthaufen entbehren, die bei den ersteren am constantesten zur Ausbildung kommen.

Den ersteren dieser, für welche, da sie so innig an die auf allen Nerven fruchttragende Nerven sich anschliessen, bereits oben zahlreiche Beispiele angeführt sind, hat V. d. Bosch[1]) endständige, den letzteren achselständige Fruchthaufen zugeschrieben.

Diese letzteren werden seltner bei einer völligen Uebereinstimmung steriler und fertiler Blätter wie bei T. Mougeotii, venosum, Ankersii, protrusum, Loxsoma, häufiger bei einer Verkürzung und Zusammenziehung der fruchttragenden Blattzipfel angetroffen, z. B. bei H. chiloënse, exsectum, Gardneri, fuscum, axillare, myriocarpum, dilatatum, formosum, Millefolium, fuciforme, Neesii, Tunbridgense, T. trichoideum, Smithii, apiifolium etc. Dieselben bilden entweder nur einen einzigen Fruchthaufen auf dem ersten Nerven einer Ordnung aus, z. B. bei T. venosum, Vieillardii, Colensoi, manchen Formen von T. Ankersii u. A., oder in aufsteigender Folge auf den Nerven gleicher Ordnung mehrere, z. B. bei H. pec-

1) Bijd. l. c. 314.

Digitized by Google

tinatum, Bridgesii, oder selbst zahlreiche wie z. B. bei T. pinnatum, diversifrons, spicatum.

Doch auch in diesen Beispielen kommen wieder Abweichungen vor, indem zuweilen, wie bei H. myriocarpum, Millefolium, Tunbridgense, auch das Ende eines secundären Abschnitts einen Fruchthaufen trägt und nicht nachgewiesen werden kann, dass dieser Fruchthaufen nur eine scheinbar endständige Stellung besitze, wie bei T. intramarginale erläutert wurde, und noch mehr wird die Festhaltung dieser Verhältnisse dadurch erschwert, dass die Arten mit conformen und zusammengezogenen verkürzten fruchttragenden Blattzipfeln in vielen Fällen ohne scharfe Grenze, in einander übergehen.

Gleichzeitig mit der Unterscheidung der endständigen und axillaren Fruchthaufen hat Van den Bosch darauf hingewiesen, dass erstere gewöhnlich bei Arten mit katadromen Nerven, letztere bei Arten mit anadromen angetroffen werden, eine Annahme, die zwar für die Mehrzahl der Arten gültig ist, ja noch insofern eine Bestätigung erhält, als T. sinuosum, die einzige Art, die mit anadromen und katadromen Nerven schwankt, bei der Ausbildung der ersteren axilläre, der der letzteren endständige Fruchthaufen besitzt, aber doch auch wieder zahlreichere Ausnahmen erfährt, als V. d. Bosch vermuthet hat. Unter den Arten, deren Nerven constant anadrome Anordnung besitzen, tragen H. apiculatum, L'Herminieri und paniculiflorum u. a., ferner T. asplenioides und unter Umständen T. intramarginale, latemarginale endständige Fruchthaufen, und umgekehrt tragen unter Arten mit katadromen Nerven constant axillare Fruchthaufen z. B. ausser Loxsoma, T. Mougeotii und diversifrons.

§ 24.

Wie bei allen Farnen den Beziehungen der Fruchthaufen zu den Nerven die grösste Wichtigkeit beigelegt wird, so hat man nicht nur im Allgemeinen den Charakter der Hymenophyllaceae in den über den Blattrand sich fortsetzenden und das Receptaculum oder die Columella des Fruchthaufens bildenden Nerven gefunden, sondern auch in dem Verhalten dieses Nerven Anhaltspunkte zur Trennung der beiden Gattungen Hymenophyllum und Trichomanes gesucht, indem man in früherer Zeit das über den Schleier vorragende Receptaculum für Trichomanes, das in demselben eingeschlossene für Hymenophyllum charak-

Digitized by Google

teristisch hielt und in neuerer Zeit von Crüger[1]) und nach diesem von Van den Bosch[2]) der ersten dieser beiden Gattungen ein unbegrenztes, am Grund nachwachsendes und in Folge dessen hier die jüngeren Sporangien tragendes Receptaculum, der letzteren hingegen ein begrenztes, frühzeitig seine Entwickelung abschliessendes oder alle Sporangien simultan bildendes Receptaculum zugeschrieben wurde.

Zur richtigen Würdigung dieser Verhältnisse ist in erster Linie hervorzuheben, dass bei allen Hymenophyllaceis die Entwickelung der Sporangien von der Spitze gegen die Basis der Columella fortschreite,[3]) dass die Entwickelung neuer Sporangien bald früher aufhöre, bald länger andaure, und dass eine jede Art in diesem Punkt sich constant verhalte.

Die Abweichung meiner Auffassung von der Crüger's beruht also darauf, dass ich auch bei denjenigen Arten von Hymenophyllum, bei welchen dieser Forscher eine simultane Entwickelung der Sporangien annimmt, und zwar gestützt auf Beobachtungen an H. ciliatum eine von dem Ende gegen die Basis der Columella fortschreitende Entwickelung der Sporangien annehme, und die gleiche Entwickelungsfolge bei zahlreichen andern Arten aus der Thatsache, dass die dem Ende der Columella genäherten Sporangien ihre Ausbildung früher vollenden als die unteren, abzuleiten gerechtfertigt halte, so z. B. bei H. Tunbridgense, polyanthos, Loxsoma, bei welchen die unteren Sporangien stets an Grösse den oberen nachstehen, indess gleich diesen Sporen ausbilden.

An diese Arten reihen sich alsdann Beispiele an, die in der Mitte zwischen Hymenophyllum und Trichomanes stehen, insofern die absteigende Entwickelungsfolge der Sporangien längere Zeit andauert als bei Hymenophyllum, aber noch nicht eine unbegrenzte ist, wie bei Trichomanes. Hierher gehören H. Neesii, dichotomum, fucoides, caespitosum, exsectum, Gardneri, fuscum, macroglossum, protrusum, T. polyanthos, flabellatum, digitatum, capillatum, bei welchen am Grunde der Columella jugendliche Sporangien, die niemals Sporen ausbilden, angetroffen

1) Bot. Zeit. 18. 353.

2) Bijd. 354.

3) Ob in diesem Verhalten ein durchgreifender Charakter der Hymenophyllaceae ausgesprochen sei, wird von der Entwickelung der Sporangien in den Fruchthaufen von Dennstädtia u. a. abhängen, die noch genauerer Untersuchungen bedarf.

Digitized by Google

werden und die Columella selbst in geringer Ausdehnung den Schleier überragt.[1])

Bei der Mehrzahl der Arten von Trichomanes, z. B. T. crispum, alatum, lucens, crinitum, venustum, ist alsdann, wie Crüger und Van den Bosch erkannt haben, das Wachsthum der Columella ein unbegrenztes und dauert die Entwickelung neuer Sporangien unterhalb der ausgebildeten unbegrenzt fort und trifft man von diesen gegen die Basis der Columella fortschreitend eine vollständige Entwickelungsreihe der Sporangien bis zu ihrer ersten Anlage an. Zugleich ist die Zahl der in der Ausbildung begriffenen Sporangien stets eine sehr bedeutende.[2])

Unterhalb der ersten Anlagen der Sporangien zwischen ihnen und dem Grund der Columella besteht das Gewebe der letzteren, abgesehen von dem Gefässbündel, auf dessen Verhalten ich zurückkomme, aus kleineren regelmässig gereihten Zellen, die, wie den oberflächlichen entnommen werden kann, durch Scheidewände, die rechtwinklicht zur Längsausdehnung der Columella auftreten, und zwar in dem nämlichen Maass als die oberen Zellen sich ausdehnen und Anlagen von Sporangien bilden, sich vermehren.

Das Wachsthum der Columella ist also ein unbegrenztes und ein intercalares und in diesem Wachsthum liegt eine Erscheinung vor, die bei Farnen überhaupt unerhört ist, da sonst bei diesen Anlage und Ausbildung der Gefässbündel von unten nach oben fortschreiten und nur bei niederen Pflanzen entfernte Analoga finden.

Bei T. crispum ist dieses intercalare Wachsthum der Columella, lange bevor dieselbe den Schleier überragt, nachweisbar, die Periode aber, in welcher dasselbe beginnt, ist mir ebenso wie die Entstehung der ersten Anlage der Columella unbekannt geblieben; ebenso kann ich nicht entscheiden, in welchem Maass dasselbe an der Ausbildung

---

1) Andere Beispiele von Hymenophyllum, deren Columella den Schleier überragt, sind: H. Sibthorpioides, chiloënse, brevifrons, abruptum, ricciaefolium, fuciforme, polyanthos.

2) Die Gesammtheit dieser in der Ausbildung begriffenen, dicht bei einander stehenden Sporangien erscheint dem unbewaffneten Auge als eine Anschwellung am Grund der aus dem Schleier hervorgezogenen Columella, wie sie bei T. crispum, crinitum, heterophyllum von Hedwig u. a. dargestellt wurde. Befremdend ist es, dass noch Van den Bosch (Bijd. 306) annahm, dass die Columella der Hymenophyllaceae gewöhnlich am Grund angeschwollen sei.

Digitized by Google

der Columella, da, wo derselben ein unbegrenztes Wachsthum zukommt, Antheil hat. Unter den Arten von Hymenophyllum war indess das intercalare Wachsthum der Columella z. B. bei H. protrusum nachweisbar.

In Bezug der Gestalt der Columella ist im Allgemeinen hervorzuheben, dass dieselbe entweder und zwar gewöhnlich da, wo ihr ein begrenztes Wachsthum eigen ist, an ihrem Ende eine Anschwellung[1]) bilde, während sie da, wo ihr ein unbegrenztes Wachsthum zukommt, stielrund und fadenförmig gedehnt ist.[2]) Dieselbe ist alsdann stets unverzweigt.[3])

Das Gefässbündel des fruchttragenden Nerven setzt sich stets continuirlich in die Columella fort[4]) und erlischt entweder, wie bei Lox-

---

1) Im Allgemeinen hält die Gestalt dieser Anschwellung, deren Ende zuweilen auch wieder in eine Spitze ausgezogen ist, gleichen Schritt mit der des Schleiers; man vergleiche in dieser Beziehung H. formosum oder Junghuhnii mit H. productum u. dgl.

2) Die Länge, welche die Columella erreichen kann, ist bei Arten wie z. B. T. crispum eine sehr bedeutende, sie beträgt oft mehr als 2 Zoll; in der Mehrzahl der Fälle verwittert der ältere über den Schleier hervorragende Theil der Columella und ist die Länge derselben nicht mehr zu bestimmen.

Aus dem nämlichen Grund trifft man nur selten das Ende der Columella unversehrt an.

Dasselbe war entweder abgerundet und durch eine einzige keilförmige Scheitelzelle abgeschlossen, so bei H. protrusum; oder es war zugespitzt, auffallend verschmälert, oder durch Ausdehnung der Endzellen in geringem Grad angeschwollen, so bei T. crispum, venustum, letzteres ebenso bei T. crinitum, Javanicum, atrovirens, wo der Scheitel der Columella eingesunken und in Folge dessen gleichsam zweispaltig zu sein schien. Solche Fälle mögen der Abbildung Hedwig's (gen. Hym. t) zu Grunde liegen. Endesanschwellungen der Columella von den bei Presl (Hym. T. V) dargestellten Dimensionen sind mir aus eigner Anschauung nicht bekannt geworden. —

3) Scheinbare Auszweigungen in Doppelfruchthaufen von H. pectinatum, sesciifolium bestätigen die Regel, wobei gleichzeitig bemerkt werden mag, dass am Ende der Fiederabschnitte von H. pyramidatum, tomentosum sehr häufig 2 oder 3 Fruchthaufen zusammenfliessen.

4) Van den Bosch fragt (Bijd. l. c. 325), ob immer eine Verlängerung des Gefässbündels des fruchttragenden Nerven in der Columella eintrete, oder ob letztere unabhängig von dem Gefässbündel entstehe und schien für möglich zu halten, dass zwischen Columella und Schleier Verhältnisse obwalteten, die den bei Laub- und Lebermoosen zwischen der Seta des Sporangiums und der Vaginula stattfindenden entsprächen, oder mag durch das unbegrenzte intercalare Wachsthum der Columella an ihrem Grunde an das Sporangium von Anthoceros erinnert worden sein, das ein basales Wachsthum besitzt und seine Sporen in absteigender Folge ausbildet.

Dieser Frage von V. d. Bosch steht der directe Nachweis des Eintritts des Ge-

Digitized by Google

soma, in dem Grund derselben, eine nicht unbedeutende Strecke unterhalb der untersten Sporangien oder es setzt sich wie bei Hymenophyllum und Trichomanes in der Längsachse der Columella bis zu dem Ende derselben fort. Hat die Columella ein begrenztes Wachsthum, so schwillt nicht selten, z. B. H. ciliatum, das Gefässbündel in seinem Verlauf durch dieselbe allmählig an; hat dieselbe ein unbegrenztes Wachsthum, so setzt sich dieser Gefässbündel entweder continuirlich durch die Stelle fort, an der das intercalare Wachsthum der Columella seinen Sitz hat z. B. in jungen Fruchthaufen von T. crispum, venustum, oder es ist an dieser Stelle unterbrochen, wie einmal bei T. trigonum beobachtet wurde, oder es ist fast unterbrochen, indem einige wenige verholzte Gefässzellen zwischen den hier neugebildeten Zellen liegen, während oberhalb und unterhalb dieser Stelle das Gefässbündel zahlreiche verholzte Gefässzellen enthält.

Das Gefässbündel der Columella ist in der Regel einfach, nur ausnahmsweise verzweigt,[1]) es enthält einige wenige enge Spiralfasern und treppenförmige Zellen, die, wie in den äussersten Nervenzweigen, nur eine sehr geringe Weite haben.

Das das Gefässbündel in der Blattfläche umscheidende Sklerenchym erlischt entweder bei dem Eintritt desselben in die Columella, oder es setzt sich auf die beiden von diesem Nerven abgehenden Zweige (§ 25) oder zwischen das parenchymatische Gewebe des Schleiers fort, dringt also niemals in die Columella ein, gemäss der bereits oben angeführten Thatsache, dass die fruchttragenden Nerven aller Farne sich dieser Hülle entkleiden.

Das zwischen dem Gefässbündel und seiner Sklerenchymscheide liegende parenchymatische Gewebe, das in den Nerven der Blattfläche nur eine sehr dünne Schichte bildet, vermehrt sich hingegen bei dem

---

fässbündels in die Columella entgegen und diesen Vergleichen mit den Moosen fehlt, da bei denselben ungleichwerthige Gebilde in Parallele gestellt werden, alle Berechtigung, und nur solchen Forschern, welche in dem Blatt der Hymenophyllaceae, wie der Farne überhaupt, Zweige erblicken, können Vergleiche zwischen dem Schleier der Hymenophyllaceae und der Vaginula oder dem Perianthium eines Lebermooses gestattet sein; für uns sind solche unhaltbar.

1) Bei T. reniforme spaltete sich das Gefässbündel in 3 oder 4 in geringer Entfernung von einander hinziehende Zweige; bei H. Tunbridgense sah ich einmal einen kleinen Seitenzweig von dem Gefässbündel abgehen.

Digitized by Google

Eintritt des Gefässbündels in die Columella, umgiebt das letztere in mehreren Lagen und bildet den grösseren Theil der Masse der Columella; seine Zellen sind in regelmässigen longitudinalen Reihen angeordnet, die auch an dem ältesten Theil der Columella mit Sicherheit erkannt werden können. Die Zahl der oberflächlichen Zellenreihen betrug bei T. crispum 13. — Intercellulargänge fehlten auch zwischen diesen Zellen.

Diejenigen Zellen dieser oberflächlichen Reihen, welche zu Sporangien auswachsen, theilen sich während der Ausbildung der letzteren in eine Rosette von 4—6 Zellen. Solche Zellrosetten deuten demnach in der ausgebildeten Columella überall die Insertionsstelle eines Sporangiums an.

Die Anordnung der Sporangien ist, wenn man einigen Beobachtungen an H. Tunbridgense, ciliatum allgemeine Gültigkeit für die Arten mit begrenzter Columella zuschreiben darf, überall eine spiralige; dieselbe tritt mit zweifelloser Gewissheit bei allen Arten mit unbegrenzter Columella hinzu, z. B. T. crispum, und bildet sich hier in dem nämlichen Maass, als die Columella sich verlängert, gegen den Grund derselben fort, wobei kaum nothwendig sein dürfte hervorzuheben, dass weniger die spiralige Anordnung der Sporangien auf dem Receptaculum — eine solche kommt ja auch bei Alsophila, Hemitelia, Cyathea u. a. vor, — als die absteigende Richtung, in welcher die Spirale sich fortbildet, den Hymenophyllaceis eigenthümlich ist.

§ 25.

Bei der einfachsten Ausbildung der Fruchthaufen der Hymenophyllaceae, welche bei H. ciliatum und den Verwandten angetroffen wird, fehlt eine Auszweigung des fruchttragenden Nerven bei seinem Uebertritt in die Columella; bei der Mehrzahl der Arten von Hymenophyllum und Trichomanes wird die Ausbildung der Fruchthaufen dadurch complicirter, dass dieselbe, wie bei Arten von Davallia § Eu-Davallia, rechts und links einen Zweig[1]) abgiebt, der an der Grenze des Schleiers von

1) Nachdem in verschiedenen Abbildungen diese Zweige hervorgehoben worden waren und Taschner dieselben bei Trichomanes (l. c. 23) beschrieben und Rudimente derselben bei Hymenophyllum (l. c. 24) aufgefunden hatte, und von mir mit Hinweisung auf die Uebereinstimmung der Fruchthaufen von Hymenophyllaceis und Davallia-

Digitized by Google

der Blattfläche oder an der Grenze der der oberen und unteren Seite des Blatts entsprechenden Hälften des Schleiers hinzieht.

Im Wesentlichen hängt die Ausdehnung dieser beiden Zweige von der der Röhre des Schleiers ab und halten dieselben mit dieser gleichen Schritt; dieselben fehlen daher überall, wo der Schleier bis auf seinen Grund gespalten ist, z. B. H. ciliatum, productum u. a., erreichen nur eine rudimentäre Ausbildung bei den Arten von Hymenophyllum mit kurzer Schleierröhre, treten mit der Verlängerung derselben, z. B. H. Neesii u. a., deutlicher auf, und erreichen das Maximum ihrer Ausbildung bei Trichomanes und werden in gleicher Stärke, sowohl bei Arten, deren Fruchthaufen in die Blattfläche eingesenkt sind, z. B. T. sinuosum, diversifrons, als bei solchen, wo die Fruchthaufen über die Blattfläche hervortreten und nur von einem schmalen Flügel der Blattsubstanz umsäumt werden, z. B. T. trichoideum, angetroffen.

Bei Loxsoma fehlen diese Zweige gänzlich.

Abweichungen und Schwankungen in dem Auftreten und der Ausdehnung dieser Zweige sind mir nur wenige begegnet. So z. B. fand sich, dass dieselben bei T. elegans nur bis zur Mitte der Schleierröhre sich erstrecken, ferner, dass unter Arten, die gewöhnlich diese Zweige nicht ausbilden, z. B. bei H. caudiculatum, reniforme, undulatum, polycarpum, scabrum, dilatatum Rudimente derselben auftreten und umgekehrt bei anderen, welche gewöhnlich mit denselben versehen sind, fehlen, z. B. H. Millefolium, ferner bei H. Blumeanum, pycnocarpum, welche beide zuweilen nur einen von diesen beiden Zweigen ausbilden; von auffallenderen Schwankungen ist mir nur ein Beispiel bekannt geworden in H. flabellatum, in so fern bei demselben bald 2 starke Zweige, bald nur Rudimente derselben entwickelt sind, bald endlich jede Spur auch von diesen vermisst wurde.

Die Structur dieser beiden Zweige, die ich als die Schenkel (crura) des fertilen Nerven bezeichnet habe, stimmt mit der der Nerven der Blattfläche überein; ihr Gefässbündelchen hat stets nur eine sehr geringe

---

Arten ein besonderer Werth auf dieselben gelegt worden war, wurde die Existenz derselben von Van den Bosch (Einl. 8) zunächst in Abrede gestellt, dann dieselben zur Eintheilung der Hymenophyllaceae (Bijd. l. c. 318, 324) benutzt, aber ohne grosse Umsicht, da weder alle Arten, denen Van den Bosch diese Zweige zuerkennt, dieselben besitzen, noch diejenigen alle, denen er dieselbe abspricht, derselben entbehren. Auch Crüger hat a. a. O. diese Zweige beschrieben (l. c. 354).

Digitized by Google

Stärke, enthält einige wenige Spiralfaserzellen und ist durch eine einzige Lage zarter Zellen von dem Sklerenchym getrennt; letzteres umscheidet gewöhnlich diese Gefässbündelchen unvollständig, in so fern es auf der der Columella zugekehrten Seite fehlt, oder bildet nur einen schmalen Streifen auf der der Columella abgewandten Seite, z. B. T. alatum; es setzt sich ferner gewöhnlich nicht nur auf dieser Seite bis zu dem Ende des Gefässbündelchens fort, sondern überragt dasselbe in der nämlichen Weise, wie auch in den sterilen Nerven der Blattfläche die Sklerenchymscheide sich über das erloschne Gefässbündelchen fortsetzt. In seltneren Fällen fehlt das Gefässbündelchen dieser Zweige gänzlich und bestehen dieselben nur aus dem prosenchymatischen Gewebe der Scheide; häufiger wie z. B. bei H. protrusum setzt sich hingegen das letztere nicht in diese Zweige fort und bestehen dieselben allein aus den Gefässbündelzellen.

Bei allen Arten von Trichomanes endlich, bei welchen Deckzellen zur Ausbildung kommen, bekleiden dieselben auch die Scheide dieser Schenkel; auch sind zuweilen in Fällen, wo nur wenige Prosenchymzellen diese Scheide bilden, diese selbst in Deckzellen abgetheilt, wie es in den Scheinnerven von T. pedicellatum u. A. der Fall war.

§ 26.

Die Sklerenchymscheide des fruchttragenden Nerven setzt sich bei dessen Eintritt in die Columella nicht allein auf die beiden so eben betrachteten Schenkel fort, sondern breitet sich auch bei der Mehrzahl der Arten von Trichomanes in der Wandung des Schleiers aus und zwar liegen ihre Zellen in dem Grunde desselben in einer geschlossenen Schichte beisammen, nehmen dann gegen das Ende derselben an Zahl ab, rücken aus einander oder treten vereinzelt auf und stellen dann gleich den Scheinnerven der Blattfläche isolirte Längsstreifen dar, z. B. T. pinnatum, Filicula, davallioides, T. Henzaianum.[1])

Sucht man durch Vergleichung zahlreicher Durchschnitte die allmähligen Veränderungen, welche der fruchttragende Nerv bei der Ausbildung eines Fruchthaufens erfährt, und die Ausdehnung, in welcher die verschiedenen Gewebe dieses Nerven an der Bildung der verschie-

1) In der Abbildung dieser Art bei Hooker icon. fil. cent. II. 1 sind diese Streifen hervorgehoben.

Digitized by Google

denen Theile des Fruchthaufens Antheil haben, sich klar zu machen, so ergiebt sich, dass, während innerhalb der Blattfläche der Gefässbündel dieses Nerven nur durch eine einzige Lage zartwandiger Zellen von der Sklerenchymscheide geschieden war, am Grunde des Fruchthaufens zunächst eine Vermehrung dieser Zellen, die nun gleichzeitig den Charakter von Parenchymzellen annehmen, stattfand, dass alsdann nach der Abgabe der beiden Schenkel eine Sonderung dieser parenchymatischen Zellen in eine innere und eine äussere Zone eintrat, von welchen in der Folge die erste mächtigere der Columella folgt und das den Gefässbündel derselben bedeckende Parenchym bildet, die andere mit der trichterförmig sich erweiternden Sklerenchymscheide und der dieselbe bedeckenden Epidermis die Wandung des röhrenförmigen Schleiers oder genauer gesagt, die innere Epidermis desselben bilden; es erweitert sich also das die Gefässbündel umscheidende Gewebe, während dieses selbst nach Abgabe der beiden Schenkel in die Columella eintritt, zum Schleier und bestätigt die anatomische Untersuchung die Annahme Van den Bosch's und Crüger's, dass das Gewebe der Blattfläche in der Umgebung des Gefässbündels ringsum dasselbe in die Bildung des Schleiers eingehe und nicht innerhalb des Blattrandes auf der untern Seite der Blattfläche ein Schleier sich erhebe, der, wie bei Davallia und andern mit seinen Rändern dieser anwachse. Ein solches Verhalten findet weder bei Hymenophyllum noch Trichomanes statt, charakterisirt hingegen Loxsoma, welches in dieser Beziehung vollständig mit Davallia u. a. übereinstimmt und auf der untern Seite der der Blattfläche entsprechenden Hälfte der röhrenförmigen Hülle des Fruchthaufens Spaltöffnungen besitzt, während die andere den wahren Schleier bildende, aus 3—4 Zellen bestehende Hälfte spaltöffnungslos ist.[1])

1) Die Annahme, der ich früher huldigte, dass nämlich bei Hymenophyllum und Trichomanes die Hülle der Fruchthaufen, wie bei Loxsoma, von einem mit dem fruchttragenden Blattzipfel verwachsenen wahren Schleier gebildet werde, würde zwar eine Stütze erhalten in Trichomanes Henzianum, bei dem nach der Abbildung und Beschreibung Hooker's (Icones filic. cent. II. t. f. 5) der Schleier, wie bei Davallia, der unteren Blattfläche innerhalb des Randes aufgewachsen ist; es wird aber dieses von Hooker hervorgehobene Verhalten nur bei einem Theil der Fruchthaufen angetroffen und ist vielleicht weniger geeignet, die nun adoptirte Ansicht von der Bildung der Fruchthaufenhülle dieser Gattung umzustossen, als vielmehr die verschiedene Ausbildung ihrer der oberen und unteren Seite des Blattes zugekehrten Hälften darzuthun.

Digitized by Google

Die Ausbreitung des Sklerenchyms in dem Schleier fehlt bei allen Arten von Hymenophyllum, unter den Arten von Trichomanes bei T. sinuosum, alatum, crinitum, lucens u. a., ist bei der Mehrzahl der Arten auf den Grund des Schleiers beschränkt, z. B. T. polyanthos, oder bildet in dem untern Dritttheil oder selbst der untern Hälfte eine geschlossene oder fast geschlossene Zone und dringt in einzelnen Streifen bis gegen den Saum des Schleiers vor, z. B. T. pinnatum, Filicula, davallioides, elegans, venustum, trichoideum, bildet in andern Fällen vorzugsweise solche isolirte, mit den Scheinnerven der Blattfläche an Ausdehnung und Ansehn übereinstimmende Streifen, die entweder frei enden, z. B. T. crispum, trigonum, punctatum, muscoides, membranaceum, Krausii, Henzaianum, sublimbatum, Hookeri, oder innerhalb des Saums des Schleiers eine Anastomose eingehen, z. B. T. erosum, cuspidatum, reticulatum, die nicht selten mit der der Scheinnerven innerhalb des Randes der Blattfläche in Verbindung steht, oder es tritt, unabhängig von den Scheinnerven der Schleierröhre, längs des Saums oder in den Lippen des Schleiers eine geringere oder eine bedeutendere Menge von Sklerenchymzellen auf, z. B. bei T. latemarginale, Filicula,[1]) capillatum.

Mit Ausnahme von T. polyanthos, album u. n. a., die überhaupt keine Deckzellen ausbilden, werden in dem Schleier aller Arten von Trichomanes durch Theilung der äussersten Sklerenchymzellen Deckzellen gebildet oder es werden vereinzelt auftretende Sklerenchymzellen in solche abgetheilt, z. B. bei T. elegans, dessen Scheinnerven in der Blattfläche die nämliche Beschaffenheit zeigten. Doch fehlen solche Deckzellen wieder bei T. Filicula auf dem Sklerenchym in den Lippen des Schleiers und sind bei T. latemarginale hier ihrer nur wenige ausgebildet.

Die Deckzellen des Schleiers enthalten dann stets Ablagerungen von Kieselsäure, die mit den in den Deckzellen der Blattnerven enthaltenen übereinstimmen.

§ 27.

Bei den Arten von Hymenophyllum und Trichomanes, deren Blattparenchym nur aus einer einzigen Zelllage gebildet wird, besteht auch

1) Ob die Vertheilung des Sklerenchyms auf beiden Hälften des Schleiers nur zufälligen Schwankungen unterworfen sei oder ob in denselben eine Verschiedenheit beider Blattseiten sich ausspreche, bedarf umfangreicherer Untersuchungen.

Digitized by Google

die Röhre des Schleiers überall, wo nicht das Sklerenchym sich in dieselbe fortsetzt, aus einer einzigen Zelllage, oder es haben doch nur an ihrem Grund oder längs der Schenkel des fruchttragenden Nerven einige wenige Zellreihen sich verdoppelt, in der nämlichen Weise, wie die an die Nerven der Blattfläche angrenzenden Parenchymzellen gewöhnlich in 2 Lagen über einander liegen, z. B. H. ciliatum, cruentum, asplenioides, bivalve, myriocarpum, dichotomum, seselifolium, abruptum, protrusum, caespitosum, fucoides, Neesii, T. Petersii, Henzaianum, sinuosum, Boschianum, polyanthos, macroclados, ampliatum. Bildet sich hingegen das Sklerenchym in die Schleierröhre fort, so ist dasselbe auf beiden Seiten, grade so wie die Scheinnerven des Blattes, von einer Lage parenchymatischer Zellen bedeckt, z. B. T. auriculatum, rigidum, elongatum, diversifrons, spicatum, Filicula, muscoides, Arbuscula u. a., oder es ist da, wo vereinzelte Sklerenchymzellen in der Schleierröhre auftreten, das zwischen denselben befindliche Parenchym, wie zwischen gedrängt stehenden Nerven oder Scheinnerven der Blattfläche, verdoppelt, z. B. T. pyxidiferum, trichoideum, oder wird nur in seltnen Fällen, z. B. T. Henzaianum, wo die Scheinnerven des Schleiers nur in geringer Zahl und grössern Entfernungen von einander auftreten, aus einer einzigen Zelllage gebildet. Diesem Verhalten gemäss findet man ferner, dass in Fällen, wo das Sklerenchym nur in der Nähe des Saums der Schleierröhre ausgebildet ist, die letztere bis zu dieser Stelle aus einer einzigen Zelllage besteht, z. B. T. latemarginale, oder dass, wie bei T. Filicula, die Schleierröhre zwischen dem Sklerenchym, welches in ihrem unteren grösseren Theil und in ihren Lippen ausgebildet ist, nur aus einer einzigen Zelllage gebildet werde.

Ein aus mehreren über einander liegenden Lagen parenchymatischer Zellen zusammengesetzter Schleier kommt nur bei Arten, deren Blatt mehrschichtig ist, vor, z. B. T. reniforme, H. dilatatum, scabrum, und unter diesen ist selbst wieder bei dem letzteren die mehrschichtige Structur nur am Grund des Schleiers ausgebildet.[1])

---

1) Van den Bosch (Bijd. l. c. 319) sucht einen hervorragenden Unterschied zwischen Hymenophyllum und Trichomanes in der ein- oder mehrschichtigen Structur der Schleierröhre, übersieht aber nicht allein, dass dieselbe bei manchen Arten von Trichomanes sich völlig wie bei Hymenophyllum verhalte, sondern verkennt auch die verschiedene Beschaffenheit der den Schleier von Trichomanes zusammensetzenden

Digitized by Google

Gestalt und Structur der Parenchymzellen des Schleiers stimmen im Allgemeinen mit denen der Blattfläche überein, doch sind dieselben gewöhnlich stärker verdickt, und treten die peripherischen Tüpfel auf der äusseren Wand auffallender hervor; sonst sind die äusseren Wandungen der Zellen des Schleiers stets flach oder nur schwach convex, selbst bei denjenigen Arten, bei welchen die Zellen der Blattfläche, wie z. B. bei T. auriculatum, plumosum, Karstenianum, cylindrische Auswüchse bilden. Das Gleiche ist bei H. Malingii der Fall, bei dem nur die die Schenkel des fruchttragenden Nerven begleitenden Sklerenchymzellen von Epidermiszellen bedeckt sind, die wie in den sterilen Zipfeln mit ihrer äusseren Wand in lange Cylinderfortsätze ausgewachsen sind, während die Parenchymzellen des Schleiers nur am Grunde mit kürzeren Fortsätzen versehen, von der Mitte desselben an bis zum freien Saum aber völlig flach sind.

Die Lamellen der Nerven erlöschen gewöhnlich an dem Grunde der Fruchthaufen und setzen sich nur bei H. tomentosum, pyramidatum in zwei divergirenden flügelartigen Fortsätzen an der Grenze des Parenchyms von dem Schleier fort; häufiger treten auf demselben, ähnlich wie auf den Nerven von H. cristatum und anderen dem Parenchym von H. Fusugasugense, oder wie auf dem Perianthium mancher Lebermoose, kürzere lamellen- oder kammförmige, in eine Borste auslaufende Wucherungen auf oder es stellen dieselben auf breiter Basis sich erhebende niedere Höcker dar. Dieselben scheinen nur da, wo das Sklerenchym in den Schleier nicht eindringt, ausgebildet zu werden, sind daher unter den Arten von Hymenophyllum von ebenso weiter Verbreitung, als unter den Arten von Trichomanes eine seltene Erscheinung. H. caespitosum, fucoides, protrusum, Neesii, sanguinolentum, T. ampliatum, macroclados mögen als Beispiele genannt werden.[1])

Zellen und verfällt dem nämlichen Fehler, den er beging, als er Trichomanes album und die Verwandten den mehrschichtigen Hymenophyllaceis zutheilte.

1) Durchschnitte durch die Schleierröhre zeigen an der Insertionsstelle dieser Wucherungen, die als »cristae« des Schleiers bezeichnet wurden, stets 2 oder mehrere über einander liegende Zelllagen, können aber nicht wohl, sobald man die Ausdehnung solcher Stellen verfolgt, zu Täuschungen über die Structur des Schleiers Anlass geben. Diese Kämme sind mit besonderer Sorgfalt in den Hymenophyll. Javanicae z. B. auf Taf. 29—35 von Van den Bosch dargestellt. Genauere Untersuchungen über ihre etwaigen Verschiedenheiten auf beiden Hälften des Schleiers sind ferner

Digitized by Google

Haarartige Bildungen kommen an dem Schleier von der nämlichen Beschaffenheit wie auf der Blattfläche vor.

§ 28.

Wie bereits oben angeführt wurde, geben bei Hymenophyllum und Trichomanes einzelne oberflächliche Zellen der Columella den Sporangien den Ursprung und theilen sich während der Ausbildung derselben, ebenso wie die Grundfläche des Sporangiums selbst, in eine Rosette von 4—6 Zellen.

Auf dieser Basis erweitert sich alsdann das Sporangium zu einer biconvexen Scheibe, welche mit der einen Convexität der Columella zugekehrt, mit der andern ihr abgewandt ist; der beide Convexitäten von einander trennende Ring zieht auf der der Columella abgewandten Seite neben der Befestigung des Sporangiums über den Grund desselben hin, ist ein vollständiger und schräger und theilt daher das Sporangium stets in zwei ungleiche Hälften. Die der Columella zugekehrte wird stets aus 2—4 tafelförmigen Zellen gebildet, die sich über die ganze Ausdehnung dieser Seite des Sporangiums erstrecken, die entgegengesetzte wird von zahlreicheren kürzeren Zellen zusammengesetzt, z. B. T. lucens, Arbuscula, Javanicum, radicans, speciosum, H. crispum; der Ring selbst besteht aus zahlreichen gedehnten engen derbwandigen Zellen, mit Ausnahme der Stomiumzellen, die an der einen Seite des Sporangiums in der Nähe seines Grundes liegen. Zwischen diesen bildet sich zur Zeit der Reife eine Querspalte aus, durch welche die Sporen entleert werden.

In mehreren Punkten weichen die Sporangien von Loxsoma von denen von Hymenophyllum und Trichomanes ab. Dieselben sind mit einem deutlicheren Stiel versehen, haben eine birnförmige Gestalt, und ihre der Columella zugekehrte Hälfte überwiegt auffallend die entgegengesetzte, innerhalb des Rings gleichsam eingeschlossene Seite. Der

---

wünschenswerth, da nicht nur bei H. tomentosum die der oberen Blattseite entsprechende Hälfte des Schleiers beflügelt war, der untere aber mit einem streifenförmigen Kamm versehen ist, sondern auch bei H. protrusum beide Hälften sich verschieden erweisen; die untere ist hier flach und mit zahlreichen auf breiter Basis sich erhebenden niederen Wucherungen versehen und erscheint daher fast in ihrer ganzen Ausdehnung zweischichtig zu sein, die obere ist convex, dünner und entbehrt diese Wucherungen fast gänzlich.

Digitized by Google

Ring selbst besteht in seiner oberen Hälfte aus engeren, längeren und derbwandigen, in dem grösseren Theil seiner Ausdehnung aber aus zartwandigen Zellen. Das Sporangium reisst endlich in der Längsmitte der der Columella abgewandten Seite mit einer Längsspalte auf. Unter den übrigen Hymenophyllaceis sind mir nur bei H. sericeum Annäherungen an diese Eigenthümlichkeiten von Loxsoma vorgekommen.

Die Entwickelung der Sporen zu verfolgen, fehlte die geeignete Gelegenheit, doch wurde ihre tetraedrische Verbindung häufig noch nach Zerstörung der Mutterzellen wahrgenommen; von diesen letzteren persistiren indess z. B. bei H. protrusum, T. crispum, reniforme die Contouren ihrer der innern Fläche des Sporangiums anliegenden Wandungen.

§ 29.

Nach dem bisherigen Stand unserer Kenntnisse waren Paraphysen nur bei Loxsoma bekannt und wurden dieselben desshalb für eines der Merkmale dieser Gattung gehalten, eine Annahme, die nunmehr eine Berichtigung erfährt, insofern bei verschiedenen Arten von Hymenophyllum Paraphysen nachgewiesen wurden. Dieselben stehen bei diesen letzteren, nicht wie bei Loxsoma, zwischen den Sporangien, sondern sind unterhalb der letzteren dicht zusammengedrängt auf der Basis der Columella (Taf. IV. 5) oder gleichzeitig auf dem Parenchym des benachbarten Grundes der Schleierröhre inserirt. Nur in seltenen Fällen ist die Zahl, in der sie auftreten, eine geringe (3—5), wie bei H. microphyllum, L'Herminieri.

Dieselben gleichen gewöhnlich den Haaren, die die Nerven auf der untern Seite des Blattes im jugendlichen Zustand bedecken und werden von 2—4 fadenartig aneinander gereihten Zellen zusammengesetzt; ihre Endzelle (Taf. IV. 6) ist gewöhnlich gleich den angeführten Haaren cylindrisch gestaltet oder keulenförmig angeschwollen, seltner zugespitzt, wie bei H. Smithii (Taf. IV. 7), bei welchem sie zugleich die bedeutendste Länge ($^1/_5$‴) erreichen.

Ihr Vorkommen beschränkt sich auf Arten zweier Abtheilungen von Hymenophyllum, nämlich derjenigen, deren Blattzipfel gesägt oder ganzrandig und unbehaart sind. Unter den Arten der letzteren Abtheilung wurden dieselben angetroffen bei H. caespitosum, ricciaefolium, macroglossum, fuscum, exsertum, Pöppigianum, microphyllum, L'Her-

Digitized by Google

minieri; unter den Arten der ersten Abtheilung bei H. minimum, affine, megachilum, Tunbridgense, Peruvianum, fucoides, Smithii, holochilum, Bridgesii, pectinatum, spinulosum, cristatum, Feejeense, denticulatum, Neesii, aculeatum, acanthoides, während sie bei andern Arten, die sonst in inniger Verwandtschaft zu den genannten stehen, z. B. H. unilaterale (Wilsoni etc.), secundum, bivalve, fehlen, wobei ich nicht unterlassen will zu bemerken, dass unter weitverbreiteten Arten z. B. H. Tunbridgense sich an allen Orten in Bezug der Ausbildung der Paraphysen ebenso constant als H. unilaterale in dem Mangel derselben verhalte.

Bei allen Arten von Trichomanes fehlen diese Paraphysen gänzlich.[1]

§ 30.

Die Erfahrungen, welche von älteren Forschern über das Keimen der Sporen der Hymenophyllaceae mitgetheilt worden sind, beschränken sich auf eine Notiz bei Hedwig,[2] der zwischen den Sporen von H. undulatum dreistrahlige Fäden beobachtete, die er nicht ohne Zweifel für Keimpflänzchen hielt.

Einen Schritt weiter führten die Untersuchungen Taschner's,[3] der in der Schleierröhre von T. Schmidianum keimende Sporen antraf. Ein Theil dieser Sporen war in einen gegliederten confervenartigen Faden ausgewachsen, ein anderer Theil derselben hatte ausser einem stärkeren Faden einen zweiten kürzeren oder selbst einen dritten wurzelartigen entwickelt; an älteren Vorkeimen war der stärkere Faden verzweigt und glich in jeder Beziehung dem Vorkeime eines Laubmooses; an den ältesten endlich beobachtete Taschner an einzelnen Fäden seitliche kugelige Auswüchse, über deren Natur er im Unklaren blieb.

Dass beiden Forschern die ersten Entwickelungsstadien keimender Hymenophyllaceae vorlagen, wird aus den folgenden Beobachtungen hervorgehen, die zum grösseren Theil an getrockneten Exemplaren des

1) Mit den Paraphysen haben die vermeintlichen Haare auf der Columella von T. pilosum (Mart. ic. sel. pl. crypt. T. 58) und T. eriophorum (Presl. ep. T. 9) u. a. nichts zu thun; diese rühren von Monilia-artigen Pilzfäden her, welche die Columella überziehen.

2) Fil. gen. T. XI. f. 3.

3) l. c. 28. T. II.

Digitized by Google

Herbariums, zum geringeren Theil bei Aussaaten der Sporen von H. Tunbridgense und einiger anderen Arten gewonnen wurden.

Wie bereits von mehreren Forschern hervorgehoben wurde, haben die Sporen der Hymenophyllaceae die Gestalt einer Kugel, die auf der Seite, mit welcher sie in der Mutterzelle mit ihren 3 Schwesterzellen in Berührung stand, in der Form einer niedergedrückten dreiseitigen Pyramide abgeflacht ist;[1]) die Kanten der letzteren nehmen, wie bei Sporen, die in dieser sogenannten tetraedrischen Anordnung in der Mutterzelle entstehen, 3 Leisten ein, die auf dem Scheitel zusammenstossen; ein dichter Chlorophyllinhalt erfüllt die Sporenzelle, eine meist feinkörnige Cuticula überkleidet dieselbe.

Bei zahlreichen Arten von Hymenophyllum[2]) erfahren die Sporen die erste Veränderung nach ihrer Reife entweder in dem noch geschlossenen Sporangium oder in der Höhle des Schleiers, in welche sie bei dem Bersten der Sporangien zunächst gelangen; an beiden Orten trifft man nämlich als eine häufige Erscheinung Sporen an, welche durch Scheidewände, die in der Richtung der drei Leisten stehen und in der Längsachse der Spore zusammenstossen, in 3 gleich grosse Zellen getheilt sind (Taf. IV. 17). Diese 3 Zellen dürften indess nicht das Produkt einer simultanen Theilung der Sporenzelle sein, sondern vielmehr einer successiven Theilung derselben ihren Ursprung verdanken und die seltenen Fälle (Taf. IV. 16), in welchen zunächst eine dieser 3 Zellen gebildet war, ein normales Uebergangsstadium zwischen ungetheilten Sporen und solchen, in welchen die Bildung dieser 3 Zellen vollendet ist, darstellen.

Die Cuticula der Spore berstet bald vor (Taf. IV. 18), bald nach der Bildung dieser Zellen und reisst in 3 Lappen auf, die längs der 3 Leisten aus einander weichen.

Die der Oberfläche der Spore zugekehrte Wand dieser 3 Zellen dehnt sich alsdann in einer zum Mittelpunkt der Spore radialen Richtung aus (Taf. IV. 19. 20), wobei die Lappen der Cuticula weiter aus einander geschoben werden und findet in der nächsten Folge eine Thei-

1) Die einzige Ausnahme von dieser Gestalt der Sporen, welche Hooker (spec. f. I. 113) bei T. diversifrons anführt, finde ich nicht bestätigt.

2) Z. B. Hymenophyllum Tunbridgense, secundum, Bridgesii, seselifolium, fuscum, Gardneri, flabellatum, Mathewsii, myriocarpum, reniforme, repandum, Jagorianum, macrocarpum, sericeum, Fusugasugense, plumosum, Malingii.

Digitized by Google

lung dieser 3 Zellen durch Scheidewände statt, die eine zur Oberfläche der Spore tangentiale Richtung besitzen (Taf. IV. 21).

Der Vorkeim besteht alsdann aus zweimal 3 Zellen, 3 innern, die fortan unverändert bleiben, und 3 äusseren kleineren. Letztere wachsen weiter und theilen sich von Neuem durch Scheidewände, welche in paralleler Richtung mit denjenigen, durch welche sie von den innern Zellen getrennt sind, auftreten. In den nächsten Entwickelungsstadien wiederholt sich gewöhnlich die Theilung der 3 Endzellen ein- oder zweimal gleichmässig und wird hierdurch der Vorkeim in die dreistrahlige Sternform übergeführt, die von Hedwig beobachtet wurde (Taf. IV. 22. 23); in den folgenden gewinnt alsdann ebenso regelmässig einer dieser 3 Strahlen die Oberhand und erreicht durch wiederholte Theilung seiner Endzelle eine bedeutendere Länge (Taf. IV. 26. 27. 28), während die beiden andern ihre Endzelle in eine fadenförmige wurzelartige Röhre, die bald eine braune Farbe annimmt, auswachsen lassen und keine weitere Veränderung erfahren. Nicht selten gewinnt indess auch schon in früheren Perioden ein Strahl die Oberhand und bleiben die beiden andern entweder auf ihrer ersten Entwickelungsstufe stehen (Taf. IV. 30) oder es wachsen, nachdem sie die erste Theilung erfahren haben, ihre Endzellen fadenförmig aus (Taf. IV. 28), oder es entwickeln sich 2 Strahlen gleichmässig, während der dritte auf seiner ersten Entwickelungsstufe verharrt (Taf. IV. 24. 25).

Aeltere Vorkeime von Hymenophyllum-Arten aufzufinden, gelang mir nur in seltnen Fällen.

Bei H. microcarpum stellten dieselben vielfach verzweigte Fäden dar, die häufig durch kräftige Entwickelung ihrer Auszweigungen ein dichotomes Ansehen erhalten hatten, im Uebrigen in allen Eigenthümlichkeiten, vornehmlich den Haarwurzeln, mit den in der Folge genauer beschriebenen Vorkeimen von T. sinuosum übereinstimmten. Bei andern war der stärkere Strahl des Vorkeims durch Längstheilung einzelner oder mehrerer auf einander folgender Zellen in eine schmale bandförmige Zellfläche übergegangen, so z. B. bei H. elegans, oder es fanden sich, wie bei H. pulchellum, zwischen vielfach verzweigten Fäden, die die sichersten Merkmale der Vorkeime von Hymenophyllaceen an sich trugen, langgedehnte bandartige, von 2—5 in der Breite nebeneinanderliegenden Zellen gebildete Ausbreitungen, die nicht selten aus einzelnen Zellen ihres Randes ähnliche bandförmige Ausbreitungen hervor-

Digitized by Google

sprossen liessen; doch konnte hier weder der Zusammenhang derselben mit den confervenartigen Fäden des Vorkeims, noch der der letzteren mit der Spore nachgewiesen werden.

Bei H. Tunbridgense sah ich bei meinen Aussaatversuchen die ersten Stadien des Keimens in der beschriebenen Weise vor sich gehen, oder es theilte sich eine von den 3 zunächst in der Spore entstandenen Zellen in ungewöhnlicher Weise (Taf. IV. 29), ohne dass dadurch in der Fortbildung der 3 Strahlen eine Abweichung herbeigeführt worden wäre (Taf. IV. 31). Nicht selten aber ging alsbald einer von den 3 Strahlen des Vorkeims in eine flächenförmige Ausbreitung über (Taf. IV. 33. 34. 35), so dass alsdann das confervenartige Stadium desselben auf wenige Zellen beschränkt war. An nun 1½ Jahr alten Vorkeimen haben die blattartigen Ausbreitungen eine Länge von ½ Linie bei einer Breite von 1/20 Linie erreicht; sie wachsen durch eine Scheitelzelle, die durch schräge, abwechselnd nach rechts und links geneigte Scheidewände sich theilt.

Bis zur Ausbildung von Fortpflanzungsorganen sind diese Vorkeime noch nicht vorgeschritten; diese wurden auch bei den von andern Arten von Hymenophyllum beobachteten Vorkeimen vermisst, hingegen bei T. sinuosum und der Varietät desselben, die Kaulfuss als T. incisum unterschied, aufgefunden, dagegen sind meine Beobachtungen über die ersten Keimungsstadien der Sporen von Trichomanes-Arten sehr spärlich.

Letztere beschränken sich auf T. reniforme, ampliatum, crispum (Taf. IV. 8. 9. 10), deren Sporen genau wie bei den oben aufgezählten Arten von Hymenophyllum in 3 Zellen getheilt waren, dann auf T. Schmidianum und olivaceum und humile, die sich abweichend verhalten, insofern als zunächst an den in die Verlängerung der 3 Leisten fallenden Stellen der Spore durch tangentiale Scheidewände 3 kleine Segmente von der Oberfläche der Spore abgeschieden werden (Taf IV. 12. 13), die sich dann vergrössern und zu den vielfach verzweigten Fäden des Vorkeims auswachsen (Taf. IV. 15).

Es geben daher auch bei diesen Arten die Sporen dreien Vorkeimfäden den Ursprung, es stossen aber die drei zunächst gebildeten Zellen nicht in der Längsachse der Spore zusammen, wie bei Hymenophyllum, T. reniforme, crispum, ampliatum, sondern sie sind durch den grösseren mittleren unveränderten Theil der Spore von einander geschieden, sie

Digitized by Google

alterniren ferner nicht wie bei diesen mit den 3 Leisten, sondern liegen in der Richtung derselben.

Im Uebrigen findet man neben Sporen, welche gleichzeitig diese 3 Zellen ausgebildet haben, andere, bei welchen nur 2 oder nur eine derselben kenntlich ist, so dass, wenn auch die Dreizahl derselben die normale ist, Verkümmerungen häufiger und in einer früheren Periode als bei den Arten von Hymenophyllum auftreten (Taf. IV. 11. 14).

An den Vorkeimen von T. incisum und sinuosum war indess ein Zusammenhang mit der Spore nicht mehr aufzufinden; die von ersterem wuchsen in einem dichten Rasen und bestanden aus vielfach verzweigten confervenartigen Fäden, die in horizontaler Lage auf der Unterlage oder in der oberflächlichen Schichte derselben hinzogen und mit zahlreichen blattartigen spatel- oder lanzettförmigen Ausbreitungen, die sich an den ersteren in verticaler Richtung erhoben und eine Länge von 2—6 Linien bei einer Breite von ½—1½ Linien erreichten (Taf. V. 1 *a*—*k*; an den Vorkeimen von T. sinuosum herrschten die Fäden bedeutend vor und waren nur wenige blattartige Ausbreitungen von geringeren Dimensionen entwickelt.

Die confervenartigen Fäden dieser Vorkeime besitzen in Folge der andauernden Theilung ihrer Endzelle gewöhnlich ein unbegrenztes Wachsthum, oder sie erhalten doch nur selten dadurch, dass ihre Endzelle in einen fadenförmigen Fortsatz auswächst, einen Abschluss; sie bestehen aus weiten chlorophyllreichen Zellen, deren Wandung eine bedeutende Rigidität besitzt (Taf. V. 2).

Die Auszweigungen dieser Fäden entstehen wie bei einer Cladophora oder den Vorkeimen der Moose aus seitlichen Auswüchsen ihrer einzelnen Zellen unterhalb des vordern Endes derselben und zwar giebt in der Regel eine jede Zelle einem solchen Auswuchs, nur ausnahmsweise zweien den Ursprung. An den auf einander folgenden Zellen der Fäden entspringen diese Auswüchse gewöhnlich unter gleichen Divergenzen; sie werden ferner frühzeitig durch eine Scheidewand von ihrer Mutterzelle abgetrennt, schlagen dann aber bei ihrer weiteren Ausbildung sehr verschiedene Richtungen ein. Ein nicht unbedeutender Theil derselben nimmt das unbegrenzte Wachsthum des Hauptfadens an oder wird wie dieser durch das Auswachsen seiner Endzelle in eine haarartige Bildung abgeschlossen, ein geringerer Theil bildet die blattartigen Ausbreitungen, der grösste Theil entwickelt sich zu

Digitized by Google

Haarwurzeln, der kleinste Theil endlich zu Antheridien oder, wenn ich die an einer andern nicht bestimmbaren Art gemachten Beobachtungen hinzufügen darf, zu Archegonien.

Die blattartigen Ausbreitungen der Vorkeime von T. incisum sind, so weit meine Beobachtungen reichen, stets seitlich an den confervenartigen Faden befestigt (Taf V. 10. 13) und werden gewöhnlich von einem kurzen, auf eine einzige Zelle beschränkten, seltner von einem fadenförmigen mehrzelligen Ast getragen; sie werden stets von einer einzigen Schichte tafelförmiger chlorophyllhaltiger Zellen zusammengesetzt, deren Zahl stufenweise von dem Grund bis gegen die Mitte zunimmt; ihr Ende ist entweder ungetheilt oder in 2 oder mehrere Zipfel zerschlitzt oder es läuft in einen confervenartigen Faden aus, der einer unbegrenzten Fortbildung fähig gewesen sein mag (Taf. V. 1 *a. g*); in der Regel aber scheinen diese blattartigen Ausbreitungen ein begrenztes Wachsthum zu besitzen, ja in vielen Fällen scheint ein solches durch eigenthümliche Sprossungen der endständigen Zellen herbeigeführt zu werden.

Diese Sprossungen nehmen zu 3 oder 4 von den freien Wandungen der einzelnen Zellen am Ende der Vorkeime ihren Ursprung und haben eine lockere Anordnung (Taf. V. 7. 8. 9) oder sie treten in grösserer Zahl und dicht zusammengedrängt auf und verdecken das Ende des Vorkeims vollständig; dieselben entwickeln sich zu übereinstimmend gestalteten gestreckt flaschenförmigen Zellen[1]) von annähernd gleicher Länge und nehmen frühzeitig eine braune Farbe an; ihr Ende erscheint gewöhnlich abgestutzt oder wird in seltenen Fällen von einer kugeligen kleineren oder grösseren Zelle eingenommen (Taf. V. 8. 9), so dass es keinem Zweifel unterliegen kann, dass diese Sprossungen an ihrem Ende Zellen bilden und nach der Abschnürung und Abstossung dieser Zellen unverändert persistiren. Im Uebrigen werden diese Gebilde auf dem Scheitel der spatelförmigen Vorkeime seltner als bei den lanzettförmigen angetroffen und unter diesen wieder am häufigsten bei denjenigen, deren Ende zerschlitzt ist.

1) Die nämlichen Gebilde wurden auch an den blattartigen Ausbreitungen der oben erwähnten Vorkeime von Hymenophyllum pulchellum, dann an den confervenartigen Fäden des Vorkeims von Trichomanes Krausii beobachtet. An den ersteren treten sie in sehr grosser Zahl und zwar dicht zusammengedrängt, an den letzteren zu 3—4 an den einzelnen Zellen in lockerer Anordnung auf.

Digitized by Google

Nur die Randzellen der blattartigen Ausbreitungen haben die Fähigkeit Haarwurzeln und neuen Sprossen den Ursprung zu geben (Taf. V. 10). Letztere nehmen theilweise den confervenartigen Charakter der ursprünglichen Fäden des Vorkeims an und solche werden am Grunde der blattartigen Ausbreitungen niemals vermisst, seltner hingegen bis zur Mitte derselben (Taf. V. 1 *d*) oder oberhalb dieser angetroffen, theilweise bilden sie kleinere blattartige Ausbreitungen. Diese sind eine seltene Erscheinung, treten einzeln oder höchstens zu 2 oder 3 in geringen Entfernungen von einander am Grund der grösseren blattartigen Ausbreitungen auf, bleiben aber stets an Ausdehnung hinter diesen zurück (Taf. V. 1 *c. h*), werden gewöhnlich von einem Auswuchs aus der Mitte einer Randzelle getragen, haben ein begrenztes Wachsthum und geben selbst wieder fadenförmigen Sprossen den Ursprung.

Wie bereits erwähnt, nehmen die Haarwurzeln (Taf. V. 2 *r*) an den Zellen der confervenartigen Vorkeime die nämliche Stelle ein, welche an andern die Zweige inne haben und kommen selten auf der nämlichen Zelle mit einem Zweig zur Ausbildung, sie werden auch wie diese frühzeitig durch eine Scheidewand abgetrennt, unterscheiden sich indess von diesen einmal dadurch, dass niemals in ihnen Scheidewände auftreten, dann durch den Mangel des Chlorophylls, die braune Farbe, welche ihre Membran frühzeitig annimmt, endlich dadurch, dass ihr Ende frühzeitig eine knopfförmige Anschwellung, die mit 3 oder 4 Ausweitungen versehen ist, bildet (Taf. V. 3. 4). An der Mehrzahl der beobachteten Vorkeime hatten die Haarwurzeln dieses Stadium der Ausbildung nicht überschritten und nur in wenigen Fällen, und zwar seltner an den Vorkeimen von T. incisum, häufiger bei T. sinuosum, waren die Ausweitungen ihrer Endesanschwellungen in Fäden ausgewachsen (Taf. V. 5).

An dem Grund der blattförmigen Ausbreitungen der Vorkeime wächst ein Theil der Randzellen auf der seitlichen freien Wandung in Haarwurzeln von der beschriebenen Beschaffenheit aus; nicht selten entspriessen auch einer Randzelle zwei solcher Haarwurzeln oder gleichzeitig mit einer solchen ein fadenförmiger Zweig. An der Mehrzahl der Exemplare von T. incisum blieb auch die Mehrzahl dieser Haarwurzeln auf dieser ersten Anlage unverändert stehen, doch war immerhin häufiger als an den confervenartigen Fäden Gelegenheit gegeben, ihr Auswachsen in 3 oder 4 Arme zu beobachten oder es hatte sich zunächst

Digitized by Google

ihr sonst kurzer Stiel zu einer cylindrischen Röhre erweitert und waren an dem Ende von dieser 3 oder 4 kürzere oder längere Fäden entwickelt worden (Taf. V. 6).

Antheridien wurden an den Vorkeimen von T. sinuosum und zwar sowohl an den confervenartigen Fäden als an den blattartigen Ausbreitungen derselben aufgefunden. An den ersteren (Taf. V. 14) traten dieselben einzeln, gewöhnlich an der nämlichen Stelle, die sonst ein Zweig oder eine Haarwurzel einnimmt, seltner neben einer Haarwurzel auf; von den blattartigen Ausbreitungen trugen die kleineren, welche dem Grund der grösseren entsprossen waren, an ihren seitlichen Rändern 3—8 Antheridien, meist dicht an einander gedrängt, seltner durch fadenartige Zweige oder Archegonien getrennt (Taf. V. 13*a*).

Die Antheridien werden von einem kurzen Stiel getragen und stellen eine annähernd kugelförmige Anschwellung dar; ihre Wandung schien zuweilen von einer Lage tafelförmiger Zellen gebildet zu werden; ihr Inhalt besteht aus kleinen Zellchen, welche, so weit die Beobachtungen am getrockneten Material Aufschluss geben können, Bildungen enthalten, die mit den Samenfäden verwandter Cryptogamen übereinstimmen (Taf. V. 15).

Archegonien wurden weder bei T. incisum noch bei T. sinuosum an den confervenartigen Fäden des Vorkeims aufgefunden, wohl aber an den blattartigen Ausbreitungen derselben und zwar sowohl an dem Grunde der grösseren, als in der ganzen Ausdehnung der kleineren; sie treten an beiden nur ausnahmsweise in Gesellschaft der Antheridien (Taf. V. 13) oder in geringer Entfernung von denselben auf, stehen gewöhnlich zu 4 oder 5 auf den Rändern der blattartigen Ausbreitungen (Taf. V. 11), die in der Ausdehnung ihrer Insertion in ein Polster von 2—3 Zelllagen umgewandelt sind, während das zwischen diesen Rändern liegende Gewebe, wie an sterilen Vorkeimen, nur aus einer einzigen Zellschichte besteht (Taf. V. 12).

Das Keimbläschen der Archegonien ist stets in das Polster eingesenkt; ihr vorragender stylusartiger Fortsatz ist kurz cylindrisch, besteht, wie bei andern Farnen, aus 4 Zellreihen, von welchen eine jede aus 2—3 über einander stehenden Zellen gebildet wird, deren Verhalten indess, ebenso wie das der das Archegonium umgebenden Zellen an dem getrockneten Material trotz grosser Mühe nicht mit ausreichender Genauigkeit ermittelt werden konnte. An jüngeren Archegonien

Digitized by Google

zeigten die 4 Scheitelzellen das nämliche Gepräge, welches sie bei andern Farnen kennzeichnet, an älteren waren dieselben aus einander gewichen und in verschiedenem Grad zerstört.

Ueber die Entwickelung des Keimbläschens zu der beblätterten Pflanze konnten an dem getrockneten Material keine Beobachtungen angestellt werden; daher nur die Bemerkung, dass ungefähr das 5te Blatt der Keimpflanze die den Blättern der ausgebildeten Pflanze zukommende Theilung erreicht.

Unter den Vorkeimen, die ich von verschiedenen andern Arten von Trichomanes auffand, waren an den confervenartigen Fäden von T. membranaceum, und einer andern Art, von der ich unentschieden lassen muss, ob sie einem Hymenophyllum oder einem Trichomanes angehörten, Archegonien ausgebildet. Bei der letzteren (Taf. V. 16) war die Mitte der Zellen der confervenartigen Vorkeimsfäden in einen kurzen Fortsatz ausgewachsen und auf diesem war eine Gewebsmasse kleinerer Zellen befestigt, die sich in 2 Arme theilte, von welchen der eine unzweifelhaft ein Archegonium darstellte.

Von T. trichoideum, speciosum, olivaceum, humile, Endlicherianum wurden ferner sterile Vorkeime in dem ersten confervenartigen Stadium beobachtet; sie stimmten in ihrer Theilung völlig mit den von Hymenophyllum microcarpum überein; mit den blattartigen Ausbreitungen versehene Vorkeime wurden nur bei T. Ankersii aufgefunden; sie waren unregelmässig in Lappen von verschiedener Grösse getheilt, waren noch an den confervenartigen Fäden befestigt und trugen an ihrem Rand Haarwurzeln, wie bei T. sinuosum.

Ueber das Keimen der Sporen von Loxsoma konnten keine Beobachtungen angestellt werden.

War es auch nicht möglich, die vollständige Entwickelung irgend einer Art von Hymenophyllum oder Trichomanes von der Spore an bis zur Ausbildung der beblätterten Pflanze zu verfolgen, so geht doch aus der naturgemässen Verbindung der bei verschiedenen Arten beobachteten Entwickelungsstadien hervor, dass der Vorkeim der Hymenophyllaceae mit dem der Farne in weitestem Sinne in dem wesentlichsten Punkt, in so fern er die Archegonien hervorbringt, übereinstimmt und von den Moosen abweicht, bei welchen der Vorkeim der beblätterten Pflanze den Ursprung giebt, die dann die Fortpflanzungsorgane entwickelt; aber ebenso geht auch aus den mitgetheilten Beobachtungen

Digitized by Google

hervor, dass in untergeordneten Punkten, wie z. B. der Gestalt der Vorkeime, die Hymenophyllaceae von andern Farnen und zwar in dem nämlichen Maass sich entfernen, als sie in denselben an die Laubmoose und unter diesen ganz in's besondere an die Sphagnaceae sich annähern.

Verweilen wir einen Augenblick bei diesen Beziehungen, so ergiebt sich, dass, während bei den Polypodiaceis die Spore zunächst in einen einzigen meist kurzen Zellfaden auswächst, dessen Ende gewöhnlich rasch in eine Zellfläche sich ausbreitet, die in der Regel eine verkehrt herzförmige Gestalt annimmt und nur in seltenen, zum Theil noch einer genaueren Darlegung bedürfenden Fällen randständige Sprosse[1]) entwickelt, bei den Hymenophyllaceis die Spore zunächst 3 gleichwerthigen Zellen den Ursprung giebt,[2]) von welchen eine jede in einen Faden sich fortzubilden im Stande ist, dass alsdann gewöhnlich 2 von diesen Zellen oder Fäden verkümmern, während die dritte einen vielfach verzweigten confervenartigen Faden bildet,

1) Man vergl. Wigand bot. Zeit. 1849, 113; bot. Unters. 41, 42; Hofmeister, vergl. Unt. 83; Stange nach Braun Polyembryonie 143.

2) Es ist aber nicht allein in der Zahl der Vorkeime, welche einer Spore entspriessen, ein Unterschied zwischen den Hymenophyllaceis und Polypodiaceis oder andern Farnen, deren Entwickelung uns bekannt ist, sondern eine vielleicht gewichtigere Verschiedenheit ist in dem Punkt der Spore, welche der Vorkeim durchbricht, ausgesprochen.

Bei den Polypodiaceis nämlich nimmt der Vorkeim den Scheitel der Spore ein, d. h. bei kugeligen Sporen, die auf der dem Centrum ihrer Mutterzelle zugekehrten Hälfte zu einer dreiseitigen Pyramide abgeflacht sind, den Scheitel der letzteren da, wo die 3 die Kanten der Pyramide einnehmenden Leisten zusammenstossen, bei kugelquadrantischen Sporen hingegen, die an der der Achse der Mutterzelle zugekehrten Kante mit einer Längsleiste versehen sind, die Mitte der letzteren. Bei den Hymenophylleen giebt, wie aus den mitgetheilten Beobachtungen hervorging, niemals der Scheitel der Spore einem der Vorkeime den Ursprung.

Dabei kann ich nicht unterlassen, auf die Lücke unserer Kenntnisse über die Keimung derjenigen Farne aufmerksam zu machen, bei welchen der Vorkeim eine mehrzellige Ausbildung innerhalb der Sporenzelle erreicht, bevor er dieselbe durchbricht; weder die Anordnung seiner ersten Zellen, noch sein späteres Verhalten ist hier hinlänglich bekannt.

Ebenso können erst zukünftige Beobachtungen entscheiden, ob die Verschiedenheiten, die bei den Hymenophyllaceen in Bezug auf die erste Theilung der Sporenzelle zwischen Hymenophyllum und einigen Arten von Trichomanes auf der einen Seite, Trichomanes Schmidianum u. a. auf der andern Seite beobachtet wurden, für einzelne Abtheilungen der Gattung Trichomanes charakteristisch sind.

Digitized by Google

dessen Zweige theilweise zu einer unbegrenzten Fortbildung befähigt sind, theilweise zu blattförmigen Ausbreitungen von spatel- oder lanzettförmiger Gestalt auswachsen, aus deren Randzellen wiederum sowohl confervenartige Fäden als auch kleinere blattartige Ausbreitungen hervorgehen, dass mithin bei den Hymenophyllaceis die beiden Stadien des Vorkeims, welche bei den Polypodiaceis ohne Grenze in einander übergehen, gewöhnlich schärfer geschieden sind und dem confervenartigen Stadium derselben gewöhnlich eine grössere Ausdehnung zukomme, und endlich dass der Vorkeim aus dem zweiten blattartigen Stadium durch normale Sprossungen in das confervenartige zurückkehre, Verhältnisse, die es ausser Zweifel setzen, dass der Vorkeim der Hymenophyllaceae wie bei Laubmoosen zu perenniren im Stande sei.

Eine weitere Verschiedenheit bieten die Haarwurzeln der Vorkeime von Hymenophyllaceis und Polypodiaceis. Dieselben entspringen an den blattartigen Ausbreitungen der ersteren nur an den Zellen des Randes, bei den letzteren hingegen vorzugsweise auf der unteren Fläche.

Nicht minder verschieden ist die Anordnung der Fortpflanzungsorgane. Bei den Polypodiaceis sind diese auf der untern Seite des Vorkeims der Art vertheilt, dass die Antheridien den aus einer einzigen Zelllage bestehenden Anfang des Vorkeims, die Archegonien hingegen ein mehrschichtiges Polster in der Mittellinie des Vorkeims in der Nähe seines Einschnitts einnehmen; bei den Hymenophyllaceis dagegen werden beiderlei Fortpflanzungsorgane entweder an dem confervenartigen Faden des Vorkeims oder den polsterförmig angeschwollnen Rändern der blattartigen Ausbreitungen, ähnlich wie die Antheridien auf den Vorkeimen der Equisetaceae[1]) entwickelt.

In mehreren dieser Punkte nun, in welchen die Hymenophyllaceae von den Polypodiaceis abweichen, findet eine auffallende Uebereinstimmung der ersteren mit den Bryaceis, deren Keimungsgeschichte lange Zeit auf alle Laubmoose übertragen wurde, in der nämlichen Weise, als man allen Abtheilungen der Farne die bei den Polypodiaceis beobachtete Keimung zuschrieb und ganz in's besondere den Sphagnaceis[2]) statt,

1) Vergl. Hofmeister vergl. Unters. 100.

2) Vergl. Hofmeister Ber. d. K. Gesellsch. d. Wissensch. 1854. 100; Schimper Naturg. d. Sphagnac. 12 u. f.

Digitized by Google

der einzigen der kleineren durch gewichtigere Merkmale ausgezeichneten Abtheilung der Laubmoose,[1]) deren Keimung bekannt ist.

Wie aus den Untersuchungen Hedwig's und Schimper's bekannt ist, wachsen bei Bryaceis und Sphagnaceis die Sporen entweder in einen oder mehrere confervenartige Fäden aus und ist in letzterem Fall die Zahl dieser Fäden keine constante, und erfolgt ihre Entstehung nicht simultan, sondern successive; bei den Hymenophyllaceis hingegen ist die Dreizahl der der Spore entspriessenden Fäden in den ersten Theilungen der Sporenzelle begründet und Abweichungen von dieser Zahl werden nur durch Verkümmerung eines oder zweier dieser gleichzeitig oder fast gleichzeitig angelegten Fäden herbeigeführt.

In den nächsten Entwickelungsstadien findet alsdann in dem Wachsthum, der Verzweigung und der Structur eine volle Uebereinstimmung zwischen den confervenartigen Fäden der Vorkeime der Hymenophyllaceae und der Laubmoose statt und ebenso kehren die Verschiedenheiten, welche zwischen Bryaceis und Sphagnaceis bei dem Keimen der letzteren unter verschiedenen Umständen hervortreten, bei den Hymenophyllaceis in übereinstimmender Weise wieder. So überschreitet der Vorkeim der letzteren, wenn er an seinen confervenartigen Fäden die Fortpflanzungsorgane ausbildet, nicht die Stufe, die der Vorkeim der Bryaceae gewöhnlich und der der Sphagnaceae, dann, wenn ihre Sporen unter Wasser keimen, erreichen in dem Stadium, in welchem an den Enden oder Zweigen ihrer Fäden der beblätterte Stamm entsteht; in der Mehrzahl der Fälle aber entwickeln die Vorkeime der Hymenophyllaceae, gleich den Sphagnaceis, wenn sie auf Erde keimen, an den confervenartigen Fäden ihrer Vorkeime blattartige Ausbreitungen, die bei beiden aus einer Zellschichte bestehen, bei beiden in gleichem Maass und in gleicher Weise zu sprossen und vermittelst dieser Sprosse auf das erste confervenartige Stadium zurückzukehren befähigt sind und ist die Uebereinstimmung beider eine so grosse, dass, abgesehen davon, dass diese blattartigen Ausbreitungen bei den Hymenophyllaceis den Geschlechtsorganen, bei den Sphagnaceis der beblätterten Pflanze den Ursprung geben, nur in den Haarwurzeln beider eine Verschiedenheit

1) Weder von einem Leucobryum, noch von einer Andreaea ist die Keimung bekannt; ebenso liegen keine hinreichenden Beobachtungen über die der Gleicheniaceae, Schizaeaceae, Osmundaceae, Marattiaceae vor.

Digitized by Google

gefunden werden kann. Diese bestehen nämlich bei den Hymenophyllaceis aus einer unseptirten Zelle, bei den Sphagnaceis, wie bei den Bryaceis überhaupt, aus einer Reihe von Zellen, die durch schräge Scheidewände getrennt sind. Im Uebrigen entspringen diese Haarwurzeln bei Hymenophyllaceis und Sphagnaceis[1]) nur am Rand der blattartigen Ausbreitungen.

Es erübrigt noch der Zellen zu gedenken, welche an den Enden der flächenförmigen Ausbreitungen der Vorkeime der Hymenophyllaceae zur Ausbildung kommen und, wie es scheint, stets einer weiteren Entwickelung derselben ein Ziel setzen. Die übereinstimmende Gestalt und Grösse, welche diese Zellen erreichen, macht schon an und für sich unwahrscheinlich, dass dieselben den Haarwurzeln zuzuzählen seien, die sonst hie und da einzelne Zweiglein der confervenartigen Fäden des Vorkeims begrenzen; die wenn auch seltne Wahrnehmung, dass kugelige Zellen auf dem Ende dieser Zellen befestigt waren, dient vielmehr der Ansicht zur Stütze, dass hier eine Abschnürung von Zellen stattfinde. Ein solcher Vorgang ist freilich ohne Analogon bei den Vorkeimen der Farne und Moose nach dem dermaligen Stand unserer Kenntnisse und erhält nur in den Keimkörnern, welche von den Blättern mehrerer Lebermoose z. B. Calypogeia Trichomanes u. a. gebildet werden, ein Seitenstück.

Wenn ich schliesslich die Frage berühre, ob die Hymenophyllaceae nach der Ansicht von Van den Bosch[2]) als Bryopterides eine zwischen Farnen und Moosen stehende Ordnung bilden, deren Werth der Gesammtheit der übrigen Farne, der Polypodiaceae sammt Cyatheaceae, Gleicheniaceae, Schizaeaceae, Osmundaceae, Marattiaceae und Ophioglosseae gleichzustellen sei, so wird man auf der einen Seite, wenn man festhält, dass durch die mitgetheilten Untersuchungen die Grenzlinie zwischen Moosen und Farnen nicht verrückt, sondern von neuem bestätigt worden ist, zumal aber wenn man die Uebereinstimmung der Gefässbündel, der Sporangien u. s. w. der Hymenophyllaceae und Farne erwägt und in der Gattung Loxsoma eine beide innig verbindende Uebergangsbildung erblickt, sich nicht versucht fühlen können, die Hymenophyllaceae von den Farnen zu sondern, auf der andern Seite

1) Vergl. Hofmeister l. c. 100.
2) Einl. 9; Bijd. l. c. 323.

Digitized by Google

kann der Ansicht Van den Bosch's insofern nachgegeben werden, als es vielfacher Eigenthümlichkeiten von Hymenophyllum und Trichomanes wegen naturgemäss erscheint, die Hymenophyllaceae aus ihrer bisherigen Stellung zwischen Cyatheaceis und Gleicheniaceis zu entfernen und ihnen den Vortritt vor den Polypodiaceis und damit die niederste Stufe unter den Farnen zuzugestehen, an welcher Stelle sie alsdann nach abwärts an die Moose, mit welchen sie gewöhnlich in dem einschichtigen Blattparenchym und zwar zunächst an die Sphagnaceae, mit welchen sie in der Ausbildung und noch mehr in der Mannigfaltigkeit der Ausbildung ihrer Vorkeime übereinstimmen, angrenzen und gleichzeitig von den Ophioglosseae, die in dieser Beziehung die grösste Verschiedenheit zeigen, am weitesten entfernt sind.

Digitized by Google

Erklärung der Abbildungen.

Taf. I.

1. Sklerenchymzellen, die sich in Deckzellen abgetheilt haben, von T. sinuosum aus dem die Schenkel des fruchttragenden Nerven bedeckenden Gewebe.
2. 3. Desgleichen aus dem Blattstiel von T. Smithii.
4 *a—c*. Desgl. aus der Schleierröhre von T. davallioides.
5. Deckzellen nebst ihren Verdickungen von T. Javanicum.
6 *a—c*. Desgl. von T. pinnatum.
7 *c*. Desgl. von T. venustum.
8. 9. Desgl. von T. Javanicum.

10—15. T. membranaceum.

10. Durchschnitt durch den innern Theil des Blattes.
11. Desgl. durch den äusseren Theil des Blattes.
12. 13. 14. Deckzellen aus dem Blatt.
15. Deckzellen aus dem Rhizom.

16—18. T. Singaporianum.

16. Ein Scheinnerv mit den umgebenden Zellen von der Fläche.
17. 18. Durchschnitt der Scheinnerven.

19—21. T. Ankersii.

19. Scheinnerv mit den umgebenden Zellen von der Fläche.
20. Durchschnitt durch denselben.
21. Dieselbe isolirt.

22—23. T. album.

22. Durchschnitt durch die Mitte eines Blattzipfels, *f* die Stelle, an der die Mittelrippe sich befindet.
23. Durchschnitt durch den Blattrand.

24—27. T. diversifrons.

24. Durchschnitt durch die Blattfläche.
25. Scheinnerven mit den umgebenden Zellen von der Fläche aus.
26. Durchschnitt durch einen Scheinnerven.
27 *a*. Durchschnitt durch ein Blatt mit amphimorphen Zellen.
b. Ein Fragment des letzteren von der Fläche.

28—29. T. humile.

28. Der Rand eines Blattzipfels.
29. Derselbe im Durchschnitt.

Digitized by Google

30. Der Rand eines Zipfels von T. Endlicherianum.
31. Desgl. von T. Vieillardii.
32. Durchschnitt durch einen Zipfel von H. Malingii; an der Stelle von *f* liegt der Gefässbündel.

Taf. II.

Parenchymzellen von:

1. 2. T. pyxidiferum.
3. 4. T. Millefolium.
5—8. T. Arbuscula.
9—13. T. Saxifragoides.
14—16. T. crispum.
17. T. Borbonicum.
18. T. Hookeri.
19. T. melanotrichum.
20—24. H. flabellatum.
25. H. fuciforme.
26. H. demissum.
27—28. T. concinnum.
29—34. H. cruentum.
35—37. T. trigonum.
38—40. T. Filicula.
41—43. T. venustum.
44. T. auriculatum.

Taf. III.

Parenchymzellen von:

1—4. H. caudiculatum.
5. T. caudatum.
6—8. H. fuciforme.
9—10. H. abruptum.
11—15. H. brachyglossum.
16—20. H. Neesii.
21. H. holochilum.
21 *b*. Seitenwand einer Zelle von H. ciliatum.
22—23. T. spicatum.
24—31. T. rigidum.
32—33. T. compressum.
34—37. T. Javanicum.
38—43. T. elongatum.
44—47. T. obscurum; (T. papillatum.)
48. T. flavofuscum.
49—50. T. Milnei.

Taf. IV.

Trichomanes elegans Rich.

1. Durchschnitt der Hälfte eines Zipfels von einem jugendlichen Exemplar.
2—4. Desgl. von älteren Exemplaren. *s* Durchschnittne Scheinnerven, resp. Deckzellen.
5. Hymenophyllum Tunbridgense. Columella mit den Paraphysen *p* an ihrem Grunde; *s* die untersten Sporangien.
6. Isolirte Paraphysen stärker vergrössert.
7. Paraphysen von H. Smithii.
8. Keimende Sporen von T. reniforme.
9—10. Desgl. von T. ampliatum.
11—15. Desgl. von T. Schmidianum.

Digitized by Google

16—17. Keimende Sporen von H. brevifrons.
18. 20. 22. 23. Desgl. von H. polyanthos.
19. Desgl. von H. bivalve.
21. Desgl. von H. Tunbridgense, nach getrockneten Exemplaren vom Cap der guten Hoffnung.
24. 25. Desgl. von H. infortunatum.
26. 27. Desgl. von H. repandum.
28. Desgl. von H. fuciforme.
29—35. Desgl. von H. Tunbridgense; aus künstlich ausgesäeten Sporen aufgegangene Keimlinge.

Taf. V.

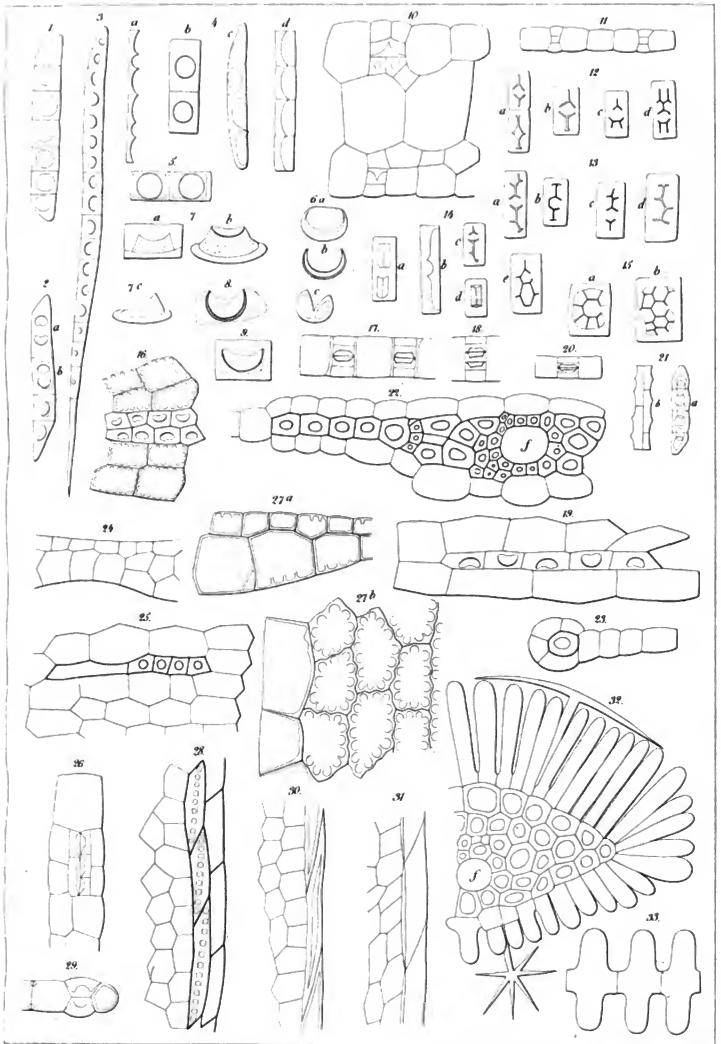
1—12. T. sinuosum var. (T. incisum Klf.)

1 *a*—*k*. Vorkeime, ungefähr 2mal vergrössert.
2. Ein confervenartiger Faden derselben, stärker vergrössert.
3—6. Die Haarwurzeln in verschiedenen Entwickelungsstadien.
7—9. Die Abschnürung der Keimzellen am Ende der Vorkeime.
10. Die Verbindung der blattartigen Ausbreitungen des Vorkeims mit den confervenartigen Fäden desselben.
11. Eine kleine blattförmige Ausbreitung mit Archegonien.
12. Der eine Rand derselben nebst den Archegonien im Durchschnitt.

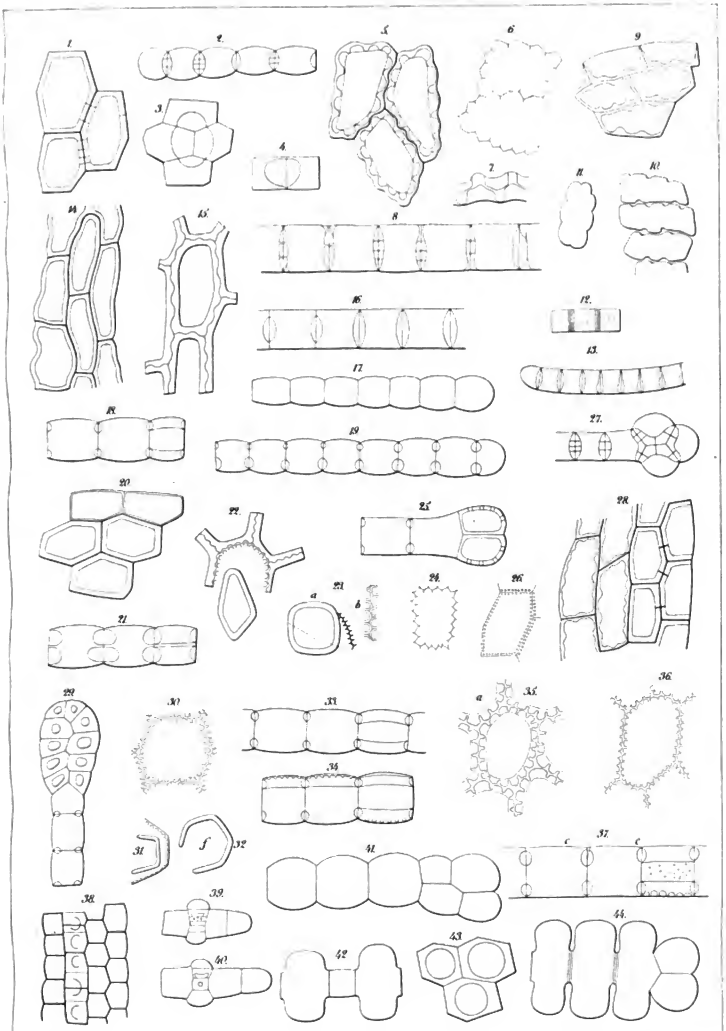
13—15. T. sinuosum.

13. Eine blattartige Ausbreitung des Vorkeims mit Archegonien und Antheridien.
14. Ein verzweigter confervenartiger Vorkeim mit einem Antheridium.
15. Inhalt des letzteren.
16. Archegonien an den confervenartigen Fäden des Vorkeims einer unbestimmbaren Art.

Digitized by Google



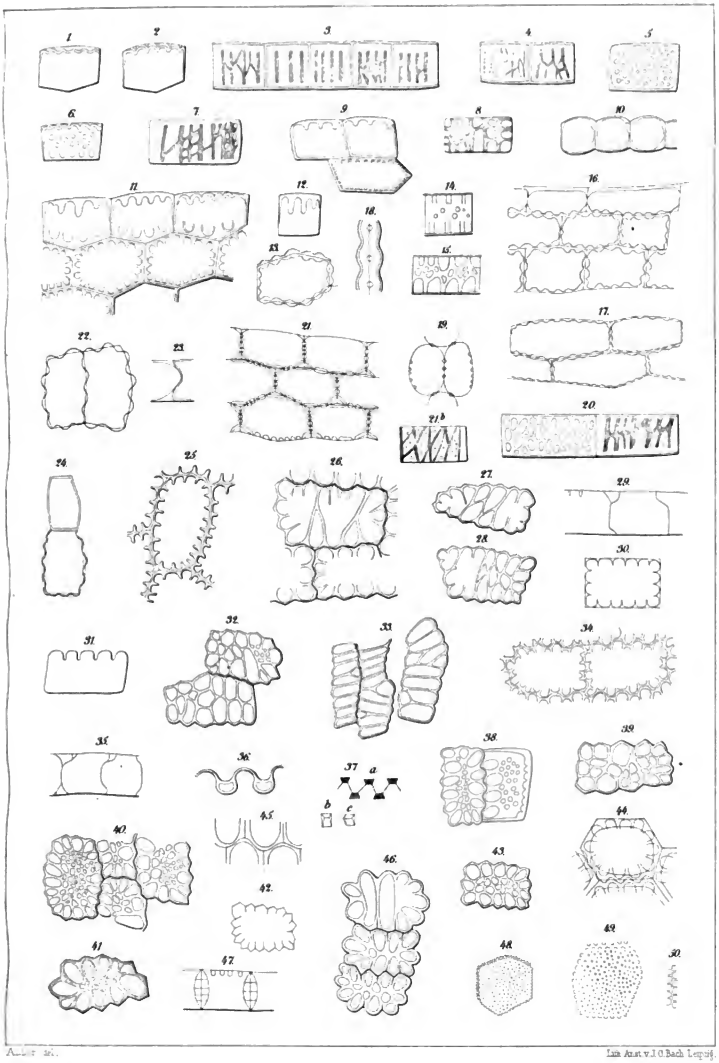
Digitized by Google



Autor del.

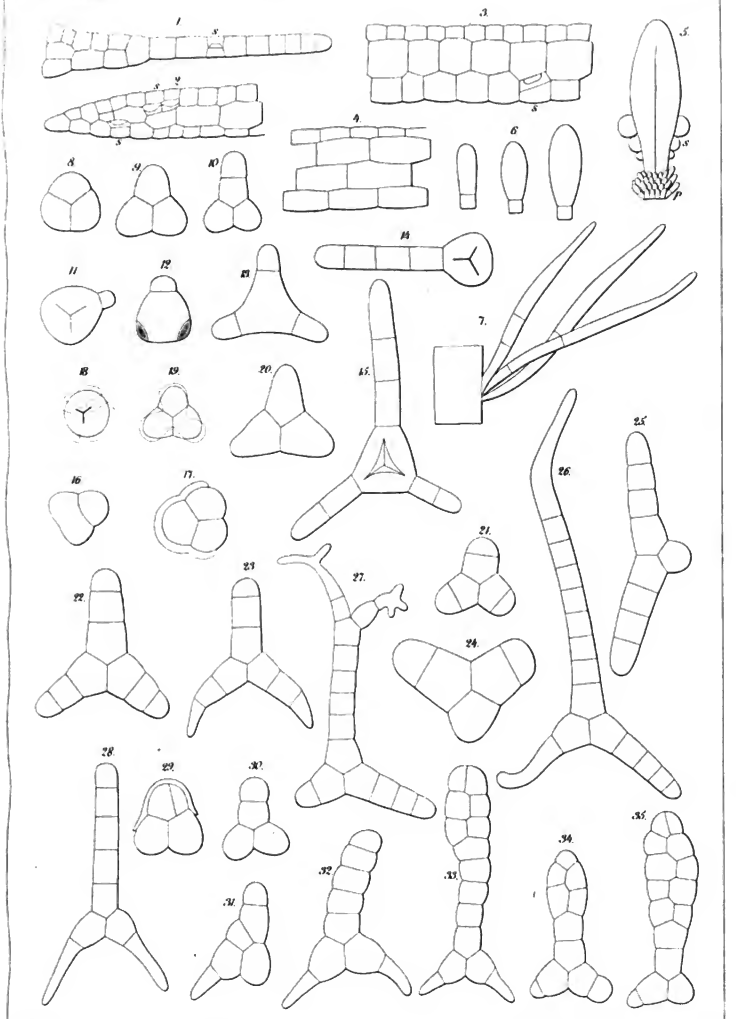
Lith. Anst. v. J. G. Bach, Leipzig.

Digitized by Google

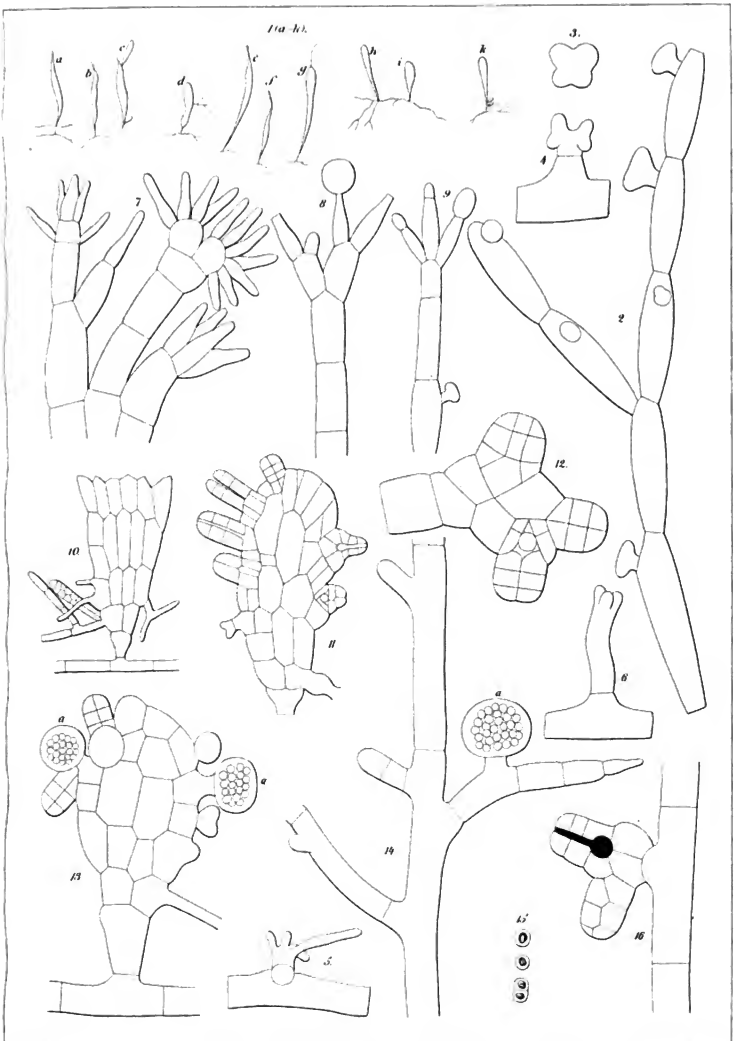


Lith. Anst. v. J. G. Bach Leipzig.

Digitized by Google



Digitized by Google



Digitized by Google

H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 24 Ngr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Erste Abhandlung: über die Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 2 Thlr.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. No. II. Mit 13 Tafeln. 1857. 1 Thlr. 10 Ngr.

SECHSTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Vierter Band. Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. Preis 7 Thlr. 15 Ngr.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Zweite Abhandlung. 1857. 1 Thlr. 10 Ngr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung: über die thermoelektrischen Eigenschaften des Boracites. 1857. 24 Ngr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Dritte Abhandlung: über Elektricitätserregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen. 1858. 16 Ngr.

P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Tafeln. 1858. 2 Thlr.

G. T. FECHNER, Über ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 20 Ngr.

W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Dikotyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zellentheilung wachsendem Endosperm. Mit 27 Tafeln. 1859. 2 Thlr. 20 Ngr.

SIEBENTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Fünfter Band. Mit 30 Tafeln. hoch 4. 1861. Preis 8 Thlr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung: über das Verhalten der Weingeistflamme in elektrischer Beziehung. 1859. 20 Ngr.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Dritte Abhandlung. 1859. 2 Thlr. 12 Ngr.

G. T. FECHNER, Über einige Verhältnisse des binocularen Sehens. 1860. 1 Thlr. 26 Ngr.

G. METTENIUS, Zwei Abhandlungen: I. Beiträge zur Anatomie der Cycadeen. Mit 5 Tafeln. II. Über Seitenknospen bei Farnen. 1860. 1 Thlr.

W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Tafeln. 1861. 2 Thlr. 20 Ngr.

ACHTER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Dritter Band. Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1861. Preis 8 Thlr.

H. C. VON DER GABELENTZ, die Melanesischen Sprachen nach ihrem grammatischen Bau und ihrer Verwandtschaft unter sich und mit den Malaiisch-Polynesischen Sprachen. 1860. 2 Thlr. 20 Ngr.

G. FLÜGEL, die Classen der Hanefitischen Rechtsgelehrten. 1860. 24 Ngr.

JOH. GUST. DROYSEN, das Stralendorffische Gutachten. 1860. 24 Ngr.

H. C. VON DER GABELENTZ, über das Passivum. Eine sprachvergleichende Abhandlung. 1860. 28 Ngr.

TH. MOMMSEN, die Chronik des Cassiodorus Senator v. J. 519 n. Chr. 1861. 1 Thlr. 10 Ngr.

OTTO JAHN, über Darstellungen griechischer Dichter auf Vasenbildern. Mit 8 Tafeln. 1861. 2 Thlr.

NEUNTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Sechster Band. Mit 10 Tafeln. hoch 4. 1864. Preis 6 Thlr. 12 Ngr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfte Abhandlung. Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Erster Theil. 1861. 16 Ngr.

W. G. HANKEL, Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. 1862. 12 Ngr.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Erste Abhandlung. 1862. 3 Thlr.

G. METTENIUS, über den Bau von Angiopteris. Mit 10 Tafeln. 1863. 1 Thlr. 14 Ngr.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. 1864. 1 Thlr.

ZEHNTER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Vierter Band.

Hiervon ist bis jetzt erschienen:

J. OVERBECK, Beiträge zur Erkenntniss und Kritik der Zeusreligion. 1861. 28 Ngr.

G. HARTENSTEIN, Locke's Lehre von der menschlichen Erkenntniss in Vergleichung mit Leibnitz's Kritik derselben dargestellt. 1861. 1 Thlr. 10 Ngr.

WILHELM ROSCHER, Die deutsche Nationalökonomik an der Gränzscheide des sechzehnten und siebzehnten Jahrhunderts. 1862. 20 Ngr.

JOH. GUST. DROYSEN, Die Schlacht von Warschau 1656. 1863. 1 Thlr. 14 Ngr.

ELFTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Siebenter Band.

Hiervon ist bis jetzt erschienen:

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Zweite Abhandlung. 1864. 3 Thlr.

G. METTENIUS, Ueber die Hymenophyllaceae. Mit 5 Tafeln. 1864. 1 Thlr. 6 Ngr.

Leipzig, September 1864. **S. Hirzel.**

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

KLEINERE ABHANDLUNGEN.

BERICHTE über die Verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Erster Band. Aus den Jahren 1846 und 1847. Mit Kupfern. gr. 8. 12 Hefte.

—— Zweiter Band. Aus dem Jahre 1848. Mit Kupfern. gr. 8. 6 Hefte.

Vom Jahre 1849 an sind die Berichte der beiden Classen getrennt erschienen.

—— Mathematisch-physische Classe. 1849 (3) 1850 (3) 1851 (2) 1852 (2) 1853 (3) 1854 (3) 1855 (2) 1856 (2) 1857 (3) 1858 (3) 1859 (4) 1860 (3) 1861 (2) 1862 (1) 1863 (2).

—— Philologisch-historische Classe. 1849 (5) 1850 (4) 1851 (5) 1852 (4) 1853 (5) 1854 (6) 1855 (4) 1856 (4) 1857 (2) 1858 (2) 1859 (4) 1860 (4) 1861 (4) 1862 (1) 1863 (3) 1864, 1.

Jedes Heft der Berichte ist einzeln zu dem Preise von 10 Ngr. zu haben.

Aus den Berichten besonders abgedruckt:

Das Edict Diocletians de pretiis rerum venalium. Herausgegeben von *Th. Mommsen*. Mit Nachträgen. 1852. 14 Ngr.

M. Valerius Probus de notis antiquis. Herausgegeben von *Th. Mommsen*. 1853. 10 Ngr.

W. ROSCHER, ein nationalökonomisches Hauptprincip der Forstwissenschaft. 1854. 6 Ngr.

SCHRIFTEN

DER FÜRSTLICH-JABLONOWSKISCHEN GESELLSCHAFT

ZU LEIPZIG.

ABHANDLUNGEN bei Begründung der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtsfeier Leibnizens herausgegeben von der Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft. Mit dem Bildnisse von Leibniz in Medaillon und zahlreichen Holzschnitten und Kupfertafeln. 61 Bogen in hoch 4. 1846. broch. Preis 5 Thlr.

PREISSCHRIFTEN gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft.

1. H. GRASSMANN, Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Characteristik. Mit einer erläuternden Abhandlung von *A. F. Möbius*. hoch 4. 1847. 20 Ngr.
2. H. B. GEINITZ, das Quadergebirge oder die Kreideformation in Sachsen, mit Berücksichtigung der glaukonitreichen Schichten. Mit 1 color. Tafel. hoch 4. 1850. 16 Ngr.
3. J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die Mondfinsternisse des Almagest. hoch 4. 1851. 10 Ngr.
4. J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die wichtigeren Finsternisse, welche von den Schriftstellern des classischen Alterthums erwähnt werden. hoch 4. 1853. 20 Ngr.
5. H. B. GEINITZ, Darstellung der Flora des Hainichen-Ebersdorfer und des Flöhaer Kohlenbassins. hoch 4. Mit 14 Kupfertafeln in gr. Folio. 1854. 8 Thlr.
6. TH. HIRSCH, Danzigs Handels- und Gewerbsgeschichte unter der Herrschaft des deutschen Ordens. hoch 4. 1858. 2 Thlr. 20 Ngr.
7. H. WISKEMANN, die antike Landwirthschaft und das von Thünensche Gesetz, aus den alten Schriftstellern dargelegt. 1859. 24 Ngr.
8. K. WERNER, Urkundliche Geschichte der Iglauer Tuchmacher-Zunft. 1861. 1 Thlr.
9. V. BÖHMERT, Beiträge zur Geschichte des Zunftwesens. 1862. 1 Thlr. 10 Ngr.
10. H. WISKEMANN, Darstellung der in Deutschland zur Zeit der Reformation herrschenden nationalökonomischen Ansichten. 1862. 1 Thlr. 10 Ngr.
11. E. L. ETIENNE LASPEYRES, Geschichte der volkswirthschaftlichen Anschauungen der Niederländer und ihrer Litteratur zur Zeit der Republik. 1863. 2 Thlr. 20 Ngr.

CHR. AD. PESCHECK, die Böhmischen Exulanten in Sachsen. hoch 4. 1857. 1 Thlr. 10 Ngr.

Leipzig.

S. Hirzel.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

Digitized by Google

11914[illegible]07

P. A. HANSEN
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

RELATIONEN

EINESTHEILS

ZWISCHEN SUMMEN UND DIFFERENZEN

UND ANDERNTHEILS

ZWISCHEN INTEGRALEN UND DIFFERENTIALEN.

Des VII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° III.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1865.

Digitized by Google

ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

ERSTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Erster Band. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. broch. Preis 4 Thlr. 16 Ngr.

A. F. MÖBIUS, über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. 24 Ngr.

P. A. HANSEN, allgemeine Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. 12 Ngr.

A. SEEBECK, über die Querschwingungen elastischer Stäbe. 10 Ngr.

C. F. NAUMANN, über die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. 10 Ngr.

W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 1 Thlr.

F. REICH, neue Versuche mit der Drehwange. 20 Ngr.

M. W. DROBISCH, Zusätze zum florentiner Problem. 16 Ngr.

W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus.) 20 Ngr.

ZWEITER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Erster Band. Mit einer Karte. hoch 4. 1850. broch. Preis 6 Thlr.

A. WESTERMANN, Untersuchungen über die in die attischen Redner eingelegten Urkunden. 2 Abhandlungen. 1 Thlr.

F. A. UBERT, über Dämonen, Heroen und Genien. 24 Ngr.

TH. MOMMSEN, über das römische Münzwesen. 1 Thlr. 20 Ngr.

E. v. WIETERSHEIM, der Feldzug des Germanicus an der Weser. 1 Thlr.

G. HARTENSTEIN, Darstellung der Rechtsphilosophie des Hugo Grotius. 20 Ngr.

TH. MOMMSEN, über den Chronographen vom Jahre 354. Mit einem Anhange über die Quellen der Chronik des Hieronymus. 1 Thlr. 10 Ngr.

DRITTER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Zweiter Band. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1857. broch. Preis 7 Thlr. 10 Ngr.

W. ROSCHER, zur Geschichte der Englischen Volkswirthschaftslehre im sechzehnten und siebzehnten Jahrhundert 1851. 1 Thlr.

——— Nachträge. 1852. 8 Ngr.

J. G. DROYSEN, Eberhard Windeck. 1853. 24 Ngr.

TH. MOMMSEN, Polemii Silvii laterculus. 1853. 16 Ngr.

——— Volusii Maeciani distributio partium. 1853. 6 Ngr.

J. G. DROYSEN, zwei Verzeichnisse, Kaiser Karls V. Lande, seine und seiner Grossen Einkünfte und anderes betreffend. 1854. 20 Ngr.

TH. MOMMSEN, die Stadtrechte der latinischen Gemeinden Salpensa und Malaca in der Provinz Baetica. 1855. 1 Thlr.

——— Nachträge. 1855. 16 Ngr.

FRIEDRICH ZARNCKE, Die urkundlichen Quellen zur Geschichte der Universität Leipzig in den ersten 150 Jahren ihres Bestehens. 1857. 3 Thlr.

VIERTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Zweiter Band. Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. br. Preis 6 Thlr. 20 Ngr.

M. W. DROBISCH, über musikalische Tonbestimmung und Temperatur. 1852. 1 Thlr.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Mit 18 Tafeln. 1852. 1 Thlr. 10 Ngr.

P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 1 Thlr.

——— ——— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2+r'^2-2rr'(\cos U\cos U'+\sin U\sin U'\cos J)$. 1854. 1 Thlr.

O. SCHLÖMILCH, über die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 8 Ngr.

——— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. 16 Ngr.

P. A. HANSEN, die Theorie des Aequatoreals. 1855. 24 Ngr.

C. F. NAUMANN, über die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 10 Ngr.

A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. 1855. 20 Ngr.

FÜNFTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Dritter Band. Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. br. Preis 6 Thlr. 12 Ngr.

M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 12 Ngr.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 1856. 1 Thlr. 20 Ngr.

R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Zurückführung der Strominteusitäts-Messungen auf mechanisches Maass. 1856. 16 Ngr.

Digitized by Google

SEP 27 1907

RELATIONEN

EINESTHEILS

ZWISCHEN SUMMEN UND DIFFERENZEN

UND ANDERNTHEILS

ZWISCHEN INTEGRALEN UND DIFFERENTIALEN.

VON

P. A. HANSEN.

Des VII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° III.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1865.

Digitized by Google

Vom Verfasser übergeben den 10. November 1864.
Der Abdruck vollendet den 11. December 1864.

Digitized by Google

RELATIONEN

EINESTHEILS

ZWISCHEN SUMMEN UND DIFFERENZEN

UND ANDERNTHEILS

ZWISCHEN INTEGRALEN UND DIFFERENTIALEN.

VON

P. A. HANSEN.

Digitized by Google

Das Thema, welches ich hier behandele, ist in früheren Zeiten schon mehrmals bearbeitet worden, allein es fand sich demungeachtet, dass manches nicht unwesentliche hinzugefügt werden konnte. Die früheren Bearbeitungen haben fast immer in der Darstellung der Integrale und Differentiale durch Summen und Differenzen die letzteren nach schräg auf- oder absteigender Richtung in die Ausdrücke eingeführt, während man später erst erkannt hat, dass die Einführung der Differenzen, die entweder auf einer und derselben Zeile, oder zunächst darüber und darunter stehen, auf mehr convergirende Reihen führt.

In dieser Abhandlung werden ausschliesslich die Summen und Differenzen auf, oder zunächst über und unter der Zeile eingeführt, die allgemeinen Formen der daraus entstehenden Ausdrücke abgeleitet, und die Gesetze, nach welchen die numerischen Coefficienten fortschreiten, aufgesucht. Art. 1—14 behandelt die Darstellung der Summen und Differenzen durch Integrale und Differentiale, und Art. 15—24 die Darstellung der Integrale und Differentiale durch Summen und Differenzen. Im Anfange dieser, letzteren, Darstellung führt das eingeschlagene Verfahren von selbst auf die Herleitung einiger der bekannten Interpolationsformeln. Art. 25—29 zeigt, wie ein gewisser Theil der numerischen Coefficienten sich durch bestimmte Integrale, und Art. 30 wie der übrige Theil derselben sich durch bestimmte Differentiale ausdrücken lässt, wenn hierunter verstanden wird, dass nach der letzten Differentiation der Veränderlichen ein constanter Werth gegeben werden soll. Art. 31—39 beschäftigt sich mit der Anwendung der im Vorhergehenden erhaltenen Ausdrücke auf die sogenannten mechanischen Quadraturen, und Art. 40—49 mit den Bernoullischen Zahlen. Es stehen nemlich eine Anzahl der im Vorhergehenden erhaltenen Coefficienten mit den Bernoullischen Zahlen in enger Beziehung, und ich nehme davon Ge-

Digitized by Google

legenheit, zwei verschiedene Ausdrücke zur Berechnung der einzelnen Bernoullischen Zahlen, die ich schon vor einer Reihe von Jahren gefunden habe, abzuleiten.

1.

Sei y irgend eine Function von x, die wenigstens innerhalb der Grenzen, zwischen welchen man die Summen oder die Integrale bilden will, nebst allen ihren Differentialquotienten stetig sein muss. Da ich diese Function bei verschiedenen Werthen von x betrachten werde, so werde ich sie überhaupt mit y_x bezeichnen.

Hat man nun in diese Function die um dasselbe Interval h von einander abstehenden Werthe x, $x+h$, $x+2h$, etc. und $x-h$, $x-2h$, etc. oder allgemein $x+nh$ für x substituirt, wo n constant ist, aber nicht nothwendig eine ganze Zahl zu sein braucht, so bildet der Unterschied $y_{x+(n+1)h}-y_{x+nh}$ die erste Differenz, die ich mit $\Delta y_{x+(n+\frac{1}{2})h}$ bezeichnen werde; der Unterschied $\Delta y_{x+(n+\frac{1}{2})h}-\Delta y_{x+(n-\frac{1}{2})h}$ die zweite Differenz, die mit $\Delta^2 y_{x+nh}$ bezeichnet werden soll u. s. w. Bezeichnet daher m irgend eine ganze und positive Zahl, so erhalten wir allgemein

$$(1) \quad \ldots \quad \Delta^m y_{x+nh} = \Delta^{m-1} y_{x+(n+\frac{1}{2})h} - \Delta^{m-1} y_{x+(n-\frac{1}{2})h}$$

die von $m=1$ bis $m=\infty$ statt findet. Man kann aber weiter gehen und sich y_{x+nh} aus dem Unterschied $\Sigma y_{x+(n+\frac{1}{2})h} - \Sigma y_{x+(n-\frac{1}{2})h}$, so wie $\Sigma y_{x+(n+\frac{1}{2})h}$ aus dem Unterschied $\Sigma' y_{x+(n+1)h} - \Sigma' y_{x+nh}$, u. s. w. entsprungen denken. Die mit Σ bezeichneten Functionen werden alsdann die Summen der gegebenen Function, und diese sind mit einander durch die allgemeine Gleichung

$$(2) \quad \ldots \quad \Sigma'^m y_{x+nh} = \Sigma'^{m+1} y_{x+(n+\frac{1}{2})h} - \Sigma'^{m+1} y_{x+(n-\frac{1}{2})h}$$

verbunden, die von $m=0$ bis $m=\infty$ gilt. Betrachten wir diese beiden Gleichungen näher, so finden wir, dass die eine derselben in die andere übergeht, wenn man für m irgend eine negative ganze Zahl, und Δ^p statt Σ'^{-p} oder bez. Σ'^p statt Δ^{-p} schreibt. Beide Gleichungen können also mit Vorbehalt dieser Verwandelungen ohne Unterschied von $m=-\infty$ bis $m=+\infty$ ausgedehnt werden.

Eine Verschiedenheit ist jedoch anzumerken. Die Gleichung (1) hat für alle positiven, und die Gleichung (2) für alle negativen Werthe von m bestimmte Werthe, hingegen ist die Gleichung (1) für $m=0$ und

Digitized by Google

fur alle negativen, so wie die Gleichung (2) für $m = 0$ und alle positiven Werthe von m unbestimmt, weil in der Reihe der Summenglieder einer jeden Ordnung Ein Glied willkührlich angenommen werden kann. Diese Gleichungen enthalten also in diesen Fällen eben so viele willkührliche Glieder wie die Zahl m Einheiten hat.

Um deutlich anzuzeigen wie die Summen- und Differenzenreihen aus einander entstehen und mit einander zusammenhängen, will ich die ersten derselben in dem folgenden Schema zusammenstellen.

Werthe von x.	2te Summenreihe.	1ste Summenreihe.	Werthe der gegebenen Function.	1ste Differenzenreihe.	2te Differenzenreihe.
$a+(n-2)h$	$\Sigma^2 y_{a+(n-2)h}$		$y_{a+(n-2)h}$		$\Delta^2 y_{a+(n-2)h}$
		$\Sigma y_{a+(n-\frac{3}{2})h}$		$\Delta y_{a+(n-\frac{3}{2})h}$	
$a+(n-1)h$	$\Sigma^2 y_{a+(n-1)h}$		$y_{a+(n-1)h}$		$\Delta^2 y_{a+(n-1)h}$
		$\Sigma y_{a(+n-\frac{1}{2})h}$		$\Delta y_{a+(n-\frac{1}{2})h}$	
$a+nh$	$\Sigma^2 y_{a+nh}$		y_{a+nh}		$\Delta^2 y_{a+nh}$
		$\Sigma y_{a+(n+\frac{1}{2})h}$		$\Delta y_{a+(n+\frac{1}{2})h}$	
$a+(n+1)h$	$\Sigma^2 y_{a+(n+1)h}$		$y_{a+(n+1)h}$		$\Delta^2 y_{a+(n+1)h}$
		$\Sigma y_{a+(n+\frac{3}{2})h}$		$\Delta y_{a+(n+\frac{3}{2})h}$	
$a+(n+2)h$	$\Sigma^2 y_{a+(n+2h)}$		$y_{a+(n+2)h}$		$\Delta^2 y_{a+(n+2h)}$

Aus diesem Schema, welches man links und rechts, oben und unten beliebig weit fortsetzen kann, sieht man, dass die Indices so gewählt sind, dass sie auf jeder Zeile dieselben bleiben, und dass irgend ein Index das arithmetische Mittel aus den in der nächstvorhergehenden oder nächstnachfolgenden Columne zunächst über und unter demselben stehenden Indices ist.

2.

Ich werde nun zuerst die Ausdrücke der Differenzen durch die Differentiale ermitteln. Die Gleichung (1) giebt

$$\begin{aligned} \Delta y_x &= y_{x+\frac{1}{2}h} - y_{x-\frac{1}{2}h} \\ \Delta^2 y_x &= \Delta y_{x+\frac{1}{2}h} - \Delta y_{x-\frac{1}{2}h} \\ \Delta^3 y_x &= \Delta^2 y_{x+\frac{1}{2}h} - \Delta^2 y_{x-\frac{1}{2}h} \end{aligned}$$

etc.

Sie giebt aber auch

Digitized by Google

$$\Delta y_{x+\frac{1}{2}h} = y_{x+h} - y_x, \quad \Delta y_{x-\frac{1}{2}h} = y_x - y_{x-h}$$
$$\Delta^2 y_{x+\frac{1}{2}h} = \Delta y_{x+h} - \Delta y_h, \quad \Delta^2 y_{x-\frac{1}{2}h} = \Delta y_x - \Delta y_{x-h}$$
etc. etc.

Hiemit kann man aus der rechten Seite der vorstehenden Gleichungen alle Differenzen eliminiren, und man bekommt leicht

$$\Delta y_x = y_{x+\frac{1}{2}h} - y_{x-\frac{1}{2}h}$$
$$\Delta^2 y_x = y_{x+h} + y_{x-h} - 2y_x$$
$$\Delta^3 y_x = y_{x+\frac{3}{2}h} - y_{x-\frac{3}{2}h} - 3(y_{x+\frac{1}{2}h} - y_{x-\frac{1}{2}h})$$
$$\Delta^4 y_x = y_{x+2h} + y_{x-2h} - 4y_{x+h} + y_{x-h}) + 6y_x$$
$$\Delta^5 y_x = y_{x+\frac{5}{2}h} - y_{x-\frac{5}{2}h} - 5(y_{x+\frac{3}{2}h} - y_{x-\frac{3}{2}h}) + 10(y_{x+\frac{1}{2}h} - y_{x-\frac{1}{2}h})$$
$$\Delta^6 y_x = y_{x+3h} + y_{x-3h} - 6(y_{x+2h} + y_{x-2h}) + 15(y_{x+h} + y_{x-h}) - 20y_x$$
$$\Delta^7 y_x = y_{x+\frac{7}{2}h} - y_{x-\frac{7}{2}h} - 7(y_{x+\frac{5}{2}h} - y_{x-\frac{5}{2}h}) + 21(y_{x+\frac{3}{2}h} - y_{x-\frac{3}{2}h}) - 35(y_{x+\frac{1}{2}h} - y_{x-\frac{1}{2}h})$$
etc. etc.

die man beliebig fortsetzen kann, da die Coefficienten die des Binoms sind.

Da vorausgesetzt ist, dass die Function y wenigstens in der Ausdehnung, in welcher sie hier vorkommt, stetig sei, so können wir die in den vorstehenden Gleichungen enthaltenen Functionen durch das Taylorsche Theorem ausdrücken, denn man kann in diesem Falle das Increment h immer so klein annehmen, dass diese Reihe convergirt. Wir bekommen daher

$$y_{x+\frac{1}{2}h} = y_x + \tfrac{1}{2}h\frac{dy_x}{dx} + \frac{1}{4}\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y_x}{dx^2} + \frac{1}{8}\frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3y_x}{dx^3} + \frac{1}{16}\frac{h^4}{1..4}\frac{d^4y_x}{dx^4} + \ldots$$
$$y_{x-\frac{1}{2}h} = y_x - \tfrac{1}{2}h\frac{dy_x}{dx} \pm \text{etc.}$$
$$y_{x+h} = y_x + h\frac{dy_x}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y_x}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3y_x}{dx^3} + \frac{h^4}{1...4}\frac{d^4y_x}{dx^4} + \ldots$$
$$y_{x-h} = y_x - h\frac{dy_x}{dx} \pm \text{etc.}$$
$$y_{x+\frac{3}{2}h} = y_x + \tfrac{3}{2}h\frac{dy_x}{dx} + \frac{9}{4}\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y_x}{dx^2} + \frac{27}{8}\frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3y_x}{dx^3} + \frac{81}{16}\frac{h^4}{1..4}\frac{d^4y_x}{dx^4} + \ldots$$
$$y_{x-\frac{3}{2}h} = y_x - \tfrac{3}{2}h\frac{dy_x}{dx} \pm \text{etc.}$$
$$y_{x+2h} = y_x + 2h\frac{dy_x}{dx} + 4\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y_x}{dx^2} + 8\frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3y_x}{dx^3} + 16\frac{h^4}{1..4}\frac{d^4y_x}{dx^4} + \ldots$$
$$y_{x-2h} = y_x - 2h\frac{dy_x}{dx} \pm \text{etc.}$$
$$y_{x+\frac{5}{2}h} = y_x + \tfrac{5}{2}h\frac{dy_x}{dx} + \frac{25}{4}\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y_x}{dx^2} + \frac{125}{8}\frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3y_x}{dx^3} + \frac{625}{16}\frac{h^4}{1..4}\frac{d^4y_x}{dx^4} + \ldots$$
$$y_{x-\frac{5}{2}h} = y_x - \tfrac{5}{2}h\frac{dy_x}{dx} \pm \text{etc.}$$

Digitized by Google

$$y_{x+3h} = y_x + 3h\frac{dy_x}{dx} + 9\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y_x}{dx^2} + 27\frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3y_x}{dx^3} + 81\frac{h^4}{1..4}\frac{d^4y_x}{dx^4} + \ldots$$

$$y_{x-3h} = y_x - 3h\frac{dy_x}{dx} \pm \text{etc.}$$

$$y_{x+\frac{1}{2}h} = y_x + \tfrac{1}{2}h\frac{dy_x}{dx} + \frac{49}{4}\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y_x}{dx^2} + \frac{343}{8}\frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3y_x}{dx^3} + \frac{2401}{16}\frac{h^4}{1..4}\frac{d^4y_x}{dx^4} + \ldots$$

$$y_{x-\frac{1}{2}h} = y_x - \tfrac{1}{2}h\frac{dy_x}{dx} \pm \text{etc.}$$

etc. etc.

Substituirt man diese, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\Delta y_x &= h\frac{dy_x}{dx} + \frac{1}{4}\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y_x}{dx^2} + \frac{1}{16}\frac{h^3}{1..3}\frac{d^3y_x}{dx^3} + \frac{1}{64}\frac{h^4}{1..4}\frac{d^4y_x}{dx^4} + \ldots \\
\Delta^2 y_x &= h^2\frac{d^2y_x}{dx^2} + 2\frac{h^3}{1..4}\frac{d^3y_x}{dx^3} + 2\frac{h^4}{1..6}\frac{d^4y_x}{dx^4} + \ldots \\
\Delta^3 y_x &= h^3\frac{d^3y_x}{dx^3} + 15\frac{h^4}{1..5}\frac{d^4y_x}{dx^4} + \frac{273}{8}\frac{h^5}{1..7}\frac{d^5y_x}{dx^5} + \ldots \\
\Delta^4 y_x &= h^4\frac{d^4y_x}{dx^4} + 120\frac{h^5}{1..6}\frac{d^5y_x}{dx^5} + \ldots \\
\Delta^5 y_x &= h^5\frac{d^5y_x}{dx^5} + 4200\frac{h^6}{1..7}\frac{d^6y_x}{dx^6} + \ldots \\
\Delta^6 y_x &= h^6\frac{d^6y_x}{dx^6} + \ldots \\
\Delta^7 y_x &= h^7\frac{d^7y_x}{dx^7} + \ldots \\
\text{etc.} & \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

3.

Man kann noch andere Ausdrücke erhalten, die die nemliche Form haben. Zu dem Ende geben die Gleichungen (1) auf dieselbe Art wie oben

$$\begin{aligned}
\Delta y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta y_{x-\frac{1}{2}h} &= y_{x+h} - y_{x-h} \\
\Delta^2 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^2 y_{x-\frac{1}{2}h} &= y_{x+\frac{3}{2}h} + y_{x-\frac{3}{2}h} - (y_{x+\frac{1}{2}h} + y_{x-\frac{1}{2}h}) \\
\Delta^3 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^3 y_{x-\frac{1}{2}h} &= y_{x+2h} - y_{x-2h} - 2(y_{x+h} - y_{x-h}) \\
\Delta^4 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^4 y_{x-\frac{1}{2}h} &= y_{x+\frac{5}{2}h} + y_{x-\frac{5}{2}h} - 3(y_{x+\frac{3}{2}h} + y_{x-\frac{3}{2}h}) + 2(y_{x+\frac{1}{2}h} + y_{x-\frac{1}{2}h}) \\
\Delta^5 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^5 y_{x-\frac{1}{2}h} &= y_{x+3h} - y_{x-3h} - 4(y_{x+2h} - y_{x-2h}) + 5(y_{x+h} - y_{x-h}) \\
\Delta^6 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^6 y_{x-\frac{1}{2}h} &= y_{x+\frac{7}{2}h} + y_{x-\frac{7}{2}h} - 5(y_{x+\frac{5}{2}h} + y_{x-\frac{5}{2}h}) + 9(y_{x+\frac{3}{2}h} + y_{x-\frac{3}{2}h}) - 5(y_{x+\frac{1}{2}h}) + y_{x-\frac{1}{2}h}) \\
\Delta^7 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^7 y_{x-\frac{1}{2}h} &= y_{x+4h} - y_{x-4h} - 6(y_{x+3h} - y_{x-3h}) + 14(y_{x+2h} - y_{x-2h}) - 14(y_{x+h} - y_{x-h}) \\
& \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Man kann diese Ausdrücke auch aus den ähnlichen des vor. Art. ableiten. Setzen wir z. B. in dem Ausdruck für $\Delta^5 y_x$ erst $x + \frac{1}{2}h$ und dann $x - \frac{1}{2}h$ statt x, so bekommen wir

Digitized by Google

$$\Delta^5 y_{x+\frac{1}{2}h} = y_{x+3h} - y_{x-2h} - 5(y_{x+2h} - y_{x-h}) + 10(y_{x+h} - y_x)$$
$$\Delta^5 y_{x-\frac{1}{2}h} = y_{x+2h} - y_{x-3h} - 5(y_{x+h} - y_{x-2h}) + 10(y_x - y_{x-h})$$

Addirt man diese, so geht der vorstehende Ausdruck für $\Delta^5 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^5 y_{x-\frac{1}{2}h}$ daraus hervor. Diese Ableitung giebt zugleich das Gesetz der Coefficienten der vorstehenden Ausdrücke zu erkennen. Man sieht, dass sie aus dem Unterschied von je zwei zunächst auf einander folgenden Binomialcoefficienten der Potenz bestehen, die dem Index von Δ gleich ist.

Substituirt man nun die im vor. Art. durch das Taylorsche Theorem entwickelten Functionen in die vorstehenden Ausdrücke, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
y_{x+\frac{1}{2}h} + y_{x-\frac{1}{2}h} &= 2y_x + \frac{1}{1.2}\frac{h^2}{4}\frac{d^2y_x}{dx^2} + \frac{1}{1\ldots4}\frac{h^4}{16}\frac{d^4y_x}{dx^4} + \frac{1}{1\ldots6}\frac{h^6}{64}\frac{d^6y_x}{dx^6} + \ldots \\
\Delta y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta y_{x-\frac{1}{2}h} &= 2h\frac{dy_x}{dx} + 2\frac{1}{1.2.3}\frac{h^3}{4}\frac{d^3y_x}{dx^3} + 2\frac{1}{1\ldots5}\frac{h^5}{16}\frac{d^5y_x}{dx^5} + 2\frac{1}{1\ldots7}\frac{h^7}{64}\frac{d^7y_x}{dx^7} + \ldots \\
\Delta^2 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^2 y_{x-\frac{1}{2}h} &= 2h^2\frac{d^2y_x}{dx^2} + 10\frac{1}{1\ldots4}\frac{h^4}{4}\frac{d^4y_x}{dx^4} + \frac{91}{4}\frac{1}{1\ldots6}\frac{h^6}{16}\frac{d^6y_x}{dx^6} + \ldots \\
\Delta^3 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^3 y_{x-\frac{1}{2}h} &= 2h^3\frac{d^3y_x}{dx^3} + 60\frac{1}{1\ldots5}\frac{h^5}{4}\frac{d^5y_x}{dx^5} + 252\frac{1}{1\ldots7}\frac{h^7}{16}\frac{d^7y_x}{dx^7} + \ldots \\
\Delta^4 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^4 y_{x-\frac{1}{2}h} &= 2h^4\frac{d^4y_x}{dx^4} + 420\frac{1}{1\ldots6}\frac{h^6}{4}\frac{d^6y_x}{dx^6} + \ldots \\
\Delta^5 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^5 y_{x-\frac{1}{2}h} &= 2h^5\frac{d^5y_x}{dx^5} + 3360\frac{1}{1\ldots7}\frac{h^7}{4}\frac{d^7y_x}{dx^7} + \ldots \\
\Delta^6 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^6 y_{x-\frac{1}{2}h} &= 2h^6\frac{d^6y_x}{dx^6} + \ldots \\
\Delta^7 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^7 y_{x-\frac{1}{2}h} &= 2h^7\frac{d^7y_x}{dx^7} + \ldots
\end{aligned}$$

welchen ich die Function $y_{x+\frac{1}{2}h} + y_{x-\frac{1}{2}h}$ hinzugefügt habe, weil sie weiter unten gebraucht wird.

4.

Um aus den Summen der Differenzen, die im vor. Art. entwickelt wurden, die Ausdrücke für die einzelnen Differenzen zu erhalten, dienen die Gleichungen

$$\Delta y_{x+\frac{1}{2}h} - \Delta y_{x-\frac{1}{2}h} = \Delta^2 y_x$$
$$\Delta^2 y_{x+\frac{1}{2}h} - \Delta^2 y_{x-\frac{1}{2}h} = \Delta^3 y_x$$
etc.

und man bekommt hiemit sogleich

Digitized by Google

$$\Delta y_{x\pm\frac{1}{2}h} = h\frac{dy_x}{dx} \pm \tfrac{1}{2}h^2\frac{d^2y_x}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3y_x}{dx^3} \pm \frac{h^4}{1\ldots4}\frac{d^4y_x}{dx^4} + \frac{h^5}{1\ldots5}\frac{d^5y_x}{dx^5} \pm \frac{h^6}{1\ldots6}\frac{d^6y_x}{dx^6} + \frac{h^7}{1\ldots7}\frac{d^7y_x}{dx^7} \pm \ldots$$

$$\Delta^2 y_{x\pm\frac{1}{2}h} = h^2\frac{d^2y_x}{dx^2} \pm \tfrac{1}{2}h^3\frac{d^3y_x}{dx^3} + 5\frac{h^4}{1\ldots4}\frac{d^4y_x}{dx^4} \pm \frac{15}{2}\frac{h^5}{1\ldots5}\frac{d^5y_x}{dx^5} + \frac{91}{8}\frac{h^6}{1\ldots6}\frac{d^6y_x}{dx^6} \pm \frac{273}{16}\frac{h^7}{1\ldots7}\frac{d^7y_x}{dx^7} + \ldots$$

$$\Delta^3 y_{x\pm\frac{1}{2}h} = h^3\frac{d^3y_x}{dx^3} \pm \tfrac{1}{2}h^4\frac{d^4y_x}{dx^4} + 30\frac{h^5}{1\ldots5}\frac{d^5y_x}{dx^5} \pm 60\frac{h^6}{1\ldots6}\frac{d^6y_x}{dx^6} + 126\frac{h^7}{1\ldots7}\frac{d^7y_x}{dx^7} \pm \ldots$$

$$\Delta^4 y_{x\pm\frac{1}{2}h} = h^4\frac{d^4y_x}{dx^4} \pm \tfrac{1}{2}h^5\frac{d^5y_x}{dx^5} + 210\frac{h^6}{1\ldots6}\frac{d^6y_x}{dx^6} \pm 2100\frac{h^7}{1\ldots7}\frac{d^7y_x}{dx^7} + \ldots$$

$$\Delta^5 y_{x\pm\frac{1}{2}h} = h^5\frac{d^5y_x}{dx^5} \pm \tfrac{1}{2}h^6\frac{d^6y_x}{dx^6} + 1680\frac{h^7}{1\ldots7}\frac{d^7y_x}{dx^7} \pm \ldots$$

$$\Delta^6 y_{x\pm\frac{1}{2}h} = h^6\frac{d^6y_x}{dx^6} \pm \tfrac{1}{2}h^7\frac{d^7y_x}{dx^7} + \ldots$$

$$\Delta^7 y_{x\pm\frac{1}{2}h} = h^7\frac{d^7y_x}{dx^7} \pm \ldots$$

etc. etc.

welche sich von den Ausdrücken des Art. 2 dadurch unterscheiden, dass alle Differentiale der Reihe nach darin vorkommen, während jene nur die Differentiale von zwei zu zwei Ordnungen enthalten. Man darf sich nicht vorstellen, dass diese beiden Systeme von Gleichungen wesentlich von einander verschieden seien, sie drücken jedes für sich die Differenzen für jeden beliebigen Werth von x und h aus, und müssen sich daher identificiren lassen. Man macht das erste System mit dem zweiten identisch, indem man darin allenthalben $x \pm \frac{1}{2}h$ für x substituirt, und die Differentiale von $y_{x\pm\frac{1}{2}h}$, die darauf darin enthalten sein werden, durch das Taylorsche Theorem auf die von y_x hinführt. Es wird sich dieses am Einfachsten durch ein einfaches Beispiel zeigen lassen.

5.

Sei zur Erläuterung der im Vorhergehenden entwickelten Formeln

$$y = x^6$$

Bildet man hievon die Differentiale und substituirt diese in die Gleichungen, so bekommt man

$$\Delta y_x = 6hx^5 + 5h^2x^3 + \tfrac{3}{2}h^5x$$

$$\Delta^2 y_x = 30h^2x^4 + 30h^4x^2 + 2h^6$$

$$\Delta^3 y_x = 120h^3x^3 + 90h^5x$$

$$\Delta^4 y_x = 360h^4x^2 + 120h^6$$

$$\Delta^5 y_x = 720h^5x$$

$$\Delta^6 y_x = 720h^6$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
\Delta y_{x\pm\frac{1}{2}h} &= 6hx^5 \pm 15h^2x^4 + 20h^3x^3 \pm 15h^4x^2 + 6h^5x \pm h^6\\
\Delta^2 y_{x\pm\frac{1}{2}h} &= 30h^2x^4 \pm 60h^3x^3 + 75h^4x^2 \pm 45h^5x + \tfrac{9}{8}h^6\\
\Delta^3 y_{x\pm\frac{1}{2}h} &= 120h^3x^3 \pm 180h^4x^2 + 180h^5x \pm 60h^6\\
\Delta^4 y_{x\pm\frac{1}{2}h} &= 360h^4x^2 \pm 360h^5x + 210h^6\\
\Delta^5 y_{x\pm\frac{1}{2}h} &= 720h^5x \pm 360h^6\\
\Delta^6 y_{x\pm\frac{1}{2}h} &= 720h^6
\end{aligned}
$$

Die Identität dieser beiden Gruppen von Formeln werde ich hier nur an der ersten Gleichung derselben ausführlich zeigen, man kann durch dasselbe Verfahren, wenn man will, auch die Identität der übrigen darthun. Da es sich hier um eine gegebene Function handelt, so braucht man zur Entwickelung das Taylorsche Theorem nicht. Es wird, der oben gegebenen Regel gemäss, die erste Formel der ersten Gruppe

$$
\begin{aligned}
\Delta y_{x\pm\frac{1}{2}h} &= 6h(x\pm\tfrac{1}{2}h)^5 + 5h^3(x\pm\tfrac{1}{2}h)^3 + \tfrac{3}{8}h^5(x\pm\tfrac{1}{2}h)\\
&= 6hx^5 \pm 15h^2x^4 + 15h^3x^3 \pm \tfrac{45}{2}h^4x^2 + \tfrac{15}{8}h^5x \pm \tfrac{3}{16}h^6\\
&\qquad + 5h^3x^3 \pm \tfrac{45}{2}h^4x^2 + \tfrac{15}{4}h^5x \pm \tfrac{5}{8}h^6\\
&\qquad\qquad + \tfrac{3}{8}h^5x \pm \tfrac{3}{16}h^6\\
&= 6hx^5 \pm 15h^2x^4 + 20h^3x^3 \pm 15h^4x^2 + 6h^5x \pm h^6
\end{aligned}
$$

mit der ersten Formel der zweiten Gruppe identisch. Will man nun einige einzelne Werthe der Differenzen berechnen, so kann man sich nach Belieben der Gleichungen der ersten oder der zweiten Gruppe bedienen; am Einfachsten ist es die der ersten Gruppe anzuwenden. Ich will der Einfachheit wegen $h=1$ setzen, und einestheils die ungraden Differenzen für $x=\frac{1}{2}$ und $x=\frac{3}{2}$, und die graden für $x=1$ rechnen, anderntheils werde ich jene für $x=1$ und $x=2$, und diese für $x=\frac{1}{2}$ berechnen. Hiemit findet sich

$$
\begin{aligned}
&\Delta y_{\frac{1}{2}} = 1, \qquad \Delta^3 y_{\frac{1}{2}} = 60, \qquad \Delta^5 y_{\frac{1}{2}} = 360,\\
&\qquad \Delta^2 y_1 = 62, \qquad \Delta^4 y_1 = 480, \qquad \Delta^6 y_1 = 720,\\
&\Delta y_{\frac{3}{2}} = 63, \qquad \Delta^3 y_{\frac{3}{2}} = 540, \qquad \Delta^5 y_{\frac{3}{2}} = 1080,\\
&\qquad \Delta^2 y_{\frac{1}{2}} = \tfrac{91}{8}, \qquad \Delta^4 y_{\frac{1}{2}} = 210, \qquad \Delta^6 y_{\frac{1}{2}} = 720,\\
&\Delta y_1 = \tfrac{91}{8}, \qquad \Delta^3 y_1 = 210, \qquad \Delta^5 y_1 = 720,\\
&\Delta y_2 = \tfrac{931}{4}, \qquad \Delta^3 y_2 = 1140, \qquad \Delta^5 y_2 = 1440,
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

Dieselben Werthe lassen sich durch die zweite Gruppe von Gleichungen auf zweierlei Art erhalten. Erstens mit Anwendung der oberen Zeichen und durch die Substitutionen von

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ x = 1 \end{matrix}\right\} \text{ für die Differenzen ungrader Ordnung}$$

$$x = \tfrac{1}{2} \quad \text{“ “ “ grader “}$$

$$\left.\begin{matrix} x = \tfrac{1}{2} \\ x = \tfrac{3}{2} \end{matrix}\right\} \text{ “ “ “ ungrader “}$$

$$x = 0 \quad \text{“ “ “ grader “}$$

zweitens mit Anwendung der unteren Zeichen und durch die Substitutionen von

$$\left.\begin{matrix} x = 1 \\ x = 2 \end{matrix}\right\} \text{ für die Differenzen ungrader Ordnung}$$

$$x = \tfrac{3}{2} \quad \text{“ “ “ grader “}$$

$$\left.\begin{matrix} x = \tfrac{3}{2} \\ x = \tfrac{5}{2} \end{matrix}\right\} \text{ “ “ “ ungrader “}$$

$$x = 1 \quad \text{“ “ “ grader “}$$

Um die obigen numerischen Werthe dadurch einer Prüfung zu unterwerfen, dass man sie aus den speciellen Werthen der Function selbst berechnet, muss man zufolge des Schemas in Art. 1 einestheils $1, 2$, etc. und anderntheils $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, etc. für x substituiren. Man bekommt dadurch einestheils

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
−2	64						
		−63					
−1	1		+62				
		−1		−60			
0	0		2		120		
		+1		+60		360	
1	1		62		480		720
		63		540		1080	
2	64		602		1560		
		665		2100			
3	729		2702				
		3367					
4	4096						

wo die betreffenden Differenzen mit den oben berechneten Werthen der ersten Gruppe übereinstimmen. Anderntheils ergiebt sich

Digitized by Google

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
$-\frac{3}{2}$	$\frac{729}{64}$						
		$-\frac{91}{8}$					
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{64}$		$+\frac{91}{8}$				
		0		0			
$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{64}$		$\frac{91}{8}$		210		
		$+\frac{91}{8}$		210		720	
$\frac{3}{2}$	$\frac{729}{64}$		$\frac{1771}{8}$		930		720
		$\frac{1862}{8}$		1140		1440	
$\frac{5}{2}$	$\frac{15625}{64}$		$\frac{10891}{8}$		2370		
		$\frac{12753}{8}$		3510			
$\frac{7}{2}$	$\frac{117649}{64}$		$\frac{38971}{8}$				
		$\frac{51724}{8}$					
$\frac{9}{2}$	$\frac{531441}{64}$						

wo die betreffenden Differenzen mit den Werthen der obigen zweiten Gruppe übereinstimmen.

Als zweites Beispiel will ich

$$y = \log \text{nat}\, x$$

setzen, und die erste Differenz nach dem Art. 2 entwickeln. Da hier

$$\frac{dy_x}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d^2y_x}{dx^2} = \frac{1.2}{x^3}, \quad \frac{d^5y_x}{dx^5} = \frac{1.2.3.4}{x^5}, \text{ etc.}$$

so giebt der Ausdruck für Δy_x des Art. 2

$$\Delta y_x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3.4x^2} + \frac{1}{5.16x^5} + \frac{1}{7.64x^7} + \ldots$$

oder wenn man $\frac{x}{2}$ statt x schreibt

$$\frac{\Delta y_{\frac{x}{2}}}{2} = 2\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \ldots\right\}$$

welches eine bekannte Gleichung ist, die für $x > 1$ immer convergirt.

6.

Wir kommen jetzt zur Darstellung der Summenfunctionen durch Integrale und Differentiale. Nehmen wir die Gleichung

$$\Delta y_x = h\frac{dy_x}{dx} + \frac{1}{4}\frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3y_x}{dx^3} + \frac{1}{16}\frac{h^5}{1..5}\frac{d^5y_x}{dx^5} + \frac{1}{64}\frac{h^7}{1..7}\frac{d^7y_x}{dx^7} + \ldots$$

des Art. 2 vor. Nachdem wir diese erst ein Mal integrirt, und dann ein Mal, drei Mal, u. s. w. differentiirt haben, bekommen wir

Digitized by Google

$$\mathcal{A}\int y_x dx = hy_x + \tfrac{1}{4}\tfrac{h^3}{1.2.3}\tfrac{d^2y_x}{dx^2} + \tfrac{1}{16}\tfrac{h^5}{1..5}\tfrac{d^4y_x}{dx^4} + \tfrac{1}{64}\tfrac{h^7}{1..7}\tfrac{d^6y_x}{dx^6} + \ldots$$

$$\mathcal{A}\tfrac{dy_x}{dx} = h\tfrac{d^2y_x}{dx^2} + \tfrac{1}{4}\tfrac{h^3}{1.2.3}\tfrac{d^4y_x}{dx^4} + \tfrac{1}{16}\tfrac{h^5}{1..5}\tfrac{d^6y_x}{dx^6} + \ldots$$

$$\mathcal{A}\tfrac{d^2y_x}{dx^2} = h\tfrac{d^4y_x}{dx^4} + \tfrac{1}{4}\tfrac{h^3}{1.2.3}\tfrac{d^6y_x}{dx^6} + \ldots$$

$$\mathcal{A}\tfrac{d^4y_x}{dx^4} = h\tfrac{d^6y_x}{dx^6} + \ldots$$

etc. etc.

Multipliciren wir die zweite dieser Gleichungen mit $a_1 h^2$, die dritte mit $b_1 h^4$, die vierte mit $c_1 h^6$, u. s. w., addiren darauf sämmtliche Gleichungen, und bestimmen die Coefficienten a_1, b_1, c_1, etc. aus den folgenden Gleichungen

$$a_1 + \tfrac{1}{2^2}\tfrac{1}{1.2.3} = 0$$

$$b_1 + \tfrac{1}{2^2}\tfrac{a_1}{1.2.3} + \tfrac{1}{2^4}\tfrac{1}{1..5} = 0$$

$$c_1 + \tfrac{1}{2^2}\tfrac{b_1}{1.2.3} + \tfrac{1}{2^4}\tfrac{a_1}{1..5} + \tfrac{1}{2^6}\tfrac{1}{1..7} = 0$$

etc.

die man beliebig fortsetzen kann, so wird

$$hy_x = \mathcal{A}\int y_x dx + a_1 h^2 \mathcal{A}\tfrac{dy_x}{dx} + b_1 h^4 \mathcal{A}\tfrac{d^3y_x}{dx^3} + c_1 h^6 \tfrac{d^5y_x}{dx^5} + \ldots$$

und nehmen wir hievon die Summe und dividiren mit h, so ergiebt sich

$$\Sigma y_x = \tfrac{1}{h}\int y_x dx + a_1 h \tfrac{dy_x}{dx} + b_1 h^3 \tfrac{d^3y_x}{dx^3} + c_1 h^5 \tfrac{d^5y_x}{dx^5} + \ldots$$

welche die erste Summenfunction durch ein einfaches Integral und die Differentiale der ungraden Ordnungen ausdrückt. Durch die obigen Bedingungsgleichungen findet man die Werthe der ersten Coefficienten wie folgt,

$$a_1 = -\tfrac{1}{24}, \quad b_1 = \tfrac{7}{5760}, \quad c_1 = -\tfrac{31}{967680}, \quad d_1 = \tfrac{127}{309657600},$$

Die zweite Summenfunction bekommt man aus der Gleichung

$$\mathcal{A}^2 y_x = h^2 \tfrac{d^2y_x}{dx^2} + 2\tfrac{h^4}{1..4}\tfrac{d^4y_x}{dx^4} + 2\tfrac{h^6}{1..6}\tfrac{d^6y_x}{dx^6} + \ldots$$

des Art. 2 auf dieselbe Weise. Diese giebt zuerst

$$\mathcal{A}^2\iint y_x dx^2 = h^2 y_x + 2\tfrac{h^4}{1..4}\tfrac{d^2y_x}{dx^2} + 2\tfrac{h^6}{1..6}\tfrac{d^4y_x}{dx^4} + 2\tfrac{h^8}{1..8}\tfrac{d^6y_x}{dx^6} + \ldots$$

$$\mathcal{A}^2 y_x = h^2\tfrac{d^2y_x}{dx^2} + 2\tfrac{h^4}{1..4}\tfrac{d^4y_x}{dx^4} + 2\tfrac{h^6}{1..6}\tfrac{d^6y_x}{dx^6} + \ldots$$

Digitized by Google

$$\Delta^2 \frac{d^2 y_x}{dx^2} = h^2 \frac{d^2 y_x}{dx^2} + 2 \frac{h^4}{4..4} \frac{d^4 y_x}{dx^4} + \ldots$$

$$\Delta^2 \frac{d^4 y_x}{dx^4} = h^2 \frac{d^6 y_x}{dx^6} + \ldots$$

etc. etc.

Multiplicirt man hier wie oben bez. mit $a_2 h^2$, $b_2 h^4$, $c_2 h^6$, etc., addirt und setzt

$$a_2 + 2 \frac{1}{4..4} = 0$$

$$b_2 + 2 \frac{a_2}{4..4} + 2 \frac{1}{4..6} = 0$$

$$c_2 + 2 \frac{b_2}{4..4} + 2 \frac{a_2}{4..6} + 2 \frac{1}{4..8} = 0$$

etc.

so ergiebt sich

$$h^2 y_x = \Delta^2 \iint y_x dx^2 + a_2 h^2 \Delta^2 y_x + b_2 h^4 \Delta^2 \frac{d^2 y_x}{dx^2} + c_2 h^6 \Delta^2 \frac{d^4 y_x}{dx^4} + \ldots$$

und durch zweimalige Summirung

$$\Sigma^2 y_x = \frac{1}{h^2} \iint y_x dx^2 + a_2 y_x + b_2 h^2 \frac{d^2 y_x}{dx^2} + c_2 h^4 \frac{d^4 y_x}{dx^4} + \ldots$$

die die zweite Summenfunction durch ein zweifaches Integral, die Function selbst und die Differentiale der graden Ordnungen giebt. Die ersten Coefficienten werden hier

$$a_2 = -\frac{1}{12}, \quad b_2 = \frac{1}{240}, \quad c_2 = -\frac{1}{6048}.$$

Auf diese Art kann man auch jede Summenformel höherer Ordnung finden, allein es wird bald das Gesetz der Bildung der Bedingungsgleichungen verloren gehen. Ich halte mich daher um so mehr nicht weiter dabei auf, da ich weiter unten Ausdrücke entwickeln werde, durch welche man die Coefficienten aller Summen- und Differenzformeln, so weit man will, berechnen kann. Ich füge blos die Bemerkung hinzu, dass in allen Summenformeln, wie schon im Art. 1 erwähnt ist, so viele willkührliche Grössen enthalten sind, wie der Index von Σ' Einheiten enthält. Um bestimmte Summenausdrücke zu erhalten muss daher nicht nur von der zu bildenden Summe, sondern auch von jeder der Summen niedrigerer Ordnung Ein Glied gegeben sein, und wenn dieses der Fall ist, so dienen diese Bedingungen, um die dem Integral hinzuzufügenden willkührlichen Constanten zu bestimmen, die stets in derselben Anzahl vorhanden sind. Das dabei einzuhaltende Verfahren wird

Digitized by Google

am Einfachsten aus dem weiter unten folgenden numerischen Beispiel erkannt werden.

7.

Die Gleichungen des Art. 3 geben zu anderen Ausdrücken für die Summenfunctionen Anlass. Von der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}h\{y_{x+\frac{1}{2}h}+y_{x-\frac{1}{2}h}\}=hy_x+\tfrac{1}{4}\tfrac{h^2}{1.2}\tfrac{d^2y}{dx^2}+\tfrac{1}{16}\tfrac{h^4}{1..4}\tfrac{d^4y_x}{dx^4}+\tfrac{1}{64}\tfrac{h^7}{1..6}\tfrac{d^6y_x}{dx^6}+\ldots$$

des genannten Art. ziehe ich die Gleichung

$$\Delta\int y_x dx=hy_x+\tfrac{1}{4}\tfrac{h^2}{1.2.3}\tfrac{d^2y_x}{dx^2}+\tfrac{1}{16}\tfrac{h^4}{1..5}\tfrac{d^4y_x}{dx^4}+\tfrac{1}{64}\tfrac{h^7}{1..7}\tfrac{d^6y_x}{dx^6}+\ldots$$

ab, wodurch

$$\tfrac{1}{2}h\{y_{x+\frac{1}{2}h}+y_{x-\frac{1}{2}h}\}-\Delta\int y_x dx=\tfrac{1}{4}\tfrac{2h^2}{1.2.3}\tfrac{d^2y_x}{dx^2}+\tfrac{1}{16}\tfrac{4h^4}{1..5}\tfrac{d^4y_x}{dx^4}+\tfrac{1}{64}\tfrac{6h^7}{1..7}\tfrac{d^6y_x}{dx^6}+\ldots$$

erhalten wird, nimmt man nun wieder die Gleichungen

$$\Delta\tfrac{dy_x}{dx}=h\tfrac{d^2y_x}{dx^2}+\tfrac{1}{4}\tfrac{h^3}{1.2.3}\tfrac{d^4y_x}{dx^4}+\tfrac{1}{16}\tfrac{h^5}{1..5}\tfrac{d^6y_x}{dx^6}+\ldots$$

$$\Delta\tfrac{d^2y_x}{dx^2}=h\tfrac{d^4y_x}{dx^4}+\tfrac{1}{4}\tfrac{h^3}{1.2.3}\tfrac{d^6y_x}{dx^6}+\ldots$$

$$\Delta\tfrac{d^3y_x}{dx^3}=h\tfrac{d^6y_x}{dx^6}+\ldots$$

etc. etc.

vor, multiplicirt die erste mit $\alpha_1 h^2$, die zweite mit $\beta_1 h^4$, die dritte mit $\gamma_1 h^6$, etc., addirt und setzt

$$\alpha_1=\tfrac{1}{2^2}\tfrac{2}{1.2.3}$$

$$\beta_1+\tfrac{1}{2^4}\tfrac{\alpha_1}{1.2.3}=\tfrac{1}{2^4}\tfrac{4}{1..5}$$

$$\gamma_1+\tfrac{1}{2^2}\tfrac{\beta_1}{1.2.3}+\tfrac{1}{2^4}\tfrac{\alpha_1}{1..5}=\tfrac{1}{2^6}\tfrac{6}{1..7}$$

etc.

so wird

$$\tfrac{1}{2}h\{y_{x+\frac{1}{2}h}+y_{x-\frac{1}{2}h}\}=\Delta\int y_x dx+\alpha_1 h^2\Delta\tfrac{dy_x}{dx}+\beta_1 h^4\Delta\tfrac{d^3y}{dx^3}+\gamma_1 h^6\Delta\tfrac{d^5y_x}{dx^5}+\ldots$$

woraus durch die Summation

$$\tfrac{1}{2}\{\Sigma y_{x+\frac{1}{2}h}+\Sigma y_{x-\frac{1}{2}h}\}=\tfrac{1}{h}\int y_x dx+\alpha_1 h\tfrac{dy_x}{dx}+\beta_1 h^3\tfrac{d^3y_x}{dx^3}+\gamma_1 h^5\tfrac{d^5y_x}{dx^5}+\ldots$$

hervorgeht. Die ersten Coefficienten werden hier

$$\alpha_1=\tfrac{1}{12},\quad \beta_1=-\tfrac{1}{720},\quad \gamma_1=\tfrac{1}{30240}$$

Digitized by Google

Um eine ähnliche Summenformel zweiter Ordnung zu erlangen, nehme ich zuerst wieder die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}h^2\{y_{x+\frac{1}{2}h}+y_{x-\frac{1}{2}h}\}=h^2y_x+\tfrac{1}{4}\tfrac{h^4}{1..2}\tfrac{d^2y_x}{dx^2}+\tfrac{1}{16}\tfrac{h^6}{1..4}\tfrac{d^4y_x}{dx^4}+\tfrac{1}{64}\tfrac{h^8}{1..6}\tfrac{d^6y_x}{dx^6}+\ldots$$

vor, und ziehe davon die Gleichung

$$\Delta^2\iint y_x dx^2=h^2y_x+2\tfrac{h^4}{1..4}\tfrac{d^2y_x}{dx^2}+2\tfrac{h^6}{1..6}\tfrac{d^4y_x}{dx^4}+2\tfrac{h^8}{1..8}\tfrac{d^6y_x}{dx^6}+\ldots$$

des Art. 6 ab, wodurch

$$\tfrac{1}{2}h^2\{y_{x+\frac{1}{2}h}+y_{x-\frac{1}{2}h}\}-\Delta^2\iint y_x dx^2=\tfrac{h^4}{1..4}\tfrac{d^2y_x}{dx^2}-\tfrac{1}{16}\tfrac{2h^6}{1..6}\tfrac{d^4y_x}{dx^4}-\tfrac{1}{64}\tfrac{72h^8}{1..8}\tfrac{d^6y_x}{dx^6}-\ldots$$

entsteht. Nimmt man nun wieder die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y_x &= h^2\tfrac{d^2y_x}{dx^2}+2\tfrac{h^4}{1..4}\tfrac{d^4y_x}{dx^4}+2\tfrac{h^6}{1..6}\tfrac{d^6y_x}{dx^6}+\ldots\\
\Delta^2\tfrac{d^2y_x}{dx^2} &= h^2\tfrac{d^4y_x}{dx^4}+2\tfrac{h^4}{1..4}\tfrac{d^6y_x}{dx^6}+\ldots\\
\Delta^2\tfrac{d^4y_x}{dx^4} &= h^2\tfrac{d^6y_x}{dx^6}+\ldots\\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

vor, multiplicirt sie bez. mit $\alpha_2 h^2$, $\beta_2 h^4$, $\gamma_2 h^6$, etc., addirt und setzt

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \tfrac{1}{1..4}\\
\beta_2+\tfrac{2}{1..4}\alpha_2 &= -\tfrac{1}{8}\tfrac{1}{1..6}\\
\gamma_2+\tfrac{2}{1..4}\beta_2+\tfrac{2}{1..6}\alpha_2 &= -\tfrac{1}{8}\tfrac{9}{1..8}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

so bekommt man

$$\tfrac{1}{2}h^2\{y_{x+\frac{1}{2}h}+y_{x-\frac{1}{2}h}\}=\Delta^2\iint y_x dx^2+\alpha_2h^2\Delta^2y_x+\beta_2h^4\Delta^2\tfrac{d^2y_x}{dx^2}+\gamma_2h^6\Delta^2\tfrac{d^4y_x}{dx^4}+\ldots$$

und hieraus durch zweimalige Summation

$$\tfrac{1}{2}\{\Sigma^2y_{x+\frac{1}{2}h}+\Sigma^2y_{x-\frac{1}{2}h}\}=\tfrac{1}{h^2}\iint y_x dx^2+\alpha_2y_x+\beta_2h^2\tfrac{d^2y_x}{dx^2}+\gamma_2h^4\tfrac{d^4y_x}{dx^4}+\ldots$$

Die ersten Coefficienten werden hier

$$\alpha_2=\tfrac{1}{24},\quad \beta_2=-\tfrac{7}{1920},\quad \gamma_2=\tfrac{31}{193536},$$

Auf dieselbe Art kann man die Summenformel für jede beliebige Ordnung ableiten, allein das Gesetz der Fortschreitung der Coefficienten der Bedingungsgleichungen wird wieder mehr und mehr verwickelt, und ist schon bei den zuletzt entwickelten Gleichungen schwer zu erkennen.

Digitized by Google

8.

Um von den Ausdrücken für das arithmetische Mittel von zwei auf einander folgenden Summenfunctionen, die wir eben erhalten haben, zu den Ausdrücken für eine einzelne Summenfunction über zu gehen, dienen die Gleichungen

$$\Sigma y_{x+\frac{1}{2}h} - \Sigma y_{x-\frac{1}{2}h} = y_x$$
$$\Sigma^2 y_{x+\frac{1}{2}h} - \Sigma^2 y_{x-\frac{1}{2}h} = \Sigma y_x$$

und hiemit geben die im vor. Art. abgeleiteten Ausdrücke

$$\Sigma y_{x\pm\frac{1}{2}h} = \frac{1}{h}\int y_x dx \pm \tfrac{1}{2} y_x + \alpha_1 h \frac{dy_x}{dx} + \beta_1 h^3 \frac{d^3 y_x}{dx^3} + \gamma_1 h^5 \frac{d^5 y_x}{dx^5} + \ldots$$
$$\Sigma^2 y_{x\pm\frac{1}{2}h} = \frac{1}{h}\iint y_x dx^2 + \alpha_2 y_x + \beta_2 h^2 \frac{d^2 y_x}{dx^2} + \gamma_2 h^4 \frac{d^4 y_x}{dx^4} + \ldots$$
$$\pm \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{h}\int y_x dx + a_1 h \frac{dy_x}{dx} + b_1 h^3 \frac{d^3 y_x}{dx^3} + c_1 h^5 \frac{d^5 y_x}{dx^5} + \ldots\right\}$$

Die erste dieser beiden Summenformeln ist, wenn man die unteren Zeichen wählt, diejenige welche man gewöhnlich in den Lehrbüchern findet. Die vorstehenden Summenformeln müssen sich bez. mit denen des Art. 6 identisch machen lassen, und die Identificirungen werden eben so, wie bei den Differenzformeln angeführt wurde, ausgeführt.

9.

Um die Summenformeln auch durch ein Beispiel zu erläutern sei wieder

$$y = x^6$$

Substituirt man diesen Ausdruck, nachdem man davon die erforderlichen Integrale und Differentiale gebildet hat, so ergiebt sich

$$\Sigma y_x = \frac{x^7}{7h} - \frac{1}{4} h x^5 + \frac{7}{48} h^3 x^3 - \frac{31}{1344} h^5 x + c$$
$$\Sigma^2 y_x = \frac{x^8}{56 h^2} - \frac{1}{12} x^6 + \frac{1}{8} h^2 x^4 - \frac{5}{84} h^4 x^2 + \frac{c}{h} x + c'$$
$$\Sigma y_{x\pm\frac{1}{2}h} = \frac{x^7}{7h} \pm \frac{1}{2} x^6 + \frac{1}{2} h x^5 - \frac{1}{6} h^3 x^3 + \frac{1}{48} h^5 x + k$$
$$\Sigma^2 y_{x\pm\frac{1}{2}h} = \frac{x^8}{56 h^2} \pm \frac{x^7}{14 h} + \frac{1}{24} x^6 \mp \frac{1}{8} h x^5 - \frac{7}{64} h^2 x^4 \pm \frac{7}{96} h^3 x^3 + \frac{155}{2688} h^4 x^2$$
$$\mp \frac{31}{2688} h^5 x + \frac{k}{h} x + k'$$

wo c, c', k, k' die durch die Integrationen eingeführten willkührlichen Constanten bezeichnen, die unter gleichen Bedingungen in den beiden

Digitized by Google

letzten Gleichungen sehr wohl andere Werthe annehmen können, wie in den beiden ersten.

Um die vorstehenden allgemeinen Summenfunctionen erster und zweiter Ordnung der zum Beispiel erwählten Function bestimmt zu machen, will ich annehmen, dass

$$\Sigma' y_{\frac{1}{2}h} = 4h^6\,, \quad \Sigma'^2 y_{3h} = 5h^6$$

sein müsse, und diese Bedingungen gnügen, um die willkührlichen Constanten zu bestimmen. Substituiren wir in die erste Gleichung $x = \frac{1}{2}h$, und in die zweite mit Anwendung der oberen Zeichen $x = 2h$, so ergiebt sich bez.

$$\Sigma' y_{\frac{1}{2}h} = 4h^6 = \left\{\frac{78125}{896} - \frac{3125}{128} + \frac{875}{384} - \frac{155}{2688}\right\} h^6 + c$$
$$\Sigma' y_{\frac{1}{2}h} = 4h^6 = \left\{\frac{128}{7} + 32 + 16 - \frac{4}{3} + \frac{1}{21}\right\} h^6 + k$$

und hieraus folgt

$$c = -61h^6\,, \quad k = -61h^6$$

Nach der Substitution dieser wird

$$\Sigma' y_x = \frac{x^7}{7h} - \frac{1}{4}hx^5 + \frac{7}{48}h^3x^3 - \frac{31}{1344}h^5x - 61h^6$$

und

$$\Sigma' y_{x\pm\frac{1}{2}h} = \frac{x^7}{7h} \pm \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{2}hx^5 - \frac{1}{6}h^3x^3 + \frac{1}{42}h^5x - 61h^6$$

Die Substitution derselben Werthe der eben ermittelten Constanten in die Ausdrücke der Summenfunctionen zweiter Ordnung giebt

$$\Sigma'^2 y_x = \frac{x^8}{56h^2} - \frac{1}{42}x^6 + \frac{1}{8}h^2x^4 - \frac{5}{84}h^4x^2 - 61h^5x + c'$$
$$\Sigma'^2 y_{x\pm\frac{1}{2}h} = \frac{x^8}{56h^2} \pm \frac{x^7}{14h} + \frac{1}{24}x^6 \mp \frac{1}{8}hx^5 - \frac{7}{64}h^2x^4 \pm \frac{7}{96}h^3x^3$$
$$+ \frac{155}{2688}h^4x^2 \mp \frac{31}{2688}h^5x - 61h^5x + k'$$

und durch die obige zweite Bedingung wird nun

$$\Sigma'^2 y_{3h} = 5h^6 = \left\{\frac{6561}{56} - \frac{729}{12} + \frac{81}{8} - \frac{45}{84} - 183\right\} h^6 + c'$$

und

$$\Sigma'^2 y_{3h} = 5h^6 = \left\{\frac{390625}{14336} + \frac{78125}{4792} + \frac{15625}{4536} - \frac{3125}{256} - \frac{4375}{1024}\right.$$
$$\left. + \frac{875}{768} + \frac{3875}{10752} - \frac{155}{5376} - \frac{305}{2}\right\} h^6 + k'$$

und diese Gleichungen geben

$$c' = 122\,, \quad k' = \frac{487375}{2048}$$

Digitized by Google

womit

$$\Sigma^2 y_x = \frac{x^6}{56h^2} - \frac{1}{12}x^6 + \frac{1}{8}h^2x^4 - \frac{5}{84}h^4x^2 - 61h^5x + 122$$

und

$$\Sigma^2 y_{x\pm\frac{1}{2}h} = \frac{x^6}{56h^2} \pm \frac{x^5}{144h} + \frac{1}{24}x^6 \mp \frac{1}{8}hx^5 - \frac{7}{64}h^2x^4 \pm \frac{7}{96}h^3x^3 + \frac{155}{2688}h^4x^2 \mp \frac{31}{2688}h^5x - 61h^5x + \frac{187375}{2048}$$

erhalten wird.

Man kann nun durch diese Ausdrücke für jeden beliebigen Werth von x die Werthe der ersten und zweiten Summenfunction für x^6 berechnen. Es wird z. B. wenn man $h = 1$ setzt,

$\Sigma y_{-\frac{3}{2}} = -62$, $\Sigma y_{-\frac{1}{2}} = -61$, $\Sigma y_{\frac{1}{2}} = -61$, $\Sigma y_{\frac{3}{2}} = -60$,
$\Sigma^2 y_{-2} = +245$, $\Sigma^2 y_{-1} = 183$, $\Sigma^2 y_0 = 122$, $\Sigma^2 y_1 = 61$, $\Sigma^2 y_2 = 1$,
$\Sigma y_{-2} = -\frac{2317}{32}$, $\Sigma y_{-1} = -\frac{3905}{64}$, $\Sigma y_0 = -61$, $\Sigma y_1 = -\frac{3903}{64}$, $\Sigma y_2 = -\frac{1587}{32}$,
$\Sigma^2 y_{-\frac{3}{2}} = \frac{437263}{2048}$, $\Sigma^2 y_{-\frac{1}{2}} = \frac{312303}{2048}$, $\Sigma^2 y_{\frac{1}{2}} = \frac{187375}{2048}$, $\Sigma^2 y_{\frac{3}{2}} = \frac{62479}{2048}$.

Um diese durch die speciellen Werthe der Function zu prüfen erhalten wir

x	$\Sigma^2 y$	Σy	y
-2	245		64
		-62	
-1	183		1
		-61	
0	122		0
		-61	
$+1$	61		1
		-60	
2	1		64
		$+4$	
3	5		729

und

x	$\Sigma^2 y$	Σy	y
		$-\frac{4634}{64}$	
$-\frac{3}{2}$	$\frac{437263}{2048}$		$\frac{729}{64}$
		$-\frac{3905}{64}$	
$-\frac{1}{2}$	$\frac{312303}{2048}$		$\frac{1}{64}$
		$-\frac{3904}{64}$	
$+\frac{1}{2}$	$\frac{187375}{2048}$		$\frac{1}{64}$
		$-\frac{3903}{64}$	
$\frac{3}{2}$	$\frac{62479}{2048}$		$\frac{729}{64}$
		$-\frac{3174}{64}$	

mit den obigen Werthen übereinstimmend. Die Summengrössen des zweiten Täfelchens sind auch die, welche sich durch Interpolation in die Mitte aus denen des ersten ergeben, welches nothwendig so sein muss.

10.

Bezeichnet man nicht nur mit Σ^n die Anzahl n der auszuführenden Summationen, sondern auch mit $\int^n$ die Anzahl n der auszuführenden Integrationen, so geben die Ausdrücke für die beiden ersten Summatio-

Digitized by Google

nen, die im Art. 6 entwickelt worden sind, zu erkennen, dass wir allgemein

$$\Sigma^n y_x = \frac{1}{h^n}\int^n y_x dx^n + \frac{a_n}{h^{n-2}}\int^{n-2} y_x dx^{n-2} + \frac{b_n}{h^{n-4}}\int^{n-4} y_x dx^{n-4} + \text{etc.}$$

setzen dürfen, wenn wir $\int$ in d verwandeln, so wie der Index von $\int$ negativ wird. Vergleichen wir ferner diesen Ausdruck mit den Ausdrücken der Differenzen, die im Art. 2 abgeleitet wurden, so zeigt sich, dass er unter der Bedingung, dass man für n irgend eine negative ganze Zahl substituirt, und auch Δ^n statt Σ^{-n} schreibt, diese Ausdrücke auch darstellt.

Da dieser Ausdruck für alle stetigen Functionen Gültigkeit hat, so braucht man, um die Ausdrücke für die Coefficienten a_n, b_n, etc. zu finden, nur irgend eine stetige Function, die auf keine constanten Differenzen hinführt, darin zu substituiren. Die Function, die dafür am Passendsten, und stets zu diesem Zweck angewandt worden ist, ist $y_x = e^x$, wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bedeutet. Man findet leicht, dass jetzt

$$\Sigma^m y_x = \frac{e^x}{(e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h})^m}$$

ist, denn dieser Ausdruck gnügt der Gleichung (2), der Fundamentalgleichung, welcher die Summen unterliegen. Derselbe Ausdruck gnügt aber, wenn wir für m irgend eine ganze negative Zahl substituiren, und wie vorher Δ^m für Σ^{-m} schreiben, auch der Gleichung (1), der Fundamentalgleichung für die Differenzen. Der vorstehende Ausdruck gilt also von $m = -\infty$ bis $m = +\infty$, und dasselbe gilt auch, abgesehen von den willkührlichen Constanten, auf welche wir in dieser Ableitung keine Rücksicht zu nehmen brauchen, von dem folgenden Ausdruck

$$\int^m y_x dx^m = e^x$$

welcher nicht nur alle Integrale, sondern auch, wenn man m negativ macht, alle Differentiale der vorgegebenen Function darstellt. Substituirt man nun diese Ausdrücke in den oben aufgestellten allgemeinen Ausdruck für die Summen- und Differenzfunctionen aller Ordnungen, so bekommt man sogleich

Digitized by Google

$$\frac{h^n}{(e^{\frac{1}{2}h}-e^{-\frac{1}{2}h})^n} = 1 + a_n h^2 + b_n h^4 + c_n h^6 + \ldots$$

und hieraus ergiebt sich der folgende

1. Satz.

Wenn n irgend eine ganze, positive oder negative, Zahl, und y_x irgend eine stetige Function von x bezeichnet, so ist

$$\Sigma^n y_x = (e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h})^{-n}$$

wenn man nach der Entwickelung der rechten Seite in eine nach den aufsteigenden Potenzen von h fortschreitende Reihe allenthalben

$$h^{-n+p} \text{ mit } \int^{n-p} y_x dx^{n-p} \text{ multiplicirt}$$

und wo Σ^n und $\int$ mit negativen Indices behaftet vorkommen, dafür bez. Δ^n und d^n mit denselben positiven Indices versehen, ansetzt.

11.

Die Coefficienten der Entwickelung von $(e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h})^{-n}$ kann man auf die folgende Art erhalten. Es ist einestheils

$$\frac{d \cdot \log (e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h})^{-n}}{dh} = -\frac{n}{2} \frac{e^{\frac{1}{2}h} + e^{-\frac{1}{2}h}}{e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h}}$$

und anderntheils zufolge des vor. Art.

$$\frac{d \cdot \log (e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h})^{-n}}{dh} = -\frac{n + (n-2)\, a_n h^2 + (n-4)\, b_n h^4 + \ldots}{h + a_n h^3 + b_n h^5 + \ldots}$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke einander gleich, nachdem die Reihen

$$\tfrac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}h} + e^{-\frac{1}{2}h}) = 1 + \frac{1}{2^2 . 2} h^2 + \frac{1}{2^4 . 2 . 3 . 4} h^4 + \frac{1}{2^6 . 2 . . 6} h^6 + \ldots$$

$$e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h} = h + \frac{1}{2^2 . 2 . 3} h^3 + \frac{1}{2^4 . 2 . . 5} h^5 + \frac{1}{2^6 . 2 . . 7} h^7 + \ldots$$

substituirt worden sind, so bekommt man nach der Multiplication übers Kreutz die folgende identische Gleichung

$$\begin{aligned} nh + \tfrac{n}{2^2 . 2} h^3 + \tfrac{n}{2^4 . 2 . 3 . 4} h^5 + \tfrac{n}{2^6 . 2 . . 6} h^7 + \ldots \\ + a_n n h^3 + a_n \tfrac{n}{2^2 . 2} h^5 + a_n \tfrac{n}{2^4 . 2 . 3 . 4} h^7 + \ldots \\ + b_n n h^5 + b_n \tfrac{n}{2^2 . 2} h^7 + \ldots \\ + c_n n h^7 + \ldots \\ + \ldots \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$= nh + \frac{n}{2^2.2.3}h^3 + \frac{n}{2^4.2..5}h^5 + \frac{n}{2^6.2..7}h^7 + \ldots$$
$$+ a_n(n-2)h^3 + a_n\frac{n-2}{2^2.2.3}h^5 + a_n\frac{n-2}{2^4.2..5}h^7 + \ldots$$
$$+ b_n(n-4)h^5 + b_n\frac{n-4}{2^2.2.3}h^7 + \ldots$$
$$+ c_n(n-6)h^7 + \ldots$$
$$+ \ldots$$

woraus

$$a_n + \frac{n}{2^2.2.3} = 0$$
$$2b_n + \frac{n+4}{2^2.2.3}a_n + \frac{2n}{2^4.2..5} = 0$$
$$3c_n + \frac{n+2}{2^2.2.3}b_n + \frac{2n+4}{2^4.2..5}a_n + \frac{3n}{2^6.2..7} = 0$$
$$4d_n + \frac{n+3}{2^2.2.3}c_n + \frac{2n+2}{2^4.2..5}b_n + \frac{3n+1}{2^6.2..7}a_n + \frac{4n}{2^8.2..9} = 0$$
$$\text{etc,} \qquad \text{etc.}$$

folgt, wo das Gesetz des Fortganges offenbar ist. Diese Gleichungen gelten sowohl für negative wie für positive Werthe von n, und geben für $n = -1$ die Coefficienten explicite wie folgt:

$$a_{-1} = \frac{1}{2^2.2.3}, \quad b_{-1} = \frac{1}{2^4.2..5}, \quad c_{-1} = \frac{1}{2^6.2..7}, \quad d_{-1} = \frac{1}{2^8.2..9}, \text{ etc.}$$

mit dem Ausdruck des Art. 2 für Ay_x übereinstimmend. Berechnet man ferner durch die vorstehenden Gleichungen die Coefficienten für die Differenz- und Summenfunctionen, die im Vorhergehenden einzeln abgeleitet worden sind, so wird man ebenfalls vollständige Uebereinstimmung finden.

12.

Die Coefficienten für $n = -1$ haben wir schon im vorigen Art. explicite gegeben, dieselben kann man aber für jeden negativen Werth von n explicite auf folgende Art darstellen. Entwickelt man zuerst die $n$te Potenz von $e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h}$ durch das Binom, so findet man

$$(e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h})^n = e^{\frac{1}{2}nh} - \frac{n}{1}e^{\frac{1}{2}(n-2)h} + \frac{n.n-1}{1.2}e^{\frac{1}{2}(n-4)h} \mp \ldots$$

und wenn man hierauf für die Exponentialfunctionen ihre Reihen setzt,

Digitized by Google

$$(e^{\frac{1}{2}h}-e^{-\frac{1}{2}h})^n = \left\{1-\frac{n}{1}+\frac{n.n-1}{1.2}-\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\pm\ \dots\right\}$$
$$+\frac{1}{2}\left\{n-\frac{n}{1}(n-2)+\frac{n.n-1}{1.2}(n-4)-\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(n-6)\pm\dots\right\}h$$
$$+\frac{1}{2^2.2}\left\{n^2-\frac{n}{1}(n-2)^2+\frac{n.n-1}{1.2}(n-4)^2-\frac{n.n-1..n-2}{1.2.3}(n-6)^2\pm\dots\right\}h^2$$
$$\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots$$
$$+\frac{1}{2^p.2.3..p}\left\{n^p-\frac{n}{1}(n-2)^p+\frac{n.n-1}{1.2}(n-4)^p-\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(n-6)^p\pm\dots\right\}h^p$$
$$+\ \text{etc.}$$

Aber es ist an sich klar, dass die Entwickelung der Function linker Hand mit h^n anfangen muss, und hierauf nur Glieder folgen können, die mit h^{n+2}, h^{n+4}, etc. multiplicirt sind, es ist daher nothwendig,

$$0 = n^p - \frac{n}{1}(n-2)^p + \frac{n.n-1}{1.2}(n-4)^p - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(n-6)^p \pm \dots.$$

wenn $p<n$, und wenn $p>n$ und zugleich $p-n$ ungrade ist, da ferner einleuchtend ist, dass in dieser Reihe der Coefficient von h^n gleich Eins sein muss, so wird

$$2^n.2.3\dots n = n^n - \frac{n}{1}(n-2)^n + \frac{n.n-1}{1.2}(n-4)^n - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(n-6)^n \pm \dots$$

Die vorstehende Entwickelung giebt nun unmittelbar

$$a_{-n} = \frac{1}{2^{n+2}.2.3..n+2}\left\{n^{n+2} - \frac{n}{1}(n-2)^{n+2} + \frac{n.n-1}{1.2}(n-4)^{n+2} \mp \dots\right\}$$
$$b_{-n} = \frac{1}{2^{n+4}.2.3..n+4}\left\{n^{n+4} - \frac{n}{1}(n-2)^{n+4} + \frac{n.n-1}{1.2}(n-4)^{n+4} \mp \dots\right\}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

für negative Werthe von n würden sich diese Ausdrücke in unendliche, divergirende Reihen verwandeln. Diese Ausdrücke, die für jedes positive n aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestehen, können noch etwas zusammen gezogen werden, denn bei genauer Betrachtung findet man, dass das letzte Glied dem ersten, das vorletzte dem zweiten u. s. w. gleich ist, berücksichtigt man diese Eigenschaft, so erhält man

1) wenn n grade ist,

$$a_{-n} = \frac{1}{2^{n+1}.2.3..n+2}\left\{n^{n+2} - \frac{n}{1}(n-2)^{n+2} + \frac{n.n-1}{1.2}(n-4)^{n+2} \mp \dots \pm \frac{n.n-1..\frac{n+4}{2}}{1.2..\frac{n-2}{2}}2^{n+2}\right\}$$
$$b_{-n} = \frac{1}{2^{n+3}.2.3..n+4}\left\{n^{n+4} - \frac{n}{1}(n-2)^{n+4} + \frac{n.n-1}{1.2}(n-4)^{n+4} \mp \dots \pm \frac{n.n-1..\frac{n+6}{2}}{1.2..\frac{n-2}{2}}2^{n+4}\right\}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Digitized by Google

2) wenn n ungrade ist,

$$a_{-n} = \frac{1}{2^{n+1}.1.2.3..n+2}\left\{n^{n+2} - \frac{n}{1}(n-2)^{n+2} + \frac{n.n-1}{1.2}(n-4)^{n+2} \mp .. \pm \frac{n.n-1..\frac{n+3}{2}}{1.2..\frac{n-1}{2}}\right\}$$

$$b_{-n} = \frac{1}{2^{n+3}.1.2.3..n+1}\left\{n^{n+4} - \frac{n}{1}(n-2)^{n+4} + \frac{n.n-1}{1.2}(n-4)^{n+4} \mp .. \pm \frac{n.n-1..\frac{n+3}{2}}{1.2..\frac{n-1}{2}}\right\}$$

etc. etc.

13.

Von den Coefficienten a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, etc. kann man auf einfache Weise zu allen andern, für welche n negativ ist, und eben so von a_1, b_1, c_1, etc. zu allen anderen, für welche n positiv ist, übergehen. Es ist dem Vorhergehenden zufolge

$$\frac{h^n}{(e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h})^n} = 1 + a_n h^2 + b_n h^4 + c_n h^6 + \ldots$$

$$\frac{h}{e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h}} = 1 + a_1 h^2 + b_1 h^4 + c_1 h^6 + \ldots$$

$$h^{-n}(e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h})^n = 1 + a_{-n} h^2 + b_{-n} h^4 + c_{-n} h^6 + \ldots$$

$$h^{-1}(e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h}) = 1 + a_{-1} h^2 + b_{-1} h^4 + c_{-1} h^6 + \ldots$$

die beiden ersten geben, wenn wir die rechten Seiten derselben für einen Augenblick bez. mit A und B bezeichnen

$$A = B^n$$

und die beiden letzten geben dieselbe Gleichung, wenn in derselben wieder n positiv betrachtet wird. Aus dieser Gleichung ergiebt sich durch die Differentiation

$$BdA = nAdB$$

und es wird also identisch

$$\{1 + a_1 h^2 + b_1 h^4 + c_1 h^6 + \ldots\}\{a_n + 2b_n h^2 + 3c_n h^4 + \ldots\} =$$
$$n\{1 + a_n h^2 + b_n h^4 + c_n h^6 + \ldots\}\{a_1 + 2b_1 h^2 + 3c_1 h^4 + \ldots\}$$

und dieselbe Gleichung findet statt, wenn man alle Indices negativ macht, den Factor n aber positiv lässt. Multiplicirt man nun die Producte aus, und vergleicht die gleichartigen Glieder mit einander, so erhält man die folgenden Gleichungen,

Digitized by Google

$$a_{\pm n} = na_{\pm 1}$$
$$b_{\pm n} = nb_{\pm 1} + \frac{n-1}{2} a_{\pm 1} a_{\pm n}$$
$$c_{\pm n} = nc_{\pm 1} + \frac{2n-1}{3} b_{\pm 1} a_{\pm n} + \frac{n-2}{3} a_{\pm 1} b_{\pm n}$$
$$d_{\pm n} = nd_{\pm 1} + \frac{3n-1}{4} c_{\pm 1} a_{\pm n} + \frac{2n-2}{4} b_{\pm 1} b_{\pm n} + \frac{n-3}{4} a_{\pm 1} c_{\pm n}$$
etc. etc.

wo das Gesetz des Fortganges offenbar ist, und durch welche man die Coefficienten für jeden Werth von n aus denen für ± 1 berechnen kann.

14.

Aus den Summenformeln des Art. 7 geht der folgende allgemeine Ausdruck hervor,

$$\tfrac{1}{2}\{\Sigma^n y_{x+\frac{1}{2}h} + \Sigma^n y_{x-\frac{1}{2}h}\} = \frac{1}{h^n}\int^n y_x dx^n + \frac{\alpha_n}{h^{n-2}}\int^{n-2} y_x dx^{n-2} + \frac{\beta_n}{h^{n-4}}\int^{n-4} y_x dx^{n-4} + \text{etc.}$$

wo ebenfalls n von $-\infty$ bis $+\infty$ ausgedehnt werden kann, wenn man die oben erklärten Verwandelungen von Σ in Δ und $\int$ in d vornimmt. Aus dem allgemeinen Summenausdruck des Art. 10 für die Function $y_x = e^x$ folgt leicht, dass

$$\tfrac{1}{2}\{\Sigma^m y_{x+\frac{1}{2}h} + \Sigma^m y_{x-\frac{1}{2}h}\} = \tfrac{1}{2}\frac{e^{\frac{1}{2}h} + e^{-\frac{1}{2}h}}{(e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h})^m} e^x$$
$$= -\frac{e^x}{m-1} \frac{1}{\frac{d}{dh}(e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h})^{m-1}}$$

substituiren wir sowohl diesen wie den oben gegebenen allgemeinen Ausdruck $\int^m y_x dx^m = e^x$ in die vorstehende Gleichung, so wird

$$-\frac{h^n}{n-1} \frac{1}{\frac{d}{dh}(e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h})^{n-1}} = 1 + \alpha_n h^2 + \beta_n h^4 + \gamma_n h^6 + \ldots$$

und hiemit erhalten wir den folgenden

2. Satz.

Wenn n irgend eine ganze, positive oder negative, Zahl, und y_x irgend eine stetige Function von x bezeichnet, so wird

$$\tfrac{1}{2}\{\Sigma^n y_{x+\frac{1}{2}h} + \Sigma^n y_{x-\frac{1}{2}h}\} = -\frac{h^n}{n-1} \frac{1}{\frac{d}{dh}(e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h})^{n-1}}$$

Digitized by Google

wenn man nach der Entwickelung der rechten Seite in eine nach den aufsteigenden Potenzen von h fortschreitende Reihe allenthalben

$$h^{-n+p} \text{ mit } \int^{n-p} y_x dx^{n-p} \text{ multiplicirt}$$

und, wo an Σ und $\int$ negative Indices vorkommen, die oben erklärten Verwandelungen vornimmt.

Die Coefficienten α_n, β_n, etc. sind jetzt sehr leicht zu erhalten. Die Gleichung

$$\frac{1}{(e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h})^n} = \frac{1}{h^n} + \frac{a_n}{h^{n-2}} + \frac{b_n}{h^{n-4}} + \frac{c_n}{h^{n-6}} + \ldots$$

giebt durch die Differentiation, und nachdem man n in $n-1$ verwandelt hat,

$$-\frac{h^n}{n-1} \frac{d\frac{1}{(e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h})^{n-1}}}{dh} = 1 + \frac{n-3}{n-1} a_{n-1} h^2 + \frac{n-5}{n-1} b_{n-1} h^4 + \frac{n-7}{n-1} c_{n-1} h^6 + \ldots$$

und hieraus folgt sogleich in Verbindung mit der obigen Bedingungsgleichung

$$\alpha_n = \frac{n-3}{n-1} a_{n-1}, \quad \beta_n = \frac{n-5}{n-1} b_{n-1}, \quad \gamma_n = \frac{n-7}{n-1} c_{n-1}, \text{ etc.}$$

welche jedoch für den Fall $n = +1$ ungültig werden. Für diesen Fall wird die Bedingungsgleichung

$$\frac{h}{2} \frac{e^{\frac{1}{2}h} + e^{-\frac{1}{2}h}}{e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h}} = 1 + \alpha_1 h^2 + \beta_1 h^4 + \gamma_1 h^6 + \ldots$$

aber man findet leicht dass identisch

$$\frac{h}{e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h}} = \frac{h}{2} \frac{e^{\frac{1}{2}h} + e^{-\frac{1}{2}h}}{e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h}} - \frac{h}{2} \frac{e^{\frac{1}{2}h} + e^{-\frac{1}{2}h}}{e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h}}$$

ist. Nun giebt die vorstehende Gleichung, wenn man darin $\frac{1}{2}h$ statt h substituirt,

$$\frac{h}{4} \frac{e^{\frac{1}{4}h} + e^{-\frac{1}{4}h}}{e^{\frac{1}{4}h} - e^{-\frac{1}{4}h}} = 1 + \frac{\alpha_1}{2^2} h^2 + \frac{\beta_1}{2^4} h^4 + \frac{\gamma_1}{2^6} h^6 + \ldots$$

und oben hatten wir

$$\frac{h}{e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h}} = 1 + a_1 h^2 + b_1 h^4 + c_1 h^6 + \ldots$$

Wir erhalten daher die identische Gleichung

Digitized by Google

$$1 + a_1 h^2 + b_1 h^4 + c_1 h^6 + \ldots =$$
$$2 + \frac{\alpha_1}{2} h^2 + \frac{\beta_1}{2^3} h^4 + \frac{\gamma_1}{2^5} h^6 + \ldots,$$
$$- 1 - \alpha_1 h^2 - \beta_1 h^4 - \gamma_1 h^6 - \ldots$$

und hieraus folgt

$$\alpha_1 = -2a_1, \quad \beta_1 = -\frac{2^3}{2^3-1} b_1, \quad \gamma_1 = -\frac{2^5}{2^5-1} c_1, \text{ etc.}$$

wo wieder das Gesetz des Fortganges offenbar ist.

Ich führe hiezu noch an, dass wenn man in der allgemeinen Gleichung des Art. 10 $n=0$ macht, man $a_0=0$, $b_0=0$, etc. erhält, und die Gleichung folglich in die identische $y_x = y_x$ übergeht. Setzt man hingegen in der allgemeinen Gleichung dieses Art. $n=0$, so ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2}\{y_{x+\frac{1}{2}h} + y_{x-\frac{1}{2}h}\} = \tfrac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}h} + e^{-\frac{1}{2}h})$$

und es wird folglich

$$\alpha_0 = \frac{1}{4.1.2}, \quad \beta_0 = \frac{1}{16\ldots4}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{64.4\ldots6}, \text{ etc.}$$

mit dem Ausdruck für diese Grösse, welcher im Art. 3 vorkommt, identisch.

15.

Es ist nun ein Leichtes die Differentiale durch die Differenzen darzustellen. Nehmen wir zuerst die Gleichungen des Art. 2 vor, die wir zufolge der allgemeinen Gleichung des Art. 10 wie folgt schreiben können

$$\begin{aligned}
\Delta y_x &= h\frac{dy_x}{dx} + a_{-1} h^3 \frac{d^3 y_x}{dx^3} + b_{-1} h^5 \frac{d^5 y_x}{dx^5} + c_{-1} h^7 \frac{d^7 y_x}{dx^7} + \ldots \\
\Delta^2 y_x &= h^2 \frac{d^2 y_x}{dx^2} + a_{-2} h^4 \frac{d^4 y_x}{dx^4} + b_{-2} h^6 \frac{d^6 y_x}{dx^6} + \ldots \\
\Delta^3 y_x &= h^3 \frac{d^3 y_x}{dx^3} + a_{-3} h^5 \frac{d^5 y_x}{dx^5} + b_{-3} h^7 \frac{d^7 y_x}{dx^7} + \ldots \\
\Delta^4 y_x &= h^4 \frac{d^4 y_x}{dx^4} + a_{-4} h^6 \frac{d^6 y_x}{dx^6} + \ldots \\
\Delta^5 y_x &= h^5 \frac{d^5 y_x}{dx^5} + a_{-5} h^7 \frac{d^7 y_x}{dx^7} + \ldots \\
\text{etc.} & \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Multiplicirt man die dritte dieser mit $a^{(-1)}$, die fünfte mit $b^{(-1)}$, u.s.w., addirt diese zur ersten und setzt

$$a^{(-1)} + a_{-1} = 0$$
$$b^{(-1)} + a_{-3} a^{(-1)} + b_{-1} = 0$$
$$c^{(-1)} + a_{-5} b^{(-1)} + b_{-3} a^{(-1)} + c_{-1} = 0$$
$$\text{etc.}$$

Digitized by Google

wo das Gesetz des Fortganges offenbar ist, so wird

$$h\frac{dy_x}{dx} = \Delta y_x + a^{(-1)}\Delta^3 y_x + b^{(-1)}\Delta^5 y_x + c^{(-1)}\Delta^7 y_x + \ldots$$

Behandelt man die zweite, vierte u. s. w. Gleichung ebenso, und setzt

$$\begin{aligned} a^{(-2)} + a_{-2} &= 0 \\ b^{(-2)} + a_{-4}a^{(-2)} + b_{-2} &= 0 \\ c^{(-2)} + a_{-6}b^{(-2)} + b_{-4}a^{(-2)} + c_{-2} &= 0 \end{aligned}$$

etc.

so wird

$$h^2\frac{d^2y_x}{dx^2} = \Delta^2 y_x + a^{(-2)}\Delta^4 y_x + b^{(-2)}\Delta^6 y_x + c^{(-2)}\Delta^8 y_x + \ldots$$

und auf diese Weise kann man jedes beliebige Differential durch Differenzen ausdrücken.

Die Ausdrücke des Art. 3, oder die allgemeine Gleichung des Art. 14 geben zu anderen Ausdrücken der Differentiale durch die Differenzen Anlass, und hier können wir wie früher die Summe der Functionswerthe $y_{x+\frac{1}{2}h}$ und $y_{x-\frac{1}{2}h}$ mit aufnehmen. Wir erhalten zuerst die folgenden Gleichungen,

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\{y_{x+\frac{1}{2}h} + y_{x-\frac{1}{2}h}\} &= y_x + \alpha_0 h^2\frac{d^2y_x}{dx^2} + \beta_0 h^4\frac{d^4y_x}{dx^4} + \gamma_0 h^6\frac{d^6y_x}{dx^6} + \ldots \\
\tfrac{1}{2}\{\Delta y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta y_{x-\frac{1}{2}h}\} &= h\frac{dy_x}{dx} + \alpha_{-1}h^3\frac{d^3y_x}{dx^3} + \beta_{-1}h^5\frac{d^5y_x}{dx^5} + \ldots \\
\tfrac{1}{2}\{\Delta^2 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^2 y_{x-\frac{1}{2}h}\} &= h^2\frac{d^2y_x}{dx^2} + \alpha_{-2}h^4\frac{d^4y_x}{dx^4} + \beta_{-2}h^6\frac{d^6y_x}{dx^6} + \ldots \\
\tfrac{1}{2}\{\Delta^3 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^3 y_{x-\frac{1}{2}h}\} &= h^3\frac{d^3y_x}{dx^3} + \alpha_{-3}h^5\frac{d^5y_x}{dx^5} + \ldots \\
\tfrac{1}{2}\{\Delta^4 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^4 y_{x-\frac{1}{2}h}\} &= h^4\frac{d^4y_x}{dx^4} + \alpha_{-4}h^6\frac{d^6y_x}{dx^6} + \ldots
\end{aligned}$$

etc. etc.

und auf dieselbe Art wie vorher findet man hieraus

$$y_x = \tfrac{1}{2}\{y_{x+\frac{1}{2}h}+y_{x-\frac{1}{2}h}\} + \alpha^{(0)}\tfrac{1}{2}\{\Delta^2 y_{x+\frac{1}{2}h}+\Delta^2 y_{x-\frac{1}{2}h}\} + \beta^{(0)}\tfrac{1}{2}\{\Delta^4 y_{x+\frac{1}{2}h}+\Delta^4 y_{x-\frac{1}{2}h}\} + \ldots$$

wo

$$\begin{aligned} \alpha^{(0)} + \alpha_0 &= 0 \\ \beta^{(0)} + \alpha_{-2}\alpha^{(0)} + \beta_0 &= 0 \\ \gamma^{(0)} + \alpha_{-4}\beta^{(0)} + \beta_{-2}\alpha^{(0)} + \gamma_0 &= 0 \end{aligned}$$

etc.

ist. Diese Gleichung ist eine specielle Interpolationsformel, und dient für den Fall, dass man zwischen irgend zwei Functionswerthen in die

Digitized by Google

Mitte interpoliren will. Sie ist mit der bekannten, die gewöhnlich die Gaussische benannt wird, obgleich sie schon vor Gauss vorhanden war, identisch. Man erkennt dieses sogleich aus den numerischen Werthen der Coefficienten. Durch Hülfe der oben gegebenen Werthe von α_0, β_0, etc. geben die vorstehenden Bedingungsgleichungen

$$\alpha^{(0)} = -\tfrac{1}{8}\,,\quad \beta^{(0)} = \tfrac{3}{128}\,,\quad \gamma^{(0)} = -\tfrac{45}{3072}\,,\quad \text{etc.}$$

Durch Fortsetzung des angegebenen Verfahrens erhält man ferner

$$h\tfrac{dy_x}{dx} = \tfrac{1}{2}\left\{\Delta y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta y_{x-\frac{1}{2}h}\right\} + \alpha^{(-1)}\,\tfrac{1}{2}\left\{\Delta^3 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^3 y_{x-\frac{1}{2}h}\right\} + \ldots$$

wo

$$\begin{aligned} \alpha^{(-1)} + \alpha_{-1} &= 0 \\ \beta^{(-1)} + \alpha_{-3}\,\alpha^{(-1)} + \beta_{-1} &= 0 \\ \gamma^{(-1)} + \alpha_{-5}\,\beta^{(-1)} + \beta_{-3}\,\alpha^{(-1)} + \gamma_{-1} &= 0 \end{aligned}$$

etc.

ferner

$$h^2\tfrac{d^2y_x}{dx^2} = \tfrac{1}{2}\left\{\Delta^2 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^2 y_{x-\frac{1}{2}h}\right\} + \alpha^{(-2)}\,\tfrac{1}{2}\left\{\Delta^4 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^4 y_{x-\frac{1}{2}h}\right\} + \ldots$$

wo

$$\begin{aligned} \alpha^{(-2)} + \alpha_{-2} &= 0 \\ \beta^{(-2)} + \alpha_{-4}\,\alpha^{(-2)} + \beta_{-2} &= 0 \\ \gamma^{(-2)} + \alpha_{-6}\,\beta^{(-2)} + \beta_{-4}\,\alpha^{(-2)} + \gamma_{-2} &= 0 \end{aligned}$$

etc.

und dieses Verfahren kann man fortsetzen soweit man will.

16.

Im vor. Art. waren wir schon auf eine specielle Interpolationsformel gekommen, allein man kann mehrere allgemeine aus den vorhergehenden Ausdrücken leicht ableiten. Zu dem Ende sei kh ein Increment von x, welches nicht grösser sein darf, als dass die Entwickelung der Function durch das Taylorsche Theorem eine convergirende Reihe bildet, eine Bedingung, die man bei stetigen Functionen immer erfüllen kann, so erhalten wir die folgende allgemeine Gleichung,

$$y_{x+kh} = y_x + \tfrac{dy_x}{dx}\,kh + \tfrac{d^2y_x}{dx^2}\,\tfrac{k^2h^2}{1.2} + \tfrac{d^3y_x}{dx^3}\,\tfrac{k^3h^3}{1.2.3} + \ldots$$

Digitized by Google

Unter der Voraussetzung nun, dass in der Interpolationsformel nur solche Differenzen vorkommen sollen, die sich durch die Substitutionen von x, $x+h$, $x+2h$, etc., $x-h$, $x-2h$, etc. unmittelbar ergeben, und dass diese Differenzen in dem Schema des Art. 1 in horizontaler Reihe stehen sollen, bekommt man durch die Substitution der Ausdrücke des vor. Art. sogleich zwei Interpolationsformeln, und zwar für die eine derselben zuerst

$$y_{x+kh} = \tfrac{1}{2}\{y_{x+\frac{1}{2}h}+y_{x-\frac{1}{2}h}\}+A_1\Delta y_x+A_2\tfrac{1}{2}\{\Delta^2 y_{x+\frac{1}{2}h}+\Delta^2 y_{x-\frac{1}{2}h}\}+A_3\Delta^3 y_x + A_4\tfrac{1}{2}\{\Delta^4 y_{x+\frac{1}{2}h}+\Delta^4 y_{x-\frac{1}{2}h}\}+\ldots$$

wo

$$\begin{aligned} A_1 &= k \\ A_2 &= \frac{k^2}{1.2} + \alpha^{(0)} \\ A_3 &= \frac{k^3}{1.2.3} + k\,\alpha^{(-1)} \\ A_4 &= \frac{k^4}{1\ldots4} + \frac{k^2}{1.2}\,\alpha^{(-2)} + \beta^{(0)} \\ A_5 &= \frac{k^5}{1\ldots5} + \frac{k^3}{1.2.3}\,\alpha^{(-3)} + k\,b^{(-1)} \end{aligned}$$

etc.

die die Substitution von $x+\frac{1}{2}h$, $x+\frac{3}{2}h$, etc. voraussetzt, und die des vor. Art. als speciellen Fall für $k=0$ in sich fasst. Wir bringen sie auf die verlangten Substitutionen hin, wenn wir $x+\frac{1}{2}h$ statt x, und $k-\frac{1}{2}$ statt k schreiben. Sie wird damit

$$y_{x+kh} = \tfrac{1}{2}\{y_{x+h}+y_x\}+B_1\Delta y_{x+\frac{1}{2}h}+B_2\tfrac{1}{2}\{\Delta^2 y_{x+h}+\Delta^2 y_x\}+B_3\Delta^3 y_{x+\frac{1}{2}h}+\ldots$$

wo

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{2k-1}{2} \\ B_2 &= \frac{(2k-1)^2}{2^2.2} + \alpha^{(0)} \\ B_3 &= \frac{(2k-1)^3}{2^3.2.3} + \frac{2k-1}{2}\,\alpha^{(-1)} \\ B_4 &= \frac{(2k-1)^4}{2^4.2.3.4} + \frac{(2k-1)^2}{2^2.2} + \beta^{(0)} \\ B_5 &= \frac{(2k-1)^5}{2^5.2\ldots5} + \frac{(2k-1)^3}{2^3.2.3}\,\alpha^{(-3)} + \frac{2k-1}{2}\,b^{(-1)} \end{aligned}$$

etc.

Eine andere Interpolationsformel ergiebt sich, wenn die eben nicht angewandten Ausdrücke der Differentiale in dieselbe Gleichung substituirt werden. Nemlich

$$y_{x+kh} = y_x + C_1\tfrac{1}{2}\{\Delta y_{x+\frac{1}{2}h}+\Delta y_{x-\frac{1}{2}h}\}+C_2\Delta^2 y_x+C_3\tfrac{1}{2}\{\Delta^3 y_{x+\frac{1}{2}h}+\Delta^3 y_{x-\frac{1}{2}h}\}+\ldots$$

Digitized by Google

wo

$$C_1 = k$$
$$C_2 = \frac{k^2}{1.2}$$
$$C_3 = \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k}{1}\alpha^{(-1)}$$
$$C_4 = \frac{k^4}{1.2.3.4} + \frac{k^2}{1.2}\alpha^{(-2)}$$
$$C_5 = \frac{k^5}{1\ldots5} + \frac{k^3}{1.2.3}\alpha^{(-3)} + \frac{k}{1}\beta^{(-1)}$$
$$C_6 = \frac{k^6}{1\ldots6} + \frac{k^4}{1\ldots4}\alpha^{(-4)} + \frac{k^2}{1.2}b^{(-2)}$$

etc.

die man ebenfalls beliebig fortsetzen kann.

17.

Man kann zwar die Coefficienten der beiden eben abgeleiteten Interpolationsformeln durch die angegebenen Bedingungsgleichungen in beliebiger Anzahl berechnen, allein diese Coefficienten lassen sich explicite auf einfachere Art ausdrücken. Man braucht, um diese Ausdrücke zu erhalten, nur wieder die Function $y_x = e^x$ anzuwenden. Wir haben oben erhalten, wenn wir Σ in Δ verwandeln,

$$\tfrac{1}{2}\{\Delta^m y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^m y_{x-\frac{1}{2}h}\} = \tfrac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}h} + e^{-\frac{1}{2}h})(e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h})^m e^x$$
$$\Delta^m y_x = (e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h})^m e^x$$

Setzen wir, um zusammenziehen zu können,

$$2u = e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h}$$
$$2w = e^{\frac{1}{2}h} + e^{-\frac{1}{2}h}$$

so werden die vorstehenden Ausdrücke

$$\tfrac{1}{2}\{\Delta^m y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^m y_{x-\frac{1}{2}h}\} = 2^m u^m w e^x$$
$$\Delta^m y_x = 2^m u^m e^x$$

und es ist ausserdem

$$y_{x+kh} = e^{kh} e^x$$

Die eingeführten Substitutionen geben überdies

$$u + w = e^{\frac{1}{2}h}$$

folglich

$$e^{kh} = (u + w)^{2k}$$

ferner

Digitized by Google

$$4u^2 = e^h - 2 + e^{-h}$$
$$4w^2 = e^h + 2 + e^{-h}$$

woraus $w^2 - u^2 = 1$, oder

$$w = \sqrt{1 + u^2}$$

folgt. Es wird hiemit

$$\tfrac{1}{2}\{\Delta^m y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^m y_{x-\frac{1}{2}h}\} = 2^m u^m \sqrt{1+u^2}.\, e^{x}$$
$$\Delta^m y_x = 2^m u^m e^{x}$$
$$y_{x+kh} = (u + \sqrt{1+u^2})^{2k} e^{x}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die erste Interpolationsformel, so wird

$$(u + \sqrt{1+u^2})^{2k} = \{1 + 2^2 A_2 u^2 + 2^4 A_4 u^4 + \ldots\}\sqrt{1+u^2} + 2A_1 u + 2^3 A_3 u^3 + 2^5 A_5 u^5 + \ldots$$

und substituirt man sie in die dritte, so wird

$$(u + \sqrt{1+u^2})^{2k} = 1 + 2^2 C_2 u^2 + 2^4 C_4 u^4 + \ldots + \{2C_1 u + 2^3 C_3 u^3 + 2^5 C_5 u^5 + \ldots\}\sqrt{1+u^2}$$

Setzt man daher

$$(u + \sqrt{1+u^2})^{2k} = 1 + M_1 u + M_2 u^2 + M_3 u^3 + \ldots$$

so ergiebt sich

$$A_1 = \tfrac{M_1}{2}, \quad A_3 = \tfrac{M_3}{2^3}, \quad A_5 = \tfrac{M_5}{2^5}, \text{ etc.}$$
$$C_2 = \tfrac{M_2}{2^2}, \quad C_4 = \tfrac{M_4}{2^4}, \quad C_6 = \tfrac{M_6}{2^6}, \text{ etc.}$$

setzt man ferner

$$\frac{(u+\sqrt{1+u^2})^{2k}}{\sqrt{1+u^2}} = 1 + N_1 u + N_2 u^2 + N_3 u^3 + \ldots$$

so bekommt man

$$A_2 = \tfrac{N_2}{2^2}, \quad A_4 = \tfrac{N_4}{2^4}, \quad A_6 = \tfrac{N_6}{2^6}, \text{ etc.}$$
$$C_1 = \tfrac{N_1}{2}, \quad C_3 = \tfrac{N_3}{2^3}, \quad C_5 = \tfrac{N_5}{2^5}, \text{ etc.}$$

Durch die Differentiation erhält man aber leicht

$$\frac{d(u+\sqrt{1+u^2})^{2k}}{du} = 2k\frac{(u+\sqrt{1+u^2})^{2k}}{\sqrt{1+u^2}} = M_1 + 2M_2 u + 3M_3 u^2 + \ldots$$

und es ist also

$$1 = \tfrac{M_1}{2k}, \quad N_1 = \tfrac{2M_2}{2k}, \quad N_2 = \tfrac{3M_3}{2k}, \quad N_3 = \tfrac{4M_4}{2k}, \text{ etc.}$$

und hieraus folgt

$$A_2 = \tfrac{2M_2}{2^2k}, \quad A_4 = \tfrac{5M_5}{2^5k}, \quad A_6 = \tfrac{7M_7}{2^7k}, \text{ etc.}$$
$$C_1 = \tfrac{2M_2}{2^2k}, \quad C_3 = \tfrac{4M_4}{2^4k}, \quad C_5 = \tfrac{6M_6}{2^6k}, \text{ etc.}$$

Digitized by Google

womit die Bestimmung aller Coefficienten der beiden Interpolationsformeln auf die Entwickelung der Function $(u+\sqrt{1+u^2})^{2k}$ in eine nach den aufsteigenden Potenzen von u fortschreitende Reihe hingeführt ist.

18.

Sei

$$\lambda = (u+\sqrt{1+u^2})^{2k}$$

dann wird

$$\frac{d\lambda}{du} = \frac{2k}{\sqrt{1+u^2}}\lambda$$

$$\frac{d^2\lambda}{du^2} = \frac{4k^2}{1+u^2}\lambda - \frac{2ku}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\lambda$$

und hieraus folgt sogleich

$$(1+u^2)\frac{d^2\lambda}{du^2} + u\frac{d\lambda}{du} - 4k^2\lambda = 0$$

Andererseits ist

$$\lambda = 1 + M_1 u + M_2 u^2 + M_3 u^3 + \ldots$$

Differentiirt man diese, und substituirt sie nebst ihren Differentialen in die vorstehende Gleichung, so bekommt man

$$0 = 2M_2 - 4k^2 + \{2.3M_3 + M_1 - 4k^2 M_1\}u + \{3.4M_4 + 2M_2 + 2M_2 - 4k^2 M_2\}u^2$$
$$+ \{4.5M_5 + 2.3M_3 + 3M_3 - 4k^2 M_3\}u^3 + \{5.6M_6 + 3.4M_4 + 4M_4 - 4k^2 M_4\}u^4 + \text{etc.}$$

woraus zuerst

$$M_2 = \frac{4k^2}{2}, \qquad M_3 = \frac{4k^2-1}{2.3}M_1$$

$$M_4 = \frac{4k^2-4}{3.4}M_2, \qquad M_5 = \frac{4k^2-9}{4.5}M_3$$

$$M_6 = \frac{4k^2-16}{5.6}M_4, \qquad M_7 = \frac{4k^2-25}{6.7}M_5$$

etc. etc.

hervor geht, und woraus man mit Zuziehung der im vor. Art. erhaltenen Gleichung $M_1 = 2k$ die folgenden erhält

$$M_1 = 2k, \qquad M_2 = \frac{4k^2}{1.2}$$

$$M_3 = \frac{2k.4k^2-4}{1.2.3}, \qquad M_4 = \frac{4k^2.4k^2-4}{1.2.3.4}$$

$$M_5 = \frac{2k.4k^2-4.4k^2-9}{1.2.3.4.5}, \qquad M_6 = \frac{4k^2.4k^2-4.4k^2-16}{1.2.3.4.5.6}$$

$$M_7 = \frac{2k.4k^2-4.4k^2-9.4k^2-25}{1.2.3.4.5.6.7}, \qquad M_8 = \frac{4k^2.4k^2-4.4k^2-16.4k^2-36}{1.2.3\ldots7.8}$$

etc. etc.

Digitized by Google

Es ergeben sich hiemit die folgenden Ausdrücke

$$A_1 = k \qquad A_2 = \frac{4k^2-1}{2.4}$$
$$A_3 = \frac{2k.4k^2-1}{2.4.6} \qquad A_4 = \frac{4k^2-1.4k^2-9}{2.4.6.8}$$
$$A_5 = \frac{2k.4k^2-1.4k^2-9}{2.4.6.8.10} \qquad A_6 = \frac{4k^2-1.4k^2-9.4k^2-25}{2.4\ldots12}$$
etc. etc.

$$C_1 = k \qquad C_2 = \frac{k^2}{2}$$
$$C_3 = \frac{k.k^2-1}{2.3} \qquad C_4 = \frac{k^2.k^2-1}{2.3.4}$$
$$C_5 = \frac{k.k^2-1.k^2-4}{2.3.4.5} \qquad C_6 = \frac{k^2.k^2-1.k^2-4}{2.3.4.5.6}$$
etc. etc.

und substituirt man diese in die obigen Interpolationsformeln, so bekommt man

$$y_{x+kh} = \tfrac{1}{2}\{y_{x+\frac{1}{2}h} + y_{x-\frac{1}{2}h}\} + k.\Delta y_x + \frac{4k^2-1}{2.4}\cdot\tfrac{1}{2}\{\Delta^2 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^2 y_{x-\frac{1}{2}h}\}$$
$$+\frac{2k.4k^2-1}{2.4.6}.\Delta^3 y_x + \frac{4k^2-1.4k^2-9}{2.4.6.8}\cdot\tfrac{1}{2}\{\Delta^4 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^4 y_{x-\frac{1}{2}h}\} + \ldots$$
$$y_{x+kh} = y_x + k\tfrac{1}{2}\{\Delta y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta y_{x-\frac{1}{2}h}\} + \frac{k^2}{2}.\Delta^2 y_x$$
$$+\frac{k.k^2-1}{2.3}\cdot\tfrac{1}{2}\{\Delta^3 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^3 y_{x-\frac{1}{2}h}\} + \frac{k^2.k^2-1}{2.3.4}\Delta^4 y_x + \ldots$$

Setzen wir wie oben in die erste dieser beiden Formeln $x+\frac{1}{2}h$ statt x, und $k-\frac{1}{2}$ statt k, so ergiebt sich

$$y_{x+kh} = \tfrac{1}{2}\{y_{x+h} + y_x\} + \frac{2k-1}{2}.\Delta y_{x+\frac{1}{2}h} + \frac{k-1}{2}\cdot\frac{k}{2}\{\Delta^2 y_{x+h} + \Delta^2 y_x\}$$
$$+\frac{2k-1.k-1.k}{2.2.3}.\Delta^3 y_{x+\frac{1}{2}h} + \frac{k-2.k-1.k.k+1}{2.2.3.4}\{\Delta^4 y_{x+h} + \Delta^4 y_x\} + \frac{2k-1.k-2.k-1.k.k+1}{2.2.3.4.5}.\Delta^5 y_{x+\frac{1}{2}h} + \ldots$$

Diese beiden Interpolationsformeln sind schon von Stirling aufgestellt worden. Die letzte giebt für $k=\frac{1}{2}$,

$$y_{x+\frac{1}{2}h} = \tfrac{1}{2}\{y_{x+h} + y_x\} - \tfrac{1}{8}\{\Delta^2 y_{x+h} + \Delta^2 y_x\} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{3}{6}\{\Delta^4 y_{x+h} + \Delta^4 y_x\}$$
$$-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{4}\{\Delta^6 y_{x+h} + \Delta^6 y_x\} \pm \ldots$$

die oben schon vorkam, und die man die Gaussische nennt.

19.

Die vorhergehenden Ableitungen geben ein neues Mittel um die Coefficienten der Ausdrücke der Differentiale durch die Differenzen, die oben mit $a^{(-n)}$, $b^{(-n)}$, etc. $\alpha^{(-n)}$, $\beta^{(-n)}$, etc. bezeichnet wurden, auf

Digitized by Google

einfache Art zu berechnen. Führt man die Multiplication der Factoren der obigen Ausdrücke von A_1, A_2, etc. C_1, C_2, etc. aus, und setzt darauf allgemein

$$A_n = p_n^{(n)} k^n + p_n^{(n-2)} k^{n-2} + p_n^{(n-4)} k^{n-4} + \ldots$$
$$C_n = q_n^{(n)} k^n + q_n^{(n-2)} k^{n-2} + q_n^{(n-4)} k^{n-4} + \ldots$$

und vergleicht diese Ausdrücke mit den Ausdrücken des Art. 16 für die A und C Coefficienten, so ergiebt sich sogleich, dass für

n ungrade	n grade
$\alpha^{(-n)} = 1.2..n\, q_{n+2}^{(n)}$	$\alpha^{(-n)} = 1.2...n\, p_{n+2}^{(n)}$
$\beta^{(-n)} = 1.2..n\, q_{n+4}^{(n)}$	$\beta^{(-n)} = 1.2...n\, p_{n+4}^{(n)}$
$\gamma^{(-n)} = 1.2..n\, q_{n+6}^{(n)}$	$\gamma^{(-n)} = 1.2...n\, p_{n+6}^{(n)}$
etc.	etc.
$a^{(-n)} = 1.2..n\, p_{n+2}^{(n)}$	$a^{(-n)} = 1.2...n\, q_{n+2}^{(n)}$
$b^{(-n)} = 1.2..n\, p_{n+4}^{(n)}$	$b^{(-n)} = 1.2...n\, q_{n+4}^{(n)}$
$c^{(-n)} = 1.2..n\, p_{n+6}^{(n)}$	$c^{(-n)} = 1.2...n\, q_{n+6}^{(n)}$
etc.	etc.

20.

Die Darstellung der Integrale durch Summen und Differenzen kann auf gleiche Weise wie die der Differentiale ausgeführt werden. Wir nehmen aus dem Vorhergehenden die folgenden Gleichungen vor

$$\Sigma^{-1} y_x = \frac{1}{h} \int^{x} y_x dx^1 + a_1 \frac{1}{h^2} \iint^{x} y_x dx^2 + b_1 y_x + c_1 h^2 \frac{d^2 y_x}{dx^2} + d_1 h^4 \frac{d^4 y_x}{dx^4} + \ldots$$

$$\Sigma^{-3} y_x = \frac{1}{h^3} \int^{x} y_x dx^3 + a_3 \frac{1}{h} \int^{x} y_x dx + b_3 h \frac{dy_x}{dx} + c_3 h^3 \frac{d^3 y_x}{dx^3} + \ldots$$

$$\Sigma^{-2} y_x = \frac{1}{h^2} \iint^{x} y_x dx^2 + a_2 y_x + b_2 h^2 \frac{d^2 y_x}{dx^2} + c_2 h^4 \frac{d^4 y_x}{dx^4} + \ldots$$

$$\Sigma y_x = \frac{1}{h} \int^{x} y_x dx + a_1 h \frac{dy_x}{dx} + b_1 h^3 \frac{d^3 y_x}{dy^3} + c_1 h^5 \frac{d^5 y_x}{dx^5} + \ldots$$

Digitized by Google

$$\Delta y_x = h\frac{dy_x}{dx} + a_{-1}h^2\frac{d^2y_x}{dx^2} + b_{-1}h^3\frac{d^3y_x}{dx^3} + \ldots$$
$$\Delta^2 y_x = h^2\frac{d^2y_x}{dx^2} + a_{-2}h^3\frac{d^3y_x}{dx^3} + b_{-2}h^4\frac{d^4y_x}{dx^4} + \ldots$$
$$\Delta^3 y_x = h^3\frac{d^3y_x}{dx^3} + a_{-3}h^4\frac{d^4y_x}{dx^4} + \ldots$$
$$\Delta^4 y_x = h^4\frac{d^4y_x}{dx^4} + a_{-4}h^5\frac{d^5y_x}{dx^5} + \ldots$$
etc.

Multiplicirt man die fünfte dieser mit $a^{(1)}$, die siebente mit $b^{(1)}$, u. s. w., addirt diese zur vierten und setzt

$$a^{(1)} + a_1 = 0$$
$$b^{(1)} + a_{-1}a^{(1)} + b_1 = 0$$
$$c^{(1)} + a_{-3}b^{(1)} + b_{-1}a^{(1)} + c_1 = 0$$
etc.

so wird

$$\int y_x dx = h\Sigma y_x + a^{(1)}h\Delta y_x + b^{(1)}h\Delta^2 y_x + c^{(1)}h\Delta^3 y_x + \ldots$$

Multiplicirt man die sechste der obigen Gleichungen mit $b^{(2)}$, die achte mit $c^{(2)}$, u. s. w., addirt die Summe dieser Producte zur dritten, und setzt

$$a^{(2)} + a_2 = 0$$
$$b^{(2)} + b_2 = 0$$
$$c^{(2)} + a_{-2}b^{(2)} + c_2 = 0$$
$$d^{(2)} + a_{-4}c^{(2)} + b_{-2}b^{(2)} + d_2 = 0$$
etc.

so wird

$$\iint y_x dx^2 = h^2\Sigma^2 y_x + a^{(2)}h^2 y_x + b^{(2)}h^2\Delta^2 y_x + c^{(2)}h^2\Delta^4 y_x + \ldots$$

auf dieselbe Art bekommt man

$$\int^3 y_x dx^3 = h^3\Sigma^3 y_x + a^{(3)}h^3\Sigma y_x + b^{(3)}h^3\Delta y_x + c^{(3)}h^3\Delta^3 y_x + \ldots$$
$$\int^4 y_x dx^4 = h^4\Sigma^4 y_x + a^{(4)}h^4\Sigma^2 y_x + b^{(4)}h^4 y_x + c^{(4)}h^4\Delta^2 y_x + \ldots$$
etc.

wo

$$a^{(3)} + a_3 = 0$$
$$b^{(3)} + a_1 a^{(3)} + b_3 = 0$$
$$c^{(3)} + a_{-1}b^{(3)} + b_1 a^{(3)} + c_3 = 0$$
etc.

Digitized by Google

$$a^{(4)} + a_4 = 0$$
$$b^{(4)} + a_2 a^{(4)} + b_4 = 0$$
$$c^{(4)} + b_2 a^{(4)} + c_4 = 0$$
$$d^{(4)} + a_{-2} c^{(4)} + c_2 a^{(4)} + d_4 = 0$$
etc.

und dieses Verfahren kann man fortsetzen soweit man will. Man erkennt leicht aus den vorstehenden Bedingungsgleichungen, dass man sie auf die folgende allgemeine Form bringen kann,

$$a^{(n)} + a_n = 0$$
$$b^{(n)} + a_{n-2} a^{(n)} + b_n = 0$$
$$c^{(n)} + a_{n-4} b^{(n)} + b_{n-4} a^{(n)} + c_n = 0$$
etc.

wenn man erwägt, dass

$$a_n = b_0 = c_0 = \text{etc.} = 0$$

ist. Man kann die vorstehenden Bedingungsgleichungen noch auf eine andere Art ausdrücken. Integrirt man die fünfte der obigen Gleichungen ein Mal, so wird

$$\mathcal{A}\int y_x dx = h y_x + a_{-1} h^2 \frac{d^2 y_x}{dx^2} + b_{-1} h^4 \frac{d^4 y_x}{dx^4} + \ldots$$

multiplicirt man nun die sechste Gleichung mit $-a^{(1)} h$, die achte mit $-b^{(1)} h$, u. s. w., addirt die Producte zur vorstehenden Gleichung, und setzt

$$a^{(1)} = a_{-1}$$
$$b^{(1)} + a_{-2} a^{(1)} = b_{-1}$$
$$c^{(1)} + a_{-1} b^{(1)} + b_{-2} a^{(1)} = c_{-1}$$
etc.

so wird

$$\mathcal{A}\int y_x dx = h y_x + a^{(1)} h \mathcal{A} y_x + b^{(1)} h \mathcal{A}^1 y_x + \ldots$$

und wenn man hievon die Summe nimmt, so bekommt man den obigen Ausdruck für das einfache Integral wieder. Integrirt man die sechste der obigen Gleichungen zwei Mal, so bekommt man

$$\mathcal{A}^2 \iint y_x dx^2 = h^2 y_x + a_{-2} h^4 \frac{d^2 y_x}{dx^2} + b_{-2} h^6 \frac{d^4 y_x}{dx^4} + \ldots$$

behandelt man diese eben so wie jene, und setzt

Digitized by Google

$$a^{(2)} = a_{-\frac{1}{2}}$$
$$b^{(2)} + a_{-\frac{1}{2}}a^{(2)} = b_{-\frac{1}{2}}$$
$$c^{(2)} + a_{-1}b^{(2)} + b_{-\frac{1}{2}}a^{(2)} = c_{-\frac{1}{2}}$$
etc.

so bekommt man nach zweimaliger Summirung die obige Formel für das doppelte Integral wieder u. s. f. Die eben abgeleiteten Bedingungsgleichungen für die Coefficienten des ersten und zweiten Integrals geben zu erkennen, dass allgemein

$$a^{(n)} = a_{-n}$$
$$b^{(n)} + a_{-\frac{1}{2}}a^{(n)} = b_{-n}$$
$$c^{(n)} + a_{-1}b^{(n)} + b_{-\frac{1}{2}}a^{(n)} = c_{-n}$$
etc

wird.

21.

Unterwirft man die folgenden im Vorhergehenden auch erhaltenen Gleichungen

$$\tfrac{1}{2}\{\Sigma^{1}y_{x+\frac{1}{2}h} + \Sigma^{1}y_{x-\frac{1}{2}h}\} = \frac{1}{h^{1}}\int^{1} y_x dx^1 + \alpha_1 \frac{1}{h^2}\iint y_x dx^2 + \beta_1 y_x + \gamma_1 h^2 \frac{d^2y_x}{dx^2} + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\{\Sigma^{3}y_{x+\frac{1}{2}h} + \Sigma^{3}y_{x-\frac{1}{2}h}\} = \frac{1}{h^{3}}\int^{3} y_x dx^3 + \alpha_3 \frac{1}{h}\int y_x dx + \beta_3 h^1 \frac{dy_x}{dx} + \gamma_3 h^3 \frac{d^3y_x}{dx^3} + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\{\Sigma^{2}y_{x+\frac{1}{2}h} + \Sigma^{2}y_{x-\frac{1}{2}h}\} = \frac{1}{h^{2}}\iint y_x dx^2 + \alpha_2 y_x + \beta_2 h^2 \frac{d^2y_x}{dx^2} + \gamma_2 h^4 \frac{d^4y_x}{dx^4} + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\{\Sigma^{1}y_{x+\frac{1}{2}h} + \Sigma^{1}y_{x-\frac{1}{2}h}\} = \frac{1}{h}\int y_x dx + \alpha_1 h \frac{dy_x}{dx} + \beta_1 h^3 \frac{d^3y_x}{dx^3} + \gamma_1 h^5 \frac{d^5y_x}{dx^5} + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\{y_{x+\frac{1}{2}h} + y_{x-\frac{1}{2}h}\} = y_x + \alpha_0 h^2 \frac{d^2y_x}{dx^2} + \beta_0 h^4 \frac{d^4y_x}{dx^4} + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\{fy_{x+\frac{1}{2}h} + fy_{x-\frac{1}{2}h}\} = h\frac{dy_x}{dx} + \alpha_{-1} h^3 \frac{d^3y_x}{dx^3} + \beta_{-1} h^5 \frac{d^5y_x}{dx^5} + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\{f^2y_{x+\frac{1}{2}h} + f^2y_{x-\frac{1}{2}h}\} = h^2\frac{d^2y_x}{dx^2} + \alpha_{-2} h^4 \frac{d^4y_x}{dx^4} + \beta_{-2} h^6 \frac{d^6y_x}{dx^6} + \ldots$$

etc. etc.

dem ersten Verfahren des vor. Art., so bekommt man andere Integralformeln, die die folgende Form haben,

$$\int y_x dx = \frac{h}{2}\{\Sigma^{1}y_{x+\frac{1}{2}h} + \Sigma^{1}y_{x-\frac{1}{2}h}\} + \alpha^{(1)}\frac{h}{2}\{fy_{x+\frac{1}{2}h} + fy_{x-\frac{1}{2}h}\} + \beta^{(1)}\frac{h}{2}\{f^3y_{x+\frac{1}{2}h} + f^3y_{x-\frac{1}{2}h}\} + \ldots$$

$$\iint y_x dx^2 = \frac{h^2}{2}\{\Sigma^{2}y_{x+\frac{1}{2}h} + \Sigma^{2}y_{x-\frac{1}{2}h}\} + \alpha^{(2)}\frac{h^2}{2}\{y_{x+\frac{1}{2}h} + y_{x-\frac{1}{2}h}\} + \beta^{(2)}\frac{h^2}{2}\{f^2y_{x+\frac{1}{2}h} + f^2y_{x-\frac{1}{2}h}\} + \ldots$$

$$\int^{3} y_x dx^3 = \frac{h^3}{2}\{\Sigma^{3}y_{x+\frac{1}{2}h} + \Sigma^{3}y_{x-\frac{1}{2}h}\} + \alpha^{(3)}\frac{h^3}{2}\{\Sigma^{1}y_{x+\frac{1}{2}h} + \Sigma^{1}y_{x-\frac{1}{2}h}\} + \beta^{(3)}\frac{h^3}{2}\{fy_{x+\frac{1}{2}h} + fy_{x-\frac{1}{2}h}\} + \ldots$$

etc. etc.

Digitized by Google

wo die Bedingungsgleichungen allgemein die folgenden

$$\begin{aligned} \alpha^{(n)} + \alpha_n &= 0 \\ \beta^{(n)} + \alpha_{n-2}\alpha^{(n)} + \beta_n &= 0 \\ \gamma^{(n)} + \alpha_{n-4}\beta^{(n)} + \beta_{n-2}\alpha^{(n)} + \gamma_n &= 0 \end{aligned}$$

etc.

aber α_0, β_0, etc. nicht gleich Null sind. Unterwirft man die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta^1 \int_{x-\frac{1}{2}h}^{x+\frac{1}{2}h} y_x dx^1 &= h^1 y_x + a_{-2} h^3 \frac{d^2 y_x}{dx^2} + b_{-2} h^5 \frac{d^4 y_x}{dx^4} + \dots \\ \Delta^2 \int_{x-\frac{1}{2}h}^{x+\frac{1}{2}h} y_x dx^2 &= h^2 y_x + a_{-2} h^4 \frac{d^2 y_x}{dx^2} + b_{-2} h^6 \frac{d^4 y_x}{dx^4} + \dots \\ \Delta \int y_x dx &= h y_x + a_{-4} h^3 \frac{d^2 y_x}{dx^2} + b_{-4} h^5 \frac{d^4 y_x}{dx^4} + \dots \\ \tfrac{1}{2}\{y_{x+\frac{1}{2}h} + y_{x-\frac{1}{2}h}\} &= y_x + \alpha_0 h^2 \frac{d^2 y_x}{dx^2} + \beta_0 h^4 \frac{d^4 y_x}{dx^4} + \dots \\ \tfrac{1}{2}\{\Delta^2 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^2 y_{x-\frac{1}{2}h}\} &= h^2 \frac{d^2 y_x}{dx^2} + \alpha_{-2} h^4 \frac{d^4 y_x}{dx^4} + \dots \\ \tfrac{1}{2}\{\Delta^4 y_{x+\frac{1}{2}h} + \Delta^4 y_{x-\frac{1}{2}h}\} &= h^4 \frac{d^4 y_x}{dx^4} + \alpha_{-4} h^6 \frac{d^6 y_x}{dx^6} + \dots \end{aligned}$$

etc. etc.

dem zweiten Verfahren des vor. Art., so bekommt man die obigen Integralformeln dieses Art. wieder, aber die Bedingungsgleichungen werden

$$\begin{aligned} \alpha^{(n)} &= a_{-n} - \alpha_0 \\ \beta^{(n)} + \alpha_{-2}\alpha^{(n)} &= b_{-n} - \beta_0 \\ \gamma^{(n)} + \alpha_{-4}\beta^{(n)} + \beta_{-4}\alpha^{(n)} &= c_{-n} - \gamma_0 \end{aligned}$$

etc.

und die man gleichwie die vorhergehenden beliebig fortsetzen kann.

22.

Die im Art. 20 entwickelten Ausdrücke der Integrale durch Summen und Differenzen zeigen, dass man allgemein setzen kann,

$$\int_{x^n}^{x^n} y dx^n = \Sigma^n y_x + a^{(n)} \Sigma^{n-2} y_x + b^{(n)} \Sigma^{n-4} y_x + c^{(n)} \Sigma^{n-6} y_x + \dots$$

wenn man wieder Δ^m statt Σ^{-m} schreibt, und wir können diesen Ausdruck wieder von $n = -\infty$ bis $n = +\infty$ ausdehnen, wenn auch d^n

Digitized by Google

statt $\int^{-n}$ geschrieben wird. Die schon oben angewandte Exponentialfunction $y_x = e^x$ dient wieder hier, um allgemeine Ausdrücke für die Coefficienten zu finden.

Die Gleichung $\Delta^m y_x = 2^m u^m e^x$ des Art. 17 giebt

$$\Sigma^m y_x = \frac{e^x}{2^m u^m}$$

und es ist wieder

$$\int^m y\,dx^n = e^x$$

Die Gleichung $e^h = (u + w)^2$ des genannten Art. giebt ferner

$$h = 2 \log \text{nat } (u + \sqrt{1 + u^2})$$

Substituiren wir diese Ausdrücke in die obige allgemeine Gleichung, so ergiebt sich

$$\frac{u^n}{[\log \text{nat } (u + \sqrt{1 + u^2})]^n} = 1 + 2^2 a^{(n)} u^2 + 2^4 b^{(n)} u^4 + 2^6 c^{(n)} u^6 + \ldots$$

und hiemit der folgende

3. Satz.

Wenn n irgend eine ganze, positive oder negative, Zahl und y irgend eine stetige Function von x bezeichnet, so ist

$$\int^m y\,dx^n = h^n u^n [\log \text{nat } (u + \sqrt{1 + u^2})]^{-n}$$

wenn in der Entwickelung dieser Function nach den aufsteigenden Potenzen von u allenthalben

$$\frac{1}{2^p} \Sigma^{n-p} y_x \text{ statt } u^p$$

und in den Gliedern wo der Index von $\int$ und Σ negativ wird d^m statt $\int^{-m}$ und Δ^m statt Σ^{-m} geschrieben wird.

Wenden wir uns hierauf zu den Ausdrücken des vor. Art., so sehen wir, dass auch allgemein

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^n}\int^n y\,dx^n = {} & \tfrac{1}{2}\{\Sigma^n y_{x+\frac{1}{2}h} + \Sigma^n y_{x-\frac{1}{2}h}\} + \alpha^{(n)}\tfrac{1}{2}\{\Sigma^{n-2} y_{x+\frac{1}{2}h} + \Sigma^{n-2} y_{x-\frac{1}{2}h}\} \\ & + \beta^{(n)}\tfrac{1}{2}\{\Sigma^{n-4} y_{x+\frac{1}{2}h} + \Sigma^{n-4} y_{x-\frac{1}{2}h}\} \\ & + \gamma^{(n)}\tfrac{1}{2}\{\Sigma^{n-6} y_{x+\frac{1}{2}h} + \Sigma^{n-6} y_{x-\frac{1}{2}h}\} + \ldots\end{aligned}$$

Digitized by Google

gesetzt werden kann, und die früheren Ausdrücke zeigen, dass dieser Ausdruck auch von $n = -\infty$ bis $n = +\infty$ gilt, wenn bei negativen Indices dieselben Veränderungen wie oben vorgenommen werden.

Für die Entwickelung dieses Ausdrucks erhalten wir aus dem Art. 17

$$\tfrac{1}{2}\{\Sigma'^m y_{x+\frac{1}{2}h} + \Sigma'^m y_{x-\frac{1}{2}h}\} = \frac{w e^x}{2^m u^m}$$

Substituirt man diesen so wie

$$\int^n y\,dx^n = e^x$$

$$w = \sqrt{1+u^2}$$

so bekommt man zuerst

$$\frac{2^n}{h^n\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{u^n} + \frac{2^2\alpha'^{(n)}}{u^{n-2}} + \frac{2^4\beta'^{(n)}}{u^{n-4}} + \frac{2^6\gamma'^{(n)}}{u^{n-6}} + \cdots$$

Es ist aber

$$h = 2\log\text{nat}\,(u + \sqrt{1+u^2})$$

woraus

$$\frac{dh}{du} = \frac{2}{\sqrt{1+u^2}}$$

also

$$\frac{2^n}{h^n\sqrt{1+u^2}} = -\frac{2^{n-1}}{n-1}\frac{d\frac{1}{h^{n-1}}}{du} = -\frac{1}{n-1}\frac{d\{\log\text{nat}\,(u+\sqrt{1+u^2})\}^{-n+1}}{du}$$

folgt. Es wird daher

$$-\frac{u^n}{n-1}\frac{d\{\log\text{nat}\,(u+\sqrt{1+u^2})\}^{-n+1}}{du} = 1 + 2^2\alpha'^{(n)}u^2 + 2^4\beta'^{(n)}u^4 + 2^6\gamma'^{(n)}u^6 + \ldots$$

und wir erhalten hiemit den folgenden

4. Satz.

Wenn wieder n irgend eine ganze, positive oder negative, Zahl und y irgend eine beliebige stetige Function von x bezeichnet, so ist

$$\int^n y dx^n = -\frac{h^n u^n}{n-1}\frac{d\{\log\text{nat}\,(u+\sqrt{1+u^2})\}^{-n+1}}{du}$$

wenn in der Entwickelung dieser Function nach den aufsteigenden Potenzen von u allenthalben

$$\tfrac{1}{2^p}\{\Sigma'^{n-p} y_{x+\frac{1}{2}h} + \Sigma'^{n-p} y_{x-\frac{1}{2}h}\} \text{ statt } u^p$$

und unter denselben Umständen wie oben d statt $\int$, und Δ statt Σ gesetzt wird.

Digitized by Google

23.

Wenn $a^{(n)}$, $b^{(n)}$, $c^{(n)}$, etc. gegeben sind, so kann man auf einfache Weise $\alpha^{(n)}$, $\beta^{(n)}$, $\gamma^{(n)}$, etc. erhalten. Wir fanden im vor. Art.

$$[\log\text{nat}\,(u+\sqrt{1+u^2})]^{-n} = \frac{1}{u^n} + \frac{2^2 a^{(n)}}{u^{n-2}} + \frac{2^4 b^{(n)}}{u^{n-4}} + \frac{2^6 c^{(n)}}{u^{n-6}} + \ldots$$

Schreiben wir in dieser $n-1$ statt n, und nehmen dann das erste Differential davon, so wird

$$\frac{d[\log\text{nat}\,(u+\sqrt{1+u^2})]^{-n+1}}{du} = -\frac{n-1}{u^n} - (n-3)\frac{2^2 a^{(n-1)}}{u^{n-2}} - (n-5)\frac{2^4 b^{(n-1)}}{u^{n-4}} + \ldots$$

und die Vergleichung dieser mit

$$\frac{d[\log\text{nat}\,(u+\sqrt{1+u^2})]^{-n+1}}{du} = -\frac{n-1}{u^n} - (n-1)\frac{2^2 \alpha^{(n)}}{u^{n-2}} - (n-1)\frac{2^4 \beta^{(n)}}{u^{n-4}} + \ldots$$

giebt sogleich

$$\alpha^{(n)} = \frac{n-3}{n-1}a^{(n-1)}, \quad \beta^{(n)} = \frac{n-5}{n-1}b^{(n-1)}, \quad \gamma^{(n)} = \frac{n-7}{n-1}c^{(n-1)}, \text{ etc.}$$

die mit der einzigen Ausnahme $n = 1$ für alle positiven und negativen Werthe von n gelten, und den Relationen des Art. 14 zwischen a_n, β_n, etc. und α_{n-1}, β_{n-1}, etc. analog sind.

Für die Entwickelung der Coefficienten $\alpha^{(1)}$, $\beta^{(1)}$, $\gamma^{(1)}$, etc., die dem eben erwähnten Ausnahmefall angehören, bemerke ich, dass man durch den binomischen Satz

$$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = 1 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1.3}{2.4}u^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}u^6 \pm \ldots$$

erhält, und dass die obigen Gleichungen, wenn man $n = 1$ setzt,

$$\frac{2u}{h\sqrt{1+u^2}} = 1 + 2^2\alpha^{(1)}u^2 + 2^4\beta^{(1)}u^4 + 2^6\gamma^{(1)}u^6 + \ldots$$

$$\frac{2u}{h} = 1 + 2^2 a^{(1)}u^2 + 2^4 b^{(1)}u^4 + 2^6 c^{(1)}u^6 + \ldots$$

geben. Es wird also identisch

$$1 + 2^2\alpha^{(1)}u^2 + 2^4\beta^{(1)}u^4 + 2^6\gamma^{(1)}u^6 + \ldots$$
$$= \left\{1 + 2^2 a^{(1)}u^2 + 2^4 b^{(1)}u^4 + 2^6 c^{(1)}u^6 + \ldots\right\}\left\{1 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1.3}{2.4}u^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}u^6 + \ldots\right\}$$

und hieraus folgt

Digitized by Google

$$\alpha^{(1)} = a^{(1)} - \tfrac{1}{2^2.2}$$

$$\beta^{(1)} = b^{(1)} - \tfrac{1}{2^2.2}a^{(1)} + \tfrac{1.3}{2^4.2.4}$$

$$\gamma^{(1)} = c^{(1)} - \tfrac{1}{2^2.2}b^{(1)} + \tfrac{1.3}{2^4.2.4}a^{(1)} - \tfrac{1.3.5}{2^6.2.4.6}$$

etc. etc.

die man beliebig fortsetzen kann.

24.

Für die Entwickelung der Coefficienten $a^{(n)}$, $b^{(n)}$, $c^{(n)}$, etc. wollen wir der Vereinfachung wegen zuerst

$$a^{(n)} = \frac{A^{(n)}}{2^2}, \quad b^{(n)} = \frac{B^{(n)}}{2^4}, \quad c^{(n)} = \frac{C^{(n)}}{2^6} \text{ etc.}$$

setzen, worauf

$$\frac{2^n}{h^n} = \frac{1}{u^n} + \frac{A^{(n)}}{u^{n-2}} + \frac{B^{(n)}}{u^{n-4}} + \frac{C^{(n)}}{u^{n-6}} + \ldots$$

und

$$\log \text{nat}\, 2^n - n \log \text{nat}\, h = \log \text{nat} \left\{ \frac{1}{u^n} + \frac{A^{(n)}}{u^{n-2}} + \frac{B^{(n)}}{u^{n-4}} + \frac{C^{(n)}}{u^{n-6}} + \ldots \right\}$$

wird, wovon das Differential die folgende Gleichung giebt,

$$\frac{n}{h}\frac{dh}{du} = \frac{n + (n-2)A^{(n)}u^2 + (n-4)B^{(n)}u^4 + (n-6)C^{(n)}u^6 + \ldots}{u + A^{(n)}u^3 + B^{(n)}u^5 + C^{(n)}u^7 + \ldots}$$

Dem Vorhergehenden zufolge ist aber

$$\frac{dh}{du} = \frac{2}{\sqrt{1+u^2}} = 2\left\{1 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1.3}{2.4}u^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}u^6 \pm \ldots\right\}$$

woraus durch Multiplication mit du und Integration

$$h = 2\left\{u - \frac{1}{2.3}u^3 + \frac{1.3}{2.4.5}u^5 - \frac{1.3.5}{2.4.6.7}u^7 \pm \ldots\right.$$

folgt, da $u = 0$ und $h = 0$ mit einander statt finden. Hiemit bekommen wir

$$\frac{n}{h}\frac{dh}{du} = n\,\frac{1 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1.3}{2.4}u^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}u^6 \pm \ldots}{u - \frac{1}{2.3}u^3 + \frac{1.3}{2.4.5}u^5 - \frac{1.3.5}{2.4.6.7}u^7 \pm \ldots}$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke von $\frac{n}{h}\frac{dh}{du}$ einander gleich, und multiplicirt übers Kreuz, so ergiebt sich die folgende identische Gleichung

Digitized by Google

$$\begin{array}{l|l|l|l} nu - n\frac{1}{2.3} & u^3 + n\frac{1.3}{2.4.5} & u^5 - n\frac{1.3.5}{2.4.6.7} & u^7 + \text{etc.} \\ + (n-2)A^{(n)} & - (n-2)\frac{1}{2.3}A^{(n)} & + (n-2)\frac{1.3}{2.4.5}A^{(n)} & \\ & + (n-4)B^{(n)} & - (n-4)\frac{1}{2.3}B^{(n)} & \\ & & + (n-6)C^{(n)} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l|l} = nu - n\frac{1}{2} & u^3 + n\frac{1.3}{2.4} & u^5 - n\frac{1.3.5}{2.4.6} & u^7 + \text{etc.} \\ + nA^{(n)} & - n\frac{1}{2}A^{(n)} & + n\frac{1.3}{2.4}A^{(n)} & \\ & + nB^{(n)} & - n\frac{1}{2}B^{(n)} & \\ & & + nC^{(n)} & \end{array}$$

woraus zur Bestimmung der Coefficienten $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$, etc. die folgenden Gleichungen hervorgehen

$$A^{(n)} - n\frac{1}{2.3} = 0$$

$$2B^{(n)} - (n+1)\frac{1}{2.3}A^{(n)} + 2n\frac{1.3}{2.4.5} = 0$$

$$3C^{(n)} - (n+2)\frac{1}{2.3}B^{(n)} + (2n+1)\frac{1.3}{2.4.5}A^{(n)} - 3n\frac{1.3.5}{2.4.6.7} = 0$$

$$4D^{(n)} - (n+3)\frac{1}{2.3}C^{(n)} + (2n+2)\frac{1.3}{2.4.5}B^{(n)} - (3n+1)\frac{1.3.5}{2.4.6.7}A^{(n)} + 4n\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9} = 0$$

etc. etc.

die den Gleichungen des Art. 11 ähnlich sind, und für alle positiven und negativen Werthe von n gelten.

25.

Es sind noch andere Verfahren möglich, um diese Coefficienten zu berechnen. Die Gleichungen des Art. 13 geben $A^{(\pm n)}$, $B^{(\pm n)}$, etc. aus $A^{(\pm 1)}$, $B^{(\pm 1)}$, etc. und ausserdem lassen sich für positive Werthe von n diese Coefficienten durch bestimmte Integrale ausdrücken. Um dieses zu zeigen, sei zur Abkürzung

$$U = u + \sqrt{1 + u^2}$$

und

$$\eta = \tfrac{1}{2}U^x + \tfrac{1}{2}U^{-x}$$

multiplicirt man diesen Ausdruck mit dx, integrirt, und bestimmt die Constante so, dass das Integral für $x = 0$ verschwindet, so bekommt man

Digitized by Google

$$\int \eta dx = \frac{U^x - U^{-x}}{2 \log \text{nat } U}$$

aber

$$U - U^{-1} = \frac{(u + \sqrt{1+u^2})^2 - 1}{u + \sqrt{1+u^2}} = 2u$$

nimmt man daher das Integral von 0 bis 1, so wird

$$\int_0^1 \eta dx = \frac{u}{\log \text{nat } U}$$

und dieses ist die Function, von deren Reihenentwickelung die Coefficienten $A^{(1)}$, $B^{(1)}$, etc. abhängen. Multiplicirt man das obige particuläre Integral wiederholt mit dx, integrirt jedes Mal von neuem, und bestimmt stets die Constanten so, dass die Integrale für $x = 0$ verschwinden, so entstehen die folgenden Gleichungen

$$\iint \eta dx^2 = \frac{U^x - U^{-x}}{2 (\log \text{nat } U)^2} - \frac{1}{(\log \text{nat } U)^2}$$

$$\int^3 \eta dx^3 = \frac{U^x - U^{-x}}{2 (\log \text{nat } U)^3} - \frac{x}{(\log \text{nat } U)^2}$$

$$\int^5 \eta dx^5 = \frac{U^x - U^{-x}}{2 (\log \text{nat } U)^5} - \frac{x^3}{2.3 (\log \text{nat } U)^3} - \frac{x}{(\log \text{nat } U)^4}$$

$$\int^7 \eta dx^7 = \frac{U^x - U^{-x}}{2 (\log \text{nat } U)^7} - \frac{x^5}{2.3.4.5 (\log \text{nat } U)^5} - \frac{x^3}{2.3 (\log \text{nat } U)^4} - \frac{x}{(\log \text{nat } U)^6}$$

etc. etc.

oder allgemein, wenn n ungrade ist

$$\int^n \eta dx_n = \frac{U^x - U^{-x}}{2 (\log \text{nat } U)^n} - \frac{x^{n-2}}{2.3 \ldots (n-2) (\log \text{nat } U)^2} - \frac{x^{n-4}}{2.3 \ldots (n-4) (\log \text{nat } U)^4}$$
$$- \ldots - \frac{x}{(\log \text{nat } U)^{n-1}}$$

oder wenn wir die letzte Integration von $x = 0$ bis $x = 1$ ausdehnen,

$$u^{n-1} \int^n \eta dx^n = \frac{u^n}{(\log \text{nat } U)^n} - \frac{u^{n-2}}{2.3 \ldots (n-2) (\log \text{nat } U)^2}$$
$$- \frac{u^{n-4}}{2.3 \ldots (n-4) (\log \text{nat } U)^4} - \ldots - \frac{u^{n-(n-1)}}{(\log \text{nat } U)^{n-(n-1)}}$$

Setzen wir ferner

$$\theta = \tfrac{1}{2} U^x - \tfrac{1}{2} U^{-x}$$

dann bekommen wir auf dieselbe Art

Digitized by Google

$$\iint \theta\, dx^2 = \frac{U^x - U^{-x}}{2\,(\log \text{nat}\, U)^2} - \frac{x}{\log \text{nat}\, U}$$

$$\int^4 \theta\, dx^3 = \frac{U^x - U^{-x}}{2\,(\log \text{nat}\, U)^4} - \frac{x^3}{2.3\log \text{nat}\, U} - \frac{x}{(\log \text{nat}\, U)^3}$$

$$\int^6 \theta\, dx^5 = \frac{U^x - U^{-x}}{2\,(\log \text{nat}\, U)^6} - \frac{x^5}{2.3.4.5\log \text{nat}\, U} - \frac{x^3}{2.3\,(\log \text{nat}\, U)^3} - \frac{x}{(\log \text{nat}\, U)^5}$$

etc. etc.

oder allgemein, wenn n grade ist,

$$\int^n \theta\, dx^n = \frac{U^x - U^{-x}}{2\,(\log \text{nat}\, U)^n} - \frac{x^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)\log \text{nat}\, U}$$
$$- \frac{x^{n-3}}{2.3\ldots(n-3)\,(\log \text{nat}\, U)^3} - \ldots - \frac{x}{(\log \text{nat}\, U)^{n-1}}$$

und wenn wir wieder die letzte Integration von $x = 0$ bis $x = 1$ ausdehnen,

$$u^{n-1}\int^n \theta\, dx^n = \frac{u^n}{(\log \text{nat}\, U)^n} - \frac{u^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)\log \text{nat}\, U}$$
$$- \frac{u^{n-3}}{2.3\ldots(n-3)\,(\log \text{nat}\, U)^3} - \ldots - \frac{u^{n-1}}{(\log \text{nat}\, U)^{n-1}}$$

26.

Schreiben wir nun, um den Index durch alle ganzen positiven Zahlen ausdehnen zu können, in der ersten im vor. Art. abgeleiteten allgemeinen Gleichung $2m+1$, und in der zweiten $2m$ statt n, und zur Abkürzung

$$U_p = \frac{u^p}{(\log \text{nat}\, U)^p}$$

so wird

$$U_{2m+1} = u^{2m}\int^{2m+1} y\, dx^{2m+1} + U_{2m} + \frac{u^2}{2.3}U_{2m-2} + \frac{u^4}{2.3.4.5}U_{2m-4}$$
$$+ \ldots + \frac{u^{2m-4}}{2.3\ldots(2m-3)}U_4 + \frac{u^{2m-2}}{2.3\ldots(2m-1)}U_2$$

und

$$U_{2m} = u^{2m-1}\int^{2m} \theta\, dx^{2m} + U_{2m-1} + \frac{u^2}{2.3}U_{2m-3} + \frac{u^4}{2.3.4.5}U_{2m-5}$$
$$+ \ldots + \frac{u^{2m-4}}{2.3\ldots(2m-3)}U_3 + \frac{u^{2m-2}}{2.3\ldots(2m-1)}U_1$$

durch welche man die Coefficienten aller vielfachen Integrale, die einen nach den andern, erhält. Zu dem Ende müssen die Functionen η und θ

Digitized by Google

in Reihen entwickelt werden, und diese ergeben sich aus den Entwickelungen des Art. 17. Setzt man

$$U^x = 1 + P_1 u + Q_1 u^2 + P_2 u^3 + Q_2 u^4 + \dots$$

so geht aus dem Art. 18 hervor, dass

$$U^{-x} = 1 - P_1 u + Q_1 u^2 - P_2 u^3 + Q_2 u^4 + \dots$$

wird, also

$$\eta = 1 + Q_1 u^2 + Q_2 u^4 + Q_3 u^6 + \dots$$
$$\theta = P_1 u + P_2 u^3 + P_3 u^5 + \dots$$

und hieraus allgemein

$$\int^p \eta\, dx^p = \int^p dx^p + u^2 \int^p Q_1\, dx^p + u^4 \int^p Q_2\, dx^p + u^6 \int^p Q_3\, dx^p + \dots$$

$$\int^p \theta\, dx^p = u \int^p P_1\, dx^p + u^3 \int^p P_2\, dx^p + u^5 \int^p P_3\, dx^p + \dots$$

ferner giebt der Art. 23

$$U_p = 1 + u^2 A^{(p)} + u^4 B^{(p)} + u^6 C^{(p)} + \dots$$

und hiemit ist alles gegeben, um die Ausdrücke aller Coefficienten für positive n durch bestimmte Integrale zu erhalten.

27.

Wenden wir die oben entwickelten Ausdrücke an, um für die ersten sechs vielfachen Integrale die Ausdrücke der Coefficienten zu bekommen. Die Gleichungen des vor. Art. geben zuerst

$$U_1 = \int_0^1 \eta\, dx$$

$$U_2 = u \int_0^1 \int \theta\, dx^2 + U_1$$

$$U_3 = u^2 \int_0^1 \iint \eta\, dx^3 + U_2$$

$$U_4 = u^3 \int_0^1 \iiint \theta\, dx^4 + U_3 + \tfrac{u^2}{6} U_1$$

$$U_5 = u^4 \int_0^1 \iiiint \eta\, dx^5 + U_4 + \tfrac{u^2}{6} U_2$$

$$U_6 = u^5 \int_0^1 \iiiiint \theta\, dx^6 + U_5 + \tfrac{u^2}{6} U_3 + \tfrac{u^4}{120} U_1$$

Digitized by Google

substituirt man nun hierin sowohl die auch aus dem vor. Art. zu entnehmenden Ausdrücke für U_0, U_5, etc., so wie die der Integrale, und vergleicht die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von u, so bekommt man

$$A^{(1)} = \int_0^t Q_1\,dx$$

$$B^{(1)} = \int_0^t Q_2\,dx$$

$$C^{(1)} = \int_0^t Q_3\,dx$$

etc.

$$A^{(2)} = \int_0^t\int P_1\,dx^2 + A^{(1)}$$

$$B^{(2)} = \int_0^t\int P_2\,dx^2 + B^{(1)}$$

$$C^{(2)} = \int_0^t\int P_3\,dx^2 + C^{(1)}$$

etc.

$$A^{(3)} = \int_0^t\iint dx^3 \quad + A^{(2)}$$

$$B^{(3)} = \int_0^t\iint Q_1\,dx^3 + B^{(2)}$$

$$C^{(3)} = \int_0^t\iint Q_2\,dx^3 + C^{(2)}$$

etc.

$$A^{(4)} = \qquad\qquad A^{(3)} + \tfrac{1}{6}$$

$$B^{(4)} = \int_0^t\iiint P_1\,dx^4 + B^{(3)} + \tfrac{1}{6}A^{(1)}$$

$$C^{(4)} = \int_0^t\iiint P_2\,dx^4 + C^{(3)} + \tfrac{1}{6}B^{(1)}$$

etc.

$$A^{(5)} = \qquad\qquad A^{(4)} + \tfrac{1}{6}$$

$$B^{(5)} = \int_0^t\iiiint dx^5 \quad + B^{(4)} + \tfrac{1}{6}A^{(2)}$$

$$C^{(5)} = \int_0^t\iiiint Q_1\,dx^5 + C^{(4)} + \tfrac{1}{6}B^{(2)}$$

etc.

Digitized by Google

$$A^{(6)} = \qquad\qquad A^{(5)} + \frac{1}{6}$$

$$B^{(6)} = \qquad\qquad B^{(5)} + \frac{1}{6}A^{(3)} + \frac{1}{120}$$

$$C^{(6)} = \int_0^1 \int\int\int\int\int P_1 dx^6 + C^{(5)} + \frac{1}{6}B^{(3)} + \frac{1}{120}A^{(1)}$$

etc. etc.

wo nur noch die Werthe der P und Q Coefficienten zu substituiren, und die Integrationen auszuführen sind. Der Art. 17 giebt aber ohne Weiteres zu erkennen, dass

$$P_1 = M_1 \qquad Q_1 = M_2$$
$$P_2 = M_3 \qquad Q_2 = M_4$$
$$P_3 = M_5 \qquad Q_3 = M_6$$

etc. etc.

wenn in den Ausdrücken des Art. 18 für diese M Coefficienten x statt $2k$ gesetzt wird. Es wird daher

$$P_1 = x \qquad Q_1 = \frac{x^2}{2}$$

$$P_2 = \frac{x \,.\, x^2-1}{2\,.\,3} \qquad Q_2 = \frac{x^2 \,.\, x^2-4}{2\,.\,3\,.\,4}$$

$$P_3 = \frac{x \,.\, x^2-1 \,.\, x^2-9}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} \qquad Q_3 = \frac{x^2 \,.\, x^2-4 \,.\, x^2-16}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}$$

etc. etc.

28.

Ich werde nun nach diesen Ausdrücken die vier ersten Coefficienten eines jeden der im vor. Art. betrachteten Integrale numerisch berechnen Es wird, wenn wir zuerst alle Integrale für $x = 0$ anfangen lassen,

$$\int Q_1 dx = \int \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{2\,.\,3}$$

$$\iiint Q_1 dx^3 = \frac{x^5}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$$

$$\int^5 Q_1 dx^5 = \frac{x^7}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}$$

$$\int Q_2 dx = \int \frac{x^4-4x^2}{2\,.\,3\,.\,4} dx = \frac{x^5}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \frac{4x^3}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,3}$$

$$\iiint Q_2 dx^3 = \frac{x^7}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7} - \frac{4x^5}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$$

$$\int^5 Q_2 dx^5 = \frac{x^9}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8\,.\,9} - \frac{4x^7}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}$$

$$\int Q_3 dx = \int \frac{x^6-20x^4+64x^2}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} dx = \frac{x^7}{2\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,7} - \frac{20x^5}{2\,.\,3\,.\,.\,6\,.\,5} + \frac{64x^3}{2\,.\,3\,.\,.\,6\,.\,3}$$

Digitized by Google

$$\int^3 Q_3\,dx^3 = \frac{x^9}{2.3\ldots9} - \frac{20x^7}{2.3\ldots6.5.6.7} + \frac{64x^5}{2.3\ldots6.3.4.5}$$

$$\int Q_4\,dx = \int\frac{x^8-56x^6+784x^4-2304x^2}{2.3\ldots8}$$

$$= \frac{x^9}{2.3\ldots9} - \frac{56x^7}{2.3\ldots8.7} + \frac{784x^5}{2.3\ldots8.5} - \frac{2304x^3}{2.3\ldots8.3}$$

$$\iint P_1\,dx^2 = \iint x\,dx^2 = \frac{x^3}{2.3}$$

$$\int^4 P_1\,dx^4 = \frac{x^5}{2.3.4.5}$$

$$\int^6 P_1\,dx^6 = \frac{x^7}{2.3\ldots7}$$

$$\iint P_2\,dx^2 = \iint\frac{x^3-x}{2.3}\,dx^2 = \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^3}{2.3.2.3}$$

$$\int^4 P_2\,dx^4 = \frac{x^7}{2.3\ldots7} - \frac{x^5}{2.3.2.3.4.5}$$

$$\int^4 P_2\,dx^6 = \frac{x^9}{2.3\ldots9} - \frac{x^7}{2.3.2.3.4.5.6.7}$$

$$\iint P_3\,dx^2 = \iint\frac{x^5-40x^3+9x}{2.3.4.5}\,dx^2 = \frac{x^7}{2.3\ldots7} - \frac{40x^5}{2.3.4.5.4.5} + \frac{9x^3}{2.3.4.5.2.3}$$

$$\int^4 P_3\,dx^4 = \frac{x^9}{2.3\ldots9} - \frac{40x^7}{2..5.4.5.6.7} + \frac{9x^5}{2..5.2.3.4.5}$$

$$\iint P_4\,dx^2 = \iint\frac{x^7-35x^5+259x^3-225x}{2.3\ldots7}\,dx^2$$

$$= \frac{x^9}{2.3\ldots9} - \frac{35x^7}{2.3\ldots7.6.7} + \frac{259x^5}{2.3\ldots7.4.5} - \frac{225x^3}{2.3\ldots7.2.3}$$

$$\int^3 dx^3 = \frac{x^3}{2.3}$$

$$\int^5 dx^5 = \frac{x^5}{2.3.4.5}$$

und hieraus folgen die bestimmten Integrale

$$\int_0^1 Q_1\,dx = \frac{1}{2.3}$$

$$\int_0^1 Q_2\,dx = -\frac{17}{2.3.4.3.5}$$

$$\int_0^1 Q_3\,dx = \frac{367}{2.3.4.5.6.7.3}$$

$$\int_0^1 Q_4\,dx = -\frac{27859}{2.3.4.5.6.7.8.9.5}$$

$$\int_0^1\int P_1\,dx^2 = \frac{1}{6}$$

$$\int_0^1\int P_2\,dx^2 = -\frac{7}{2.3.4.5.3}$$

Digitized by Google

$$\int_0^1 \int P_3 dx^2 = \frac{43}{2.3.4.5.6.7}$$

$$\int_0^1 \int P_4 dx^2 = -\frac{9433}{2.3.4.5.6.7.3.4.5.6}$$

$$\int_0^1 \iint dx^3 = \frac{1}{2.3}$$

$$\int_0^1 \iint Q_1 dx^3 = \frac{1}{2.3.4.5}$$

$$\int_0^1 \iint Q_2 dx^3 = -\frac{13}{2.3.4.5.6.7}$$

$$\int_0^1 \iint Q_3 dx^3 = \frac{2453}{2.3.4.5.6.7.3.4.5.6}$$

$$\int_0^1 \int^3 P_1 dx^4 = \frac{1}{2.3.4.5}$$

$$\int_0^1 \int^3 P_2 dx^4 = -\frac{1}{4.5.6.7}$$

$$\int_0^1 \int^3 P_3 dx^4 = \frac{137}{2.3.4.5.6.2.4.5.9}$$

$$\int_0^1 \int^4 dx^5 = \frac{1}{2.3.4.5}$$

$$\int_0^1 \int^4 Q_1 dx^5 = \frac{1}{2.3.4.5.6.7}$$

$$\int_0^1 \int^4 Q_2 dx^5 = -\frac{23}{2.3.4.5.6.7.8.9}$$

$$\int_0^1 \int^5 P_1 dx^6 = \frac{1}{2.3.4.5.6.7}$$

$$\int_0^1 \int^5 P_2 dx^6 = -\frac{11}{2.3.4.5.6.7.8.9}$$

und hieraus ergiebt sich

$$A^{(1)} = \frac{1}{6}, \quad B^{(1)} = -\frac{17}{360}, \quad C^{(1)} = \frac{367}{45120}, \quad D^{(1)} = -\frac{27859}{4844400}$$

$$A^{(2)} = \frac{1}{3}, \quad B^{(2)} = -\frac{1}{45}, \quad C^{(2)} = \frac{31}{945}, \quad D^{(2)} = -\frac{289}{44175}$$

$$A^{(3)} = \frac{1}{2}, \quad B^{(3)} = -\frac{7}{120}, \quad C^{(3)} = \frac{457}{15120}, \quad D^{(3)} = -\frac{14543}{604800}$$

$$A^{(4)} = \frac{2}{3}, \quad B^{(4)} = -\frac{1}{45}, \quad C^{(4)} = \frac{4}{189}, \quad D^{(4)} = -\frac{41}{2835}$$

$$A^{(5)} = \frac{5}{6}, \quad B^{(5)} = \frac{1}{24}, \quad C^{(5)} = \frac{31}{3024}, \quad D^{(5)} = -\frac{3287}{362880}$$

$$A^{(6)} = 1, \quad B^{(6)} = \frac{2}{15}, \quad C^{(6)} = \frac{2}{945}, \quad D^{(6)} = -\frac{1}{225}$$

Digitized by Google

Diese numerischen Werthe sind durch die Gleichungen des Art. 24 controlirt worden. Durch Divisionen mit 2^2, 2^4, etc. bekommt man zufolge des Art. 24 daraus die folgenden Werthe der Coefficienten der Ausdrücke der Integrale

$$a^{(1)} = \frac{1}{24}, \quad b^{(1)} = -\frac{47}{5760}, \quad c^{(1)} = \frac{367}{967680}, \quad d^{(1)} = -\frac{27859}{464486400}$$

$$a^{(2)} = \frac{1}{12}, \quad b^{(2)} = -\frac{1}{240}, \quad c^{(2)} = \frac{31}{60480}, \quad d^{(2)} = -\frac{289}{3628800}$$

$$a^{(3)} = \frac{1}{8}, \quad b^{(3)} = -\frac{7}{1920}, \quad c^{(3)} = \frac{457}{967680}, \quad d^{(3)} = -\frac{41513}{464486400}$$

$$a^{(4)} = \frac{1}{6}, \quad b^{(4)} = -\frac{1}{720}, \quad c^{(4)} = \frac{1}{30240}, \quad d^{(4)} = -\frac{11}{725760}$$

$$a^{(5)} = \frac{5}{24}, \quad b^{(5)} = -\frac{1}{384}, \quad c^{(5)} = \frac{31}{193536}, \quad d^{(5)} = -\frac{3287}{92897280}$$

$$a^{(6)} = \frac{1}{4}, \quad b^{(6)} = -\frac{1}{420}, \quad c^{(6)} = \frac{1}{30240}, \quad d^{(6)} = -\frac{1}{57600}$$

29.

Die Coefficienten des ersten Integrals der zweiten Form, die nach dem Art. 23 eine Ausnahme von den allgemeinen Uebergangsformeln bilden, lassen sich durch dieselben bestimmten Integrale ausdrücken. Es handelt sich hier um die Entwickelung der Function

$$\frac{u}{\sqrt{1+u^2}\cdot \log \text{nat } U} = 1 + \mathfrak{A}u^2 + \mathfrak{B}u^4 + \mathfrak{C}u^6 + \ldots$$

wenn wir

$$\alpha^{(1)} = \frac{\mathfrak{A}}{2^2}, \quad \beta^{(1)} = \frac{\mathfrak{B}}{2^4}, \quad \gamma^{(1)} = \frac{\mathfrak{C}}{2^6}, \quad \text{etc.}$$

setzen. Nun wird aber, wenn wieder

$$\theta = \tfrac{1}{2}U^x - \tfrac{1}{2}U^{-x}$$

ist,

$$\int \theta\, dx = \frac{U^x + U^{-x}}{2 \log \text{nat } U} + \text{const.}$$

und hieraus folgt

$$\int_0^1 \theta\, dx = \frac{\sqrt{1+u^2}-1}{\log \text{nat } U}$$

also zufolge des Art. 25

$$\frac{u\sqrt{1+u^2}}{\log \text{nat } U} = u\int_0^1 \theta\, dx + \int_0^1 \eta\, dx$$

und

$$\frac{u}{\sqrt{1+u^2}\cdot \log \text{nat } U} = \left\{u\int_0^1 \theta\, dx + \int_0^1 \eta\, dx\right\}\left\{1 - u^2 + u^4 - u^6 \pm \ldots\right\}$$

Digitized by Google

Nun ist aber nach dem Art. 26

$$u\int_0^1 \theta\, dx + \int_0^1 \eta\, dx = 1 + u^2\int_0^1 (P_1 + Q_1)\, dx + u^4\int_0^1 (P_2 + Q_2)\, dx + \ldots$$

Substituirt man diesen Ausdruck in den vorhergehenden, führt die Multiplication aus, und vergleicht mit dem obigen Ausdruck für dieselbe Function, so ergiebt sich

$$\mathfrak{A} = \int_0^1 (P_1 + Q_1)\, dx - 1$$

$$\mathfrak{B} = \int_0^1 (P_2 + Q_2)\, dx - \int_0^1 (P_1 + Q_1)\, dx + 1$$

$$\mathfrak{C} = \int_0^1 (P_3 + Q_3)\, dx - \int_0^1 (P_2 + Q_2)\, dx + \int_0^1 (P_1 + Q_1)\, dx - 1$$

etc. etc.

wofür man auch

$$\mathfrak{A} = \int_0^1 (P_1 + Q_1)\, dx - 1$$

$$\mathfrak{B} = \int_0^1 (P_2 + Q_2)\, dx - \mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{C} = \int_0^1 (P_3 + Q_3)\, dx - \mathfrak{B}$$

etc.

schreiben kann, und das Gesetz des Fortganges klar vor Augen tritt.

Im vor. Art. wurde unter andern gefunden

$$\int_0^1 Q_1\, dx = \tfrac{1}{2.3}, \quad \int_0^1 Q_2 dx = -\tfrac{17}{2.3.4.3.5}, \quad \int_0^1 Q_3 dx = \tfrac{367}{2.3.4.5.6.7.3},$$

$$\int_0^1 Q_4 dx = -\tfrac{27859}{2.3.4.5.6.7.8.9.5}$$

und vermittelst der dort vorkommenden Ausdrücke der allgemeinen Integrale findet man leicht

$$\int_0^1 P_1\, dx = \tfrac{1}{2}, \quad \int_0^1 P_2 dx = -\tfrac{1}{2.3.4}, \quad \int_0^1 P_3 dx = \tfrac{13}{2.3.4.5.6}$$

$$\int_0^1 P_4 dx = -\tfrac{1283}{2.3.4.5.6.7.8.3}$$

und hiemit

$$\mathfrak{A} = -\tfrac{1}{3}, \quad \mathfrak{B} = \tfrac{11}{45}, \quad \mathfrak{C} = -\tfrac{191}{945}, \quad \mathfrak{D} = \tfrac{3497}{14175}$$

woraus

Digitized by Google

$$\alpha^{(4)} = -\frac{1}{12}, \quad \beta^{(4)} = \frac{11}{720}, \quad \gamma^{(4)} = -\frac{191}{60480}, \quad \delta^{(4)} = \frac{2497}{3628800}$$

hervorgeht. Diese Werthe sind durch die Gleichungen des Art. 23 controlirt worden. Die Gleichungen des Art. 23 geben ferner

$$\alpha^{(2)} = -a^{(1)}, \quad \beta^{(2)} = -3b^{(1)}, \quad \gamma^{(2)} = -5c^{(1)}, \quad \delta^{(2)} = -7d^{(1)}, \quad \text{etc.}$$

$$\alpha^{(3)} = 0, \quad \beta^{(3)} = -b^{(2)}, \quad \gamma^{(3)} = -2c^{(2)}, \quad \delta^{(3)} = -3d^{(2)}, \quad \text{etc.}$$

$$\alpha^{(4)} = \frac{1}{3}a^{(3)}, \quad \beta^{(4)} = -\frac{1}{3}b^{(3)}, \quad \gamma^{(4)} = -c^{(3)}, \quad \delta^{(4)} = -\frac{5}{3}d^{(3)}, \quad \text{etc.}$$

$$\alpha^{(5)} = \frac{1}{2}a^{(4)}, \quad \beta^{(5)} = 0, \quad \gamma^{(5)} = -\frac{1}{2}c^{(4)}, \quad \delta^{(5)} = -d^{(4)}, \quad \text{etc.}$$

$$\alpha^{(6)} = \frac{3}{5}a^{(5)}, \quad \beta^{(6)} = \frac{1}{5}b^{(5)}, \quad \gamma^{(6)} = -\frac{1}{5}c^{(5)}, \quad \delta^{(6)} = -\frac{3}{5}d^{(5)}, \quad \text{etc.}$$

$$\alpha^{(7)} = \frac{2}{3}a^{(6)}, \quad \beta^{(7)} = \frac{1}{3}b^{(6)}, \quad \gamma^{(7)} = 0, \quad \delta^{(7)} = -\frac{1}{3}d^{(6)}, \quad \text{etc.}$$

etc.

und die obigen Werthe der a, b, etc. Coefficienten geben daher sogleich

$$\alpha^{(2)} = -\frac{1}{24}, \quad \beta^{(2)} = \frac{17}{1920}, \quad \gamma^{(2)} = -\frac{367}{193536}, \quad \delta^{(2)} = \frac{27859}{66355200}$$

$$\alpha^{(3)} = 0, \quad \beta^{(3)} = \frac{1}{240}, \quad \gamma^{(3)} = -\frac{31}{30240}, \quad \delta^{(3)} = \frac{289}{1209600}$$

$$\alpha^{(4)} = \frac{1}{24}, \quad \beta^{(4)} = \frac{7}{5760}, \quad \gamma^{(4)} = -\frac{457}{967680}, \quad \delta^{(4)} = \frac{11513}{92897280}$$

$$\alpha^{(5)} = \frac{1}{12}, \quad \beta^{(5)} = 0, \quad \gamma^{(5)} = -\frac{1}{6048}, \quad \delta^{(5)} = \frac{41}{725760}$$

$$\alpha^{(6)} = \frac{1}{8}, \quad \beta^{(6)} = \frac{1}{1920}, \quad \gamma^{(6)} = -\frac{31}{967680}, \quad \delta^{(6)} = \frac{3287}{154828800}$$

$$\alpha^{(7)} = \frac{1}{6}, \quad \beta^{(7)} = \frac{1}{360}, \quad \gamma^{(7)} = 0, \quad \delta^{(7)} = \frac{1}{172800}$$

30.

Die Coefficienten der Ausdrücke der Differentiale durch die Differenzen lassen sich durch die Differentiale der Functionen η und θ, in welchen nach der letzten Differentiation $x = 1$ zu setzen ist, ausdrücken. Aus

$$\eta = \tfrac{1}{2}U^x + \tfrac{1}{2}U^{-x}$$

folgt

$$\frac{d\eta}{dx} = \tfrac{1}{2}(U^x - U^{-x}) \log \text{nat } U$$

$$\frac{d^3\eta}{dx^3} = \tfrac{1}{2}(U^x - U^{-x}) (\log \text{nat } U)^3$$

$$\frac{d^5\eta}{dx^5} = \tfrac{1}{2}(U^x - U^{-x}) (\log \text{nat } U)^5$$

etc.

Digitized by Google

und aus

$$\theta = \tfrac{1}{2} U^x - \tfrac{1}{2} U^{-x}$$

folgt

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = (\tfrac{1}{2} U^x - \tfrac{1}{2} U^{-x}) (\log \text{nat } U)^2$$
$$\frac{d^4\theta}{dx^4} = (\tfrac{1}{2} U^x - \tfrac{1}{2} U^{-x}) (\log \text{nat } U)^4$$
etc.

Bezeichnen wir daher die Bedingung, dass nach der letzten Differentiation $x = 1$ gesetzt werden muss, durch das Zeichen d_1, so geben die vorstehenden Gleichungen

$$\frac{\log \text{nat } U}{u} = \frac{1}{u^2} \frac{d_1\eta}{dx}$$
$$\frac{(\log \text{nat } U)^2}{u^2} = \frac{1}{u^2} \frac{d_1{}^2\theta}{dx^2}$$
$$\frac{(\log \text{nat } U)^3}{u^3} = \frac{1}{u^4} \frac{d_1{}^3\eta}{dx^3}$$
$$\frac{(\log \text{nat } U)^4}{u^4} = \frac{1}{u^5} \frac{d_1{}^4\theta}{dx^4}$$
etc.

Da nun allgemein

$$\frac{(\log \text{nat } U)^n}{u^n} = 1 - A^{(-n)} u^2 + B^{(-n)} u^4 + C^{(-n)} u^6 + \ldots$$

ist, wenn wir

$$a^{(-n)} = \frac{A^{(-n)}}{2^2}, \quad b^{(-n)} = \frac{B^{(-n)}}{2^4}, \quad c^{(-n)} = \frac{C^{(-n)}}{2^6}, \text{ etc.}$$

setzen, und

$$\eta = 1 + Q_1 u^2 + Q_2 u^4 + Q_3 u^6 + \ldots$$
$$\theta = P_1 u + P_2 u^3 + P_3 u^5 + \ldots$$

so ergiebt sich ohne Mühe

$$A^{(-1)} = \frac{d_1 Q_2}{dx}, \quad B^{(-1)} = \frac{d_1 Q_3}{dx}, \quad C^{(-1)} = \frac{d_1 Q_4}{dx}, \text{ etc.}$$
$$A^{(-2)} = \frac{d_1{}^2 P_2}{dx^2}, \quad B^{(-2)} = \frac{d_1{}^2 P_3}{dx^2}, \quad C^{(-2)} = \frac{d_1{}^2 P_4}{dx^2}, \text{ etc.}$$
$$A^{(-3)} = \frac{d_1{}^3 Q_2}{dx^3}, \quad B^{(-3)} = \frac{d_1{}^3 Q_3}{dx^3}, \quad C^{(-3)} = \frac{d_1{}^3 Q_4}{dx^3}, \text{ etc.}$$
$$A^{(-4)} = \frac{d_1{}^4 P_2}{dx^4}, \quad B^{(-4)} = \frac{d_1{}^4 P_3}{dx^4}, \quad C^{(-4)} = \frac{d_1{}^4 P_4}{dx^4}, \text{ etc.}$$
etc.

die man beliebig fortsetzen kann. Um die numerischen Werthe der ersten dieser Coefficienten zu berechnen, giebt das Vorhergehende

Digitized by Google

$$Q_2 = \frac{x^4 - 4x^2}{2.3.4}$$

$$Q_3 = \frac{x^6 - 20x^4 + 64x^2}{2.3..6}$$

$$Q_4 = \frac{x^8 - 56x^6 + 784x^4 - 2304x^2}{2.3...8}$$

$$Q_5 = \frac{x^{10} - 120x^8 + 4368x^6 - 52480x^4 + 147456x^2}{2.3...10}$$

$$Q_6 = \frac{x^{12} - 220x^{10} + 16368x^8 - 489280x^6 + 5395456x^4 - 14745600x^2}{2.3...12}$$

$$P_3 = \frac{x^3 - 10x^2 + 9x}{2.3.4.5}$$

$$P_4 = \frac{x^7 - 35x^5 + 259x^3 - 225x}{2.3..7}$$

$$P_5 = \frac{x^9 - 84x^7 + 1974x^5 - 12916x^3 + 11025x}{2.3...9}$$

$$P_6 = \frac{x^{11} - 165x^9 + 8778x^7 - 172810x^5 + 1057221x^3 - 893025x}{2.3...11}$$

$$P_7 = \frac{x^{13} - 286x^{11} + 28743x^9 - 1234948x^7 + 21967231x^5 - 128846766x^3 + 108056025x}{2.3...13}$$

hiemit ergab sich

$$a^{(-1)} = -\frac{1}{24}, \quad b^{(-1)} = \frac{3}{640}, \quad c^{(-1)} = -\frac{5}{7168}, \quad d^{(-1)} = \frac{35}{294912}$$

$$a^{(-2)} = -\frac{1}{12}, \quad b^{(-2)} = \frac{1}{90}, \quad c^{(-2)} = -\frac{1}{560}, \quad d^{(-2)} = \frac{1}{3150}$$

$$a^{(-3)} = -\frac{1}{8}, \quad b^{(-3)} = \frac{37}{1920}, \quad c^{(-3)} = -\frac{3229}{967680}, \quad d^{(-3)} = \frac{40679}{17203200}$$

$$a^{(-4)} = -\frac{1}{6}, \quad b^{(-4)} = \frac{7}{240}, \quad c^{(-4)} = -\frac{41}{7560}, \quad d^{(-4)} = \frac{479}{453600}$$

die durch die Gleichungen des Art. 19 controlirt worden sind. Die Gleichungen des Art. 23 geben hier

$$\alpha^{(-1)} = 2a^{(-2)}, \quad \beta^{(-1)} = 3b^{(-2)}, \quad \gamma^{(-1)} = 4c^{(-2)}, \quad \delta^{(-1)} = 5d^{(-2)}$$

$$\alpha^{(-2)} = \frac{5}{3}a^{(-3)}, \quad \beta^{(-2)} = \frac{7}{3}b^{(-3)}, \quad \gamma^{(-2)} = \frac{9}{3}c^{(-3)}, \quad \delta^{(-2)} = \frac{11}{3}d^{(-3)}$$

$$\alpha^{(-3)} = \frac{6}{4}a^{(-4)}, \quad \beta^{(-3)} = \frac{8}{4}b^{(-4)}, \quad \gamma^{(-3)} = \frac{10}{4}c^{(-4)}, \quad \delta^{(-3)} = \frac{12}{4}d^{(-4)}$$

und folglich wird

$$\alpha^{(-1)} = -\frac{1}{6}, \quad \beta^{(-1)} = \frac{1}{30}, \quad \gamma^{(-1)} = -\frac{1}{140}, \quad \delta^{(-1)} = \frac{1}{630}$$

$$\alpha^{(-2)} = -\frac{5}{24}, \quad \beta^{(-2)} = \frac{259}{5760}, \quad \gamma^{(-2)} = -\frac{3229}{322560}, \quad \delta^{(-2)} = \frac{117469}{51609600}$$

$$\alpha^{(-3)} = -\frac{1}{4}, \quad \beta^{(-3)} = \frac{7}{120}, \quad \gamma^{(-3)} = -\frac{41}{3024}, \quad \delta^{(-3)} = \frac{479}{151200}$$

Digitized by Google

31.

Bei der Anwendung der allgemeinen Ausdrücke des Art. 22 auf die Integration von gegebenen Functionen durch die sogenannte mechanische Quadratur, kann man ohne Rücksicht auf die Werthe der Grenzen zu nehmen, die Functionswerthe für beliebige, einander hinreichend nahe kommenden, und um ein gleiches Interval von einander abstehenden Werthe von x berechnen, denn man kann aus den berechneten Functionswerthen und ihren Differenzen dieselben für jeden beliebigen Werth von x durch Interpolation erhalten. Einfacher und jedenfalls kürzer ist es jedoch zur Berechnung der Functionswerthe solche Werthe von x anzuwenden, vermöge welcher die den Grenzwerthen des Integrals entsprechenden Functionswerthe zu den unmittelbar berechneten gehören. Dieses Verfahren schliesst die Ausdehnung der erhaltenen Integrale auf andere Grenzwerthe nicht aus, denn man kann, wenn man das Integral für verschiedene Grenzwerthe berechnet hat, daraus das Integral für zwischen liegende Grenzen durch Interpolation berechnen.

Ich nehme nun an, dass man für

$x = a$, $x = a + h$, $x = a + 2h \ldots x = a + nh$, $x = a + (n+1)h$, etc.

und auch für einige vorangehende Werthe von x, nemlich für

$$x = a - h\,, \quad x = a - 2h\,, \text{ etc.}$$

die Functionswerthe berechnet, und diese nebst den Differenzen derselben nach dem Schema des Art. 4 zusammengestellt habe. Sucht man nun das $\int y\,dx$ vor $x = a$ bis $x = a + nh$, so hat dieses zufolge der allgemeinen Formel des Art. 22 offenbar den folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned}\int_a^{a+nh} y dx = {} & \tfrac{h}{2}\{\Sigma y_{a+(n+\frac{1}{2})h} + \Sigma y_{a+(n-\frac{1}{2})h}\} + \alpha^{(1)}\tfrac{h}{2}\{\Delta y_{a+(n+\frac{1}{2})h} + \Delta y_{a+(n-\frac{1}{2})h}\} \\ & + \beta^{(1)}\tfrac{h}{2}\{\Delta^3 y_{a+(n+\frac{1}{2})h} + \Delta^3 y_{a+(n-\frac{1}{2})h}\} + \ldots \\ & - \tfrac{h}{2}\{\Sigma y_{a+\frac{1}{2}h} + \Sigma y_{a-\frac{1}{2}h}\} - \alpha^{(1)}\tfrac{h}{2}\{\Delta y_{a+\frac{1}{2}h} + \Delta y_{a-\frac{1}{2}h}\} \\ & - \beta^{(1)}\tfrac{h}{2}\{\Delta^3 y_{a+\frac{1}{2}h} + \Delta^3 y_{a-\frac{1}{2}h}\} - \ldots\end{aligned}$$

und die hier vorkommenden Summen- und Differenzfunctionen sind durch die Werthe von x, die nach der Voraussetzung substituirt worden sind, unmittelbar gegeben. Da nun in der Reihe der ersten Sum-

Digitized by Google

menfunctionen Ein Glied willkührlich ist, so kann man dieses so bestimmen, dass der zweite Theil des vorstehenden Ausdrucks des Integrals Null wird. Sei demzufolge

$$0 = \Sigma y_{a+\frac{1}{2}h} + \Sigma y_{a-\frac{1}{2}h} + \alpha^{(1)}\{\Delta y_{a+\frac{1}{2}h} + \Delta y_{a-\frac{1}{2}h}\} + \beta^{(1)}\{\Delta^3 y_{a+\frac{1}{2}h} + \Delta^3 y_{a-\frac{1}{2}h}\} + \ldots$$

hieraus folgt in Verbindung mit der Gleichung

$$\Sigma y_{a+\frac{1}{2}h} - \Sigma y_{a-\frac{1}{2}h} = y_a$$

die Gleichung

$$\Sigma y_{a-\frac{1}{2}h} = -\tfrac{1}{2}y_a - \tfrac{1}{2}\alpha^{(1)}\{\Delta y_{a+\frac{1}{2}h} + \Delta y_{a-\frac{1}{2}h}\} - \tfrac{1}{2}\beta^{(1)}\{\Delta^3 y_{a+\frac{1}{2}h} + \Delta^3 y_{a-\frac{1}{2}h}\} - \tfrac{1}{2}\gamma^{(1)}\{\Delta^5 y_{a+\frac{1}{2}h} + \Delta^5 y_{a-\frac{1}{2}h}\} - \ldots$$

welche $\Sigma y_{a-\frac{1}{2}h}$, und damit zugleich alle ersten Summenfunctionen bestimmt. Das Integral wird hierauf

$$\int_a^{a+nh} y dx = \frac{h}{2}\{\Sigma y_{a+(n+\frac{1}{2})h} + \Sigma y_{a+(n-\frac{1}{2})h}\} + \alpha^{(1)}\frac{h}{2}\{\Delta y_{a+(n+\frac{1}{2})h} + \Delta y_{a+(n-\frac{1}{2})h}\} + \beta^{(1)}\frac{h}{2}\{\Delta^3 y_{a+(n+\frac{1}{2})h} + \Delta^3 y_{a+(n-\frac{1}{2})h}\} + \gamma^{(1)}\frac{h}{2}\{\Delta^5 y_{a+(n+\frac{1}{2})h} + \Delta^5 y_{a+(n-\frac{1}{2})h}\} + \ldots$$

32.

Will man ausserdem das doppelte Integral zwischen denselben Grenzen bestimmen, und auch von Functionswerthen abhängig machen, die durch die im vor. Art. verlangten Substitutionen unmittelbar gegeben sind, so darf man nicht mehr die zweite Formel des Art. 22 anwenden, sondern muss im Gegentheil sich der ersten bedienen. Diese giebt zuerst

$$\iint_a^{a+nh} y dx^2 = h^2\Sigma^2 y_{a+nh} + a^{(2)}h^2 y_{a+nh} + b^{(2)}h^2\Delta^2 y_{a+nh} + \ldots - h^2\Sigma^2 y_a - a^{(2)}h^2 y_a - b^{(2)}h^2\Delta^2 y_a - \ldots$$

Für ein vielfaches Integral ist die Angabe der Grenzen, die sich immer auf die letzte Integration bezieht, nicht hinreichend um es zu einem bestimmten Integral zu machen, es muss ausserdem jede der vorhergehenden Integrationen Einer Bedingung unterworfen werden. Hier werde ich bei den vielfachen bestimmten Integralen, die entwickelt werden sollen, die Bedingung festsetzen, dass alle, der letzten Integration vorangehenden, Integrationen für den Anfangspunkt jener Null sein sollen.

Digitized by Google

Diese Bedingung wird in der Anwendung am häufigsten verlangt, es ist indes ein Leichtes sie durch jede andere zu ersetzen.

Um nun die eben genannte Bedingung in das vorstehende Integral einzuführen ist nichts weiter zu thun, wie die Bedingungsgleichung des vor. Art. wieder gelten zu lassen, und also wieder

$$\Sigma y_{a-\frac{1}{2}h} = -\tfrac{1}{2}y_a - \tfrac{1}{2}\alpha^{(1)}\{\Delta y_{a+\frac{1}{2}h} + \Delta y_{a-\frac{1}{2}h}\} - \tfrac{1}{2}\beta^{(1)}\{\Delta^3 y_{a+\frac{1}{2}h} + \Delta^3 y_{a-\frac{1}{2}h}\} - \tfrac{1}{2}\gamma^{(1)}\{\Delta^5 y_{a+\frac{1}{2}h} + \Delta^5 y_{a-\frac{1}{2}h}\} + \cdots$$

zu setzen, wodurch die ersten Summenfunctionen bestimmt werden. Zur Bestimmung der zweiten Summenfunctionen setze ich

$$\Sigma^2 y_a = -a^{(2)}y_a - b^{(2)}\Delta^2 y_a - c^{(2)}\Delta^4 y_a - \cdots$$

wodurch

$$\iint_a^{a+nh} y\,dx^2 = h^2\Sigma^2 y_{a+nh} + a^{(2)}h^2 y_{a+nh} + b^{(2)}h^2\Delta^2 y_{a+nh} + c^{(2)}h^2\Delta^4 y_{a+nh} + \cdots$$

wird, und alles bestimmt ist.

33.

Man kann die im Vorhergehenden entwickelten Regeln auf alle vielfachen Integrale ausdehnen. Für das dritte Integral erhalten wir

$$\begin{aligned}\iiint_a^{a+nh} y\,dx^3 = {} & \tfrac{h^3}{2}\{\Sigma^3 y_{a+(n+\frac{1}{2})h} + \Sigma^3 y_{a+(n-\frac{1}{2})h}\} \\ & + \alpha^{(3)}\tfrac{h^3}{2}\{\Sigma y_{a+(n+\frac{1}{2})h} + \Sigma y_{a+(n-\frac{1}{2})h}\} \\ & + \beta^{(3)}\tfrac{h^3}{2}\{\Delta y_{a+(n+\frac{1}{2})h} + \Delta y_{a+(n-\frac{1}{2})h}\} + \cdots\end{aligned}$$

wo die Summenfunctionen durch die folgenden Gleichungen zu bestimmen sind

$$\begin{aligned}\Sigma y_{a-\frac{1}{2}h} = {} & -\tfrac{1}{2}y_a - \tfrac{1}{2}\alpha^{(1)}\{\Delta y_{a+(n+\frac{1}{2})h} + \Delta y_{a+(n-\frac{1}{2})h}\} \\ & - \tfrac{1}{2}\beta^{(1)}\{\Delta^3 y_{a+(n+\frac{1}{2})h} + \Delta^3 y_{a+(n-\frac{1}{2})h}\} \\ & - \tfrac{1}{2}\gamma^{(1)}\{\Delta^5 y_{a+(n+\frac{1}{2})h} + \Delta^5 y_{a+(n-\frac{1}{2})h}\} - \cdots \\ \Sigma^2 y_a = {} & -a^{(2)}y_a - b^{(2)}\Delta^2 y_a - c^{(2)}\Delta^4 y_a - \cdots \\ \Sigma^3 y_{a-\frac{1}{2}h} = {} & -\tfrac{1}{2}\Sigma^2 y_a - \tfrac{1}{2}\alpha^{(3)}\{\Sigma y_{a+\frac{1}{2}h} + \Sigma y_{a-\frac{1}{2}h}\} \\ & - \tfrac{1}{2}\beta^{(3)}\{\Delta y_{a+\frac{1}{2}h} + \Delta y_{a-\frac{1}{2}h}\} \\ & - \tfrac{1}{2}\gamma^{(3)}\{\Delta^3 y_{a+\frac{1}{2}h} + \Delta^3 y_{a-\frac{1}{2}h}\} - \cdots\end{aligned}$$

und demgemäss verfährt man bei den höheren Integralen.

Digitized by Google

34.

Man kann auch die im Nächstvorhergehenden nicht angewandten Ausdrücke benutzen, nur muss man, wenn man dieselben Werthe von x substituirt hat wie im Art. 31, und die dadurch erlangten Functionswerthe unmittelbar benutzen will, die Grenzen anders annehmen, oder wenn dieselben Grenzwerthe angenommen werden sollen, andere Werthe von x ursprünglich substituiren. In der Voraussetzung, dass die bisher angenommenen Werthe von x substituirt worden sind, giebt die erste allgemeine Gleichung des Art. 22 offenbar

$$\begin{aligned}\int_{a+\frac{1}{2}h}^{a+(n+\frac{1}{2})h} y\,dx = {} & h\Sigma' y_{a+(n+\frac{1}{2})h} + a^{(1)}h\Delta y_{a+(n+\frac{1}{2})h} \\ & + b^{(1)}h\Delta^3 y_{a+(n+\frac{1}{2})h} + \cdots \\ & - h\Sigma' y_{a+\frac{1}{2}h} - a^{(1)}h\Delta y_{a+\frac{1}{2}h} - b^{(1)}\Delta^3 y_{a+\frac{1}{2}h} - \cdots\end{aligned}$$

und setzt man hier

$$\Sigma' y_{a+\frac{1}{2}h} = -a^{(1)}\Delta y_{a+\frac{1}{2}h} - b^{(1)}\Delta^3 y_{a+\frac{1}{2}h} - c^{(1)}\Delta^5 y_{a+\frac{1}{2}h} - \cdots$$

so wird

$$\begin{aligned}\int_{a+\frac{1}{2}h}^{a+(n+\frac{1}{2})h} y\,dx = {} & h\Sigma' y_{a+(n+\frac{1}{2})h} + a^{(1)}h\Delta y_{a+(n+\frac{1}{2})h} + b^{(1)}h\Delta^3 y_{a+(n+\frac{1}{2})h} \\ & + c^{(1)}h\Delta^5 y_{a+(n+\frac{1}{2})h} - \cdots\end{aligned}$$

wo wieder alles bestimmt ist.

35.

Für die Erlangung des zweiten Integrals ist es jetzt die zweite allgemeine Gleichung des Art. 22, die angewandt werden muss, und diese giebt auf dieselbe Art wie oben

$$\begin{aligned}\iint_{a+\frac{1}{2}h}^{a+(n+\frac{1}{2})h} y\,dx^2 = {} & \tfrac{h^2}{2}\{\Sigma'^2 y_{a+(n+1)h} + \Sigma'^2 y_{a+nh}\} + \alpha^{(2)}\tfrac{h^2}{2}\{y_{a+(n+1)h} + y_{a+nh}\} \\ & + \beta^{(2)}\tfrac{h^2}{2}\{\Delta^2 y_{a+(n+1)h} + \Delta^2 y_{a+nh}\} + \gamma^{(2)}\tfrac{h^2}{2}\{\Delta^4 y_{a+(n+1)h} + \Delta^4 y_{a+nh}\} + \cdots\end{aligned}$$

wo die Summenfunctionen durch folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}\Sigma' y_{a+\frac{1}{2}h} = {} & -a^{(1)}\Delta y_{a+\frac{1}{2}h} - b^{(1)}\Delta^3 y_{a+\frac{1}{2}h} - c^{(1)}\Delta^5 y_{a+\frac{1}{2}h} - \cdots \\ \Sigma'^2 y_a = {} & -\tfrac{1}{2}\Sigma' y_{a+\frac{1}{2}h} - \tfrac{1}{2}\alpha^{(2)}\{y_{a+h} + y_a\} - \tfrac{1}{2}\beta^{(2)}\{\Delta^2 y_{a+h} + \Delta^2 y_a\} \\ & - \tfrac{1}{2}\gamma^{(2)}\{\Delta^4 y_{a+h} + \Delta^4 y_a\} - \cdots\end{aligned}$$

zu bestimmen sind.

Digitized by Google

36.

Suchen wir hier auch das dritte Integral, so finden wir

$$\iiint_{a+\frac{1}{2}h}^{a+(n+\frac{1}{2})h} y\,dx^3 = h^3\Sigma^3 y_{a+(n+\frac{1}{2})h} + a^{(3)}h^3\Sigma^2 y_{a+(n+\frac{1}{2})h} + b^{(3)}h^3\Delta y_{a+(n+\frac{1}{2})h} + c^{(3)}h^3\Delta^3 y_{a+(n+\frac{1}{2})h}$$

wo wieder

$$\Sigma y_{a+\frac{1}{2}h} = -a^{(1)}\Delta y_{a+\frac{1}{2}h} - b^{(1)}\Delta^3 y_{a+\frac{1}{2}h} - c^{(1)}\Delta^5 y_{a+\frac{1}{2}h} - \ldots$$

$$\Sigma^2 y_a = -\tfrac{1}{2}\Sigma y_{a+\frac{1}{2}h} - \tfrac{1}{2}\alpha^{(2)}\{y_{a+h} + y_a\} - \tfrac{1}{2}\beta^{(2)}\{\Delta^2 y_{a+h} + \Delta^2 y_a\} - \tfrac{1}{2}\gamma^{(3)}\{\Delta^4 y_{a+h} + \Delta^4 y_a\} - \ldots$$

$$\Sigma^3 y_{a+\frac{1}{2}h} = -a^{(3)}\Sigma y_{a+\frac{1}{2}h} - b^{(3)}\Delta y_{a+\frac{1}{2}h} - c^{(3)}\Delta^3 y_{a+\frac{1}{2}h} - \ldots$$

zu setzen ist, und so kann man jedes beliebige vielfache Integral erhalten. Will man diesen Integralen dieselben Grenzen ertheilen, wie den vorhergehenden, so braucht man nur allenthalben in den Ausdrücken derselben $a-\frac{1}{2}h$ statt a zu setzen, aber um alsdann bei der Anwendung unmittelbar gegebene Functionen vor sich zu haben, muss man ursprünglich

$$x = a+\tfrac{1}{2}h\ ,\quad x = a+\tfrac{3}{2}h\ ,\quad \ldots\ x = a+(n+\tfrac{1}{2})h\ ,\quad x = a+(n+\tfrac{3}{2})h\ ,\ \text{etc.}$$

und auch einige der vorhergehenden Werthe

$$x = a-\tfrac{1}{2}h\ ,\quad x = a-\tfrac{3}{2}h\ ,\ \text{etc.}$$

substituiren.

37.

Die Anwendung der im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke für die bestimmten Integrale werde ich durch ein Beispiel zeigen, welches man auch analytisch integriren kann. Ich werde $y = \sin x$ setzen, und nach beiden Verfahrungsarten davon die drei ersten Integrale von 45^0 bis 95^0 berechnen. Aus einer Tafel für die natürlichen Sinusse, und indem ich $h = 10^0$ setzte, erhielt ich die folgenden Functionswerthe, woraus die mit angesetzten Differenzen sich ohne Weiteres ergeben.

Digitized by Google

x	x	$\Sigma^2 y$	$\Sigma^1 y$	Σy	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
15°	$a-3h$				0.258819						
						+163799					
25	$a-2h$				0.422618		−12844				
						150955		−4586			
35	$a-h$				0.573576		17427		+527		
		+0.028998		−0.343264		133531		4059		+139	
45	a		−0.059015		0.707107		21486		654		−31
		−0.030023		+0.363843		112045		3405		98	
55	$a+h$		+0.304828		0.819152		24889		754		44
		+0.274805		1.182995		87156		2649		84	
65	$a+2h$		1.487823		0.906308		27538		838		31
		1.762628		2.089303		59618		1811		53	
75	$a+3h$		3.577126		0.965926		29349		891		24
		5.339754		3.055229		30269		920		29	
85	$a+4h$		6.632355		0.996195		30269		920		29
		11.972109		4.051424		0		0		0	
95	$a+5h$		10.683779		0.996195		30269		920		29
		22.655888		5.047619		−30269		+920		−29	
105	$a+6h$				0.965926						

Nach den Ausdrücken des Art. 31 ist zuerst

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\, y_a &= +\,0.353553.5\\
\tfrac{1}{2}\,\alpha^{(1)}\{\Delta y_{a+\frac{1}{2}h} + \Delta y_{a-\frac{1}{2}h}\} &= -\,0.010232.3\\
\tfrac{1}{2}\,\beta^{(1)}\{\Delta^3 y_{a+\frac{1}{2}h} + \Delta^3 y_{a-\frac{1}{2}h}\} &= -\,0.000057.0\\
\tfrac{1}{2}\,\gamma^{(1)}\{\Delta^5 y_{a+\frac{1}{2}h} + \Delta^5 y_{a-\frac{1}{2}h}\} &= -\,0.000000.3\\
\Sigma y_{a-\frac{1}{2}h} &= -\,0.343264
\end{aligned}$$

welcher Werth zuerst in die Columne für die erste Summenfunction eingeschrieben, und damit alle übrigen ersten Summen gebildet wurden. Es wird nun zufolge des angezogenen Artikels

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\{\Sigma y_{a+\frac{1}{2}h} + \Sigma y_{a+\frac{3}{2}h}\} &= +\,4.549521.5\\
\tfrac{1}{2}\,\alpha^{(1)}\{\Delta y_{a+\frac{1}{2}h} + \Delta y_{a+\frac{3}{2}h}\} &= +\,0.001261.2\\
\tfrac{1}{2}\,\beta^{(1)}\{\Delta^3 y_{a+\frac{1}{2}h} + \Delta^3 y_{a+\frac{3}{2}h}\} &= +\,0.000007.0\\
\int y\,dx &= +\,h\,4.550790
\end{aligned}$$

zwischen den angeführten Grenzen 45° und 95°. Nach dem Art. 32 wurde jetzt zuerst berechnet

$$\begin{aligned}
a^{(2)}\, y_a &= +\,0.058925.6\\
b^{(2)}\, \Delta^2 y_a &= +\,0.000089.5\\
c^{(2)}\, \Delta^4 y_a &= +\,0.000000.3\\
\Sigma^2 y_a &= -\,0.059015
\end{aligned}$$

Digitized by Google

diese Zahl in die Columne der zweiten Summen eingeschrieben, und alsdann die übrigen zweiten Summen berechnet. Ferner ergab sich

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y_{a+5h} &= +\ 10.638779 \\
a^{(2)}\, y_{a+5h} &= +\ 0.083016.3 \\
b^{(2)}\, \Delta^2 y_{a+5h} &= +\ 0.000126.1 \\
c^{(2)}\, \Delta^4 y_{a+5h} &= +\ 0.000000.5 \\
\iint y\, dx^2 &= +\ h^2\, 10.766922
\end{aligned}$$

Endlich fand sich nach Art. 33 erst, indem $\alpha^{(3)} = 0$ ist,

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\, \Delta^2 y_a &= -\ 0.029507.5 \\
\tfrac{1}{2}\, \beta^{(3)} \{\Delta y_{a+\frac{1}{2}h} + \Delta y_{a-\frac{1}{2}h}\} &= +\ 0.000511.6 \\
\tfrac{1}{2}\, \gamma^{(3)} \{\Delta^3 y_{a+\frac{1}{2}h} + \Delta^3 y_{a-\frac{1}{2}h}\} &= +\ 0.000003.8 \\
\Delta^3 y_{a-\frac{1}{2}h} &= +\ 0.028992
\end{aligned}$$

und nachdem hiemit die übrigen dritten Summen gebildet worden waren,

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\, \{\Delta^3 y_{a+\frac{3}{2}h} + \Delta^3 y_{a+\frac{5}{2}h}\} &= +\ 17.313998.5 \\
\tfrac{1}{2}\, \beta^{(3)} \{\Delta y_{a+\frac{3}{2}h} + \Delta y_{a+\frac{5}{2}h}\} &= -\ 0.000063.1 \\
\tfrac{1}{2}\, \gamma^{(3)} \{\Delta^3 y_{a+\frac{3}{2}h} + \Delta^3 y_{a+\frac{5}{2}h}\} &= -\ 0.000000.5 \\
\iiint y\, dx &= +\ h^3\, 17.313935
\end{aligned}$$

in denselben Grenzen wie oben. Multiplicirt man mit dem in Theilen des Radius auszudrückenden Werth von $h = 10^0$, so wird schliesslich

$$\begin{aligned}
\int \sin x\, dx &= +\ 0.7942625 \\
\iint \sin x\, dx^2 &= +\ 0.3279792 \\
\iiint \sin x\, dx^3 &= +\ 0.0920509
\end{aligned}$$

38.

Um dasselbe Integral auch durch die zweite Gattung von Formeln zu berechnen, wurden zuerst die folgenden Functionswerthe nebst den Differenzen gebildet,

Digitized by Google

x	x	$\Sigma^3 y$	$\Sigma^2 y$	Σy	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
10°	$a-3h$				0.173648						
						+168372					
20	$a-2h$				0.342020		−10892				
						157980		−4800			
30	$a-h$				0.500000		15192		+460		
						142788		4340		+137	
40	a		+0.032115		0.642788		19532		597		−29
		+0.004895		−0.005147		123256		3743		108	
50	$a+h$		0.026968		0.766044		23275		705		15
		0.028863		+0.760897		99981		3038		93	
60	$a+2h$		0.787865		0.866025		26313		798		21
		0.815928		1.626922		73668		2240		72	
70	$a+3h$		2.414787		0.939693		28553		870		33
		3.230715		3.566615		45115		1370		39	
80	$a+4h$		4.981502		0.984808		29923		909		26
		8.212217		3.551423		+ 15192		− 461		+ 13	
90	$a+5h$		8.532825		1.000000		30384		922		26
		16.744942		4.551423		− 15192		+ 461		− 13	
100	$a+6h$		13.084248		0.984808		29922		909		26

Nach dem Art. 34 fand sich hieraus zuerst

$$\begin{aligned} a^{(1)}\,\Delta y_{a+\frac{1}{2}h} &= +\,0.005135.7 \\ b^{(1)}\,\Delta^3 y_{a+\frac{1}{2}h} &= +\,0.000011.4 \\ \Sigma y_{a+\frac{1}{2}h} &= -\,0.005147 \end{aligned}$$

und nachdem hiemit die ersten Summen gebildet worden waren,

$$\begin{aligned} \Sigma y_{a+\frac{1}{2}h} &= +\,4.551423 \\ a^{(1)}\,\Delta y_{a+\frac{1}{2}h} &= -\,0.000633 \\ b^{(1)}\,\Delta^3 y_{a+\frac{1}{2}h} &= -\,0.000001 \\ \int y\,dx &= +\,h\,4.550789 \end{aligned}$$

Nach dem Art. 35 ergab sich

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\,\Sigma y_{a+\frac{1}{2}h} &= -\,0.002573.5 \\ \tfrac{1}{2}\,\alpha^{(2)}\,\{y_{a+h} + y_a\} &= -\,0.029350.7 \\ \tfrac{1}{2}\,\beta^{(2)}\,\{\Delta^2 y_{a+h} + \Delta^2 y_a\} &= -\,0.000189.5 \\ \tfrac{1}{2}\,\gamma^{(2)}\,\{\Delta^4 y_{a+h} + \Delta^4 y_a\} &= -\,0.000001.2 \\ \Sigma^2 y_a &= +\,0.032115 \end{aligned}$$

und nach der zweiten Summenbildung

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\,\{\Sigma^2 y_{a+6h} + \Sigma^2 y_{a+5h}\} &= +\,10.808536.5 \\ \tfrac{1}{2}\,\alpha^{(2)}\,\{y_{a+6h} + y_{a+5h}\} &= -\,0.041350.2 \\ \tfrac{1}{2}\,\beta^{(2)}\,\{\Delta^2 y_{a+6h} + \Delta^2 y_{a+5h}\} &= -\,0.000267.0 \\ \tfrac{1}{2}\,\gamma^{(2)}\,\{\Delta^4 y_{a+6h} + \Delta^4 y_{a+5h}\} &= -\,0.000001.7 \\ \iint y\,dx^2 &= +\,h^2\,10.766918 \end{aligned}$$

Digitized by Google

Nach dem Art. 36 fand sich

$$\begin{aligned} a^{(3)}\,\Sigma^3 y_{a+\frac{1}{2}h} &= -\,0.000643.4 \\ b^{(3)}\,\Delta y_{a+\frac{1}{2}h} &= -\,0.000449.4 \\ c^{(3)}\,\Delta^3 y_{a+\frac{1}{2}h} &= -\,0.000001.8 \\ \hline \Sigma^3 y_{a+\frac{1}{2}h} &= +\,0.001095 \end{aligned}$$

und nach der dritten Summenbildung

$$\begin{aligned} \Sigma^3 y_{a+\frac{1}{2}h} &= +\,16.744942 \\ a^{(3)}\,\Sigma y_{a+\frac{1}{2}h} &= +\,0.568928 \\ b^{(3)}\,\Delta y_{a+\frac{1}{2}h} &= +\,0.000055 \\ \hline \iiint y\,dx^3 &= +\,h^3\,17.313925 \end{aligned}$$

Nach den Multiplicationen mit h ergab sich schliesslich

$$\begin{aligned} \int \sin x\,dx &= +\,0.7942625 \\ \iint \sin x\,dx^2 &= +\,0.3279791 \\ \iiint \sin x\,dx^3 &= +\,0.0920508 \end{aligned}$$

mit den im vor. Art. berechneten Werthen in Uebereinstimmung.

39.

Entwickelt man dieselben Integrale unter denselben Grenzen analytisch, so erhält man

$$\int \sin x\,dx = \cos 45^0 - \cos 95^0$$

$$\iint \sin x\,dx^2 = \sin 45^0 - \sin 95^0 + 50^0.\cos 45^0$$

$$\iiint \sin x\,dx^3 = -\cos 45^0 + \cos 95^0 + 25^0.50^0.\cos 45^0 + 50^0.\sin 45^0$$

wo die Kreisbögen ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen in Theilen des Radius ausgedrückt werden müssen. Die Substitution der numerischen Werthe in diese Ausdrücke ergab

$$\begin{aligned} \int \sin x\,dx &= +\,0.7942625 \\ \iint \sin x\,dx^2 &= +\,0.3279792 \\ \iiint \sin x\,dx^3 &= +\,0.0920509 \end{aligned}$$

Digitized by Google

mit den durch die mechanischen Quadraturen eben erhaltenen Werthen übereinstimmend.

40.

Die Coefficienten a_1, b_1, etc., die unter andern aus den im Art. 11 entwickelten Gleichungen folgen, nebst den α_1, α_2, etc., die zufolge des Art. 14 mit jenen in einfacher Beziehung stehen, stehen auch mit den Bernoullischen Zahlen in einfacher Beziehung. Um dieses zu zeigen, nehme ich die Gleichung

$$\frac{h}{e^{\frac{1}{2}h} - e^{-\frac{1}{2}h}} = 1 + a_1 h^2 + b_1 h^4 + c_1 h^6 + \ldots$$

vor, die aus der Gleichung des Art. 10 folgt, wenn darin $n = 1$ gesetzt wird. Schreiben wir in der vorstehenden Gleichung $2hi$ statt h, wo $i = \sqrt{-1}$ ist, so wird sie

$$\frac{h}{\sin h} = 1 - 2^2 a_1 h^2 + 2^4 b_1 h^4 - 2^6 c_1 h^6 \pm \ldots$$

Bezeichnet man aber die Bernoullischen Zahlen mit B_1, B_2, B_3, etc., so ist bekanntlich

$$h \operatorname{cotg} h = 1 - \frac{2^2 B_1}{1.2} h^2 - \frac{2^4 B_2}{1.2.3.4} h^4 - \frac{2^6 B_3}{1.2..6} h^6 - \ldots$$

und da

$$\frac{1}{\sin h} = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} h - \operatorname{cotg} h$$

ist, so folgt, dass

$$\frac{h}{\sin h} = 1 + B_1 h^2 + (2^3 - 1) \frac{2 B_2}{1.2.3.4} h^4 + (2^5 - 1) \frac{2 B_3}{1.2..6} h^6 + \ldots$$

und es wird also

$$a_1 = -\frac{2-1}{2} \frac{B_1}{2}$$

$$b_1 = \frac{2^3 - 1}{2^3} \frac{B_2}{2.3.4}$$

$$c_1 = -\frac{2^5 - 1}{2^5} \frac{B_3}{2.3..6}$$

etc.

und zufolge des Art. 14 wird ferner

$$\alpha_1 = \frac{B_1}{1.2}$$

$$\beta_1 = -\frac{B_2}{1.2.3.4}$$

$$\gamma_1 = \frac{B_3}{1.2.3..6}$$

etc.

Digitized by Google

und die Gleichungen zwischen a_1, b_1, etc. des Art. 6, oder die zwischen α_1, β_1, etc. des Art. 7 können also dienen, um die Bernoullischen Zahlen eine nach der andern zu berechnen.

41.

Ich will hievon Gelegenheit nehmen, zwei verschiedene Ausdrücke zur Berechnung der einzelnen Bernoullischen Zahlen, die ich vor einer Reihe von Jahren gefunden habe, abzuleiten. Durch bekannte Regeln findet man

$$\int \frac{dx}{1 + 2x\cos h + x^2} = \frac{1}{\sin h} \operatorname{arc\,tg} . \frac{x + \cos h}{\sin h} + \text{const}$$

und hieraus folgt

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + 2x\cos h + x^2} = \frac{h}{2\sin h}$$

Setzt man daher

$$\frac{1}{1 + 2x\cos h + x^2} = S_0 + S_1 h^2 + S_2 h^4 + S_3 h^6 + \ldots$$

so ist dem Vorhergehenden zufolge allgemein

$$B_n = \frac{2.3\ldots 2n}{2^{2n-1} - 1} \int_0^1 S_n dx$$

und es kommt also nur auf die Entwickelung von S_n, und die darauf auszuführende, bestimmte Integration an.

42.

Es ist

$$\frac{1}{1 + 2x\cos h + x^2} = \frac{1}{(1+x)^2 - 4x\sin^2 \frac{1}{2}h} = \frac{1}{1+x^2}\left(1 - \frac{x}{1+x^2}(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2\right)$$

Bezeichnen wir der Kürze wegen die Function linker Hand mit P, so bekommen wir zuerst

$$P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{x}{(1+x)^4}(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2 + \frac{x^2}{(1+x)^6}(2\sin\tfrac{1}{2}h)^4 + \frac{x^3}{(1+x)^8}(2\sin\tfrac{1}{2}h)^6 + \ldots$$

und setzen wir überdiess

$$(2\sin\tfrac{1}{2}h)^{2n} = h^{2n} + R_n^{(1)} h^{2(n+1)} + R_n^{(2)} h^{2(n+2)} + R_n^{(3)} h^{2(n+3)} + \ldots$$

Digitized by Google

so giebt die Substitution

$$P = \frac{1}{(1+x^2)^2} + \frac{x}{(1+x^2)^4} h^2 + \left\{ \frac{x^2}{(1+x^2)^4} + \frac{x}{(1+x^2)^5} R_1^{(1)} \right\} h^4$$
$$+ \left\{ \frac{x^3}{(1+x^2)^6} + \frac{x^3}{(1+x^2)^6} R_2^{(1)} + \frac{x}{(1+x^2)^6} R_1^{(2)} \right\} h^6$$
$$+ \left\{ \frac{x^4}{(1+x^2)^{10}} + \frac{x^3}{(1+x^2)^8} R_3^{(1)} + \frac{x^2}{(1+x^2)^8} R_2^{(2)} + \frac{x}{(1+x^2)^8} R_1^{(3)} \right\} h^8$$
$$+ \text{ etc.}$$

hieraus geht schon die allgemeine Form der Coefficienten hervor. Man sieht sogleich, dass

$$S_n = \frac{x^n}{(1+x^2)^{2n+2}} + \frac{x^{n-1}}{(1+x^2)^{2n}} R_{n-1}^{(1)} + \frac{x^{n-2}}{(1+x^2)^{2n-2}} R_{n-2}^{(2)} + \ldots$$
$$+ \frac{x^2}{(1+x^2)^6} R_2^{(n-2)} + \frac{x}{(1+x^2)^4} R_1^{(n-1)}$$

43.

Die Entwickelung der eben allgemein mit $R_n^{(m)}$ bezeichneten Coefficienten lässt sich auf die im Art. 12 ausgeführten Entwickelungen hinführen. Schreibt man $2n$ statt n, so ist die dort entwickelte Gleichung

$$(e^{\frac{1}{2}hi} - e^{-\frac{1}{2}hi})^{2n} = h^{2n} + a_{-2n} h^{2(n+1)} + b_{-2n} h^{2(n+2)} + c_{-2n} h^{2(n+3)} + \ldots$$

und setzt man hi statt h in diese, so wird

$$(e^{\frac{1}{2}hi} - e^{-\frac{1}{2}hi})^{2n} = (-1)^n (h^{2n} - a_{-2n} h^{2(n+1)} + b_{-2n} h^{2(n+2)} \mp \ldots)$$

Da aber

$$e^{\frac{1}{2}hi} - e^{-\frac{1}{2}hi} = 2i \sin \tfrac{1}{2} h$$

ist, so wird

$$(e^{\frac{1}{2}hi} - e^{-\frac{1}{2}hi})^{2n} = (-1)^n (2 \sin \tfrac{1}{2} h)^{2n}$$

und man bekommt

$$(2 \sin \tfrac{1}{2} h)^{2n} = h^{2n} - a_{-2n} h^{2(n+1)} + b_{-2n} h^{2(n+2)} \mp \ldots$$

Die Vergleichung dieser Reihe mit der des vor. Art. für dieselbe Function zeigt, dass

$$R_n^{(1)} = -a_{-2n}; \quad R_n^{(2)} = b_{-2n}; \quad R_n^{(3)} = -c_{-2n}; \text{ etc.}$$

und aus den Ausdrücken des Art. 12 für a_{-n}, b_{-n}, etc. bekommt man daher

Digitized by Google

$$R_n^{(m)} = \frac{(-1)^m}{2.3\ldots 2(n+m)}\left\{n^{2n+m} - \frac{2n}{1}(n-1)^{2(n+m)} + \frac{2n.2n-1}{1.2}(n-2)^{2(n+m)} \mp \ldots\right\}$$

oder wenn man wie a. a. O. die gleichen Glieder zusammenzieht, und

$$R_n^{(m)} = \frac{2\,T_{n+m}^{(m)}}{1.2.3\ldots 2n}$$

setzt,

$$T_n^{(m)} = (-1)^m\left\{(n-m)^{2n} - \frac{2n-2m}{1}(n-m-1)^{2n} + \frac{2n-2m.2n-2m-1}{1.2}(n-m-2)^{2n} \mp \ldots \pm \frac{2n-2m.2n-2m-1\ldots n-m+3}{1.\quad 2\quad \ldots n-m-2}\,2^{2n} \mp \frac{2n-2m.2n-2m-1\ldots n-m+2}{1.\quad 2\quad \ldots n-m-1}\right\}$$

Hiemit wird

$$S_n = \frac{x^n}{(1+x)^{2n+2}} + \frac{2\,T_n^{(1)}}{1.2\ldots 2n}\frac{x^{n-1}}{(1+x)^{2n}} + \frac{2\,T_n^{(2)}}{1.2.\ldots 2n}\frac{x^{n-2}}{(1+x)^{2n-2}} + \ldots + \frac{2\,T_n^{(n-2)}}{1.2\ldots 2n}\frac{x^2}{(1+x)^6} + \frac{2\,T_n^{(n-1)}}{1.2\ldots 2n}\frac{x}{(1+x)^4}$$

oder, da nach einem der Sätze des Art. 12

$$2\,T_n^{(0)} = 1.2\ldots 2n$$

ist,

$$S_n = \frac{2}{1.2\ldots 2n}\left\{T_n^{(0)}\frac{x^n}{(1+x)^{2n+2}} + T_n^{(1)}\frac{x^{n-1}}{(1+x)^{2n}} + T_n^{(2)}\frac{x^{n-2}}{(1+x)^{2n-2}} + \ldots + T_n^{(n-2)}\frac{x^2}{(1+x)^6} + T_n^{(n-1)}\frac{x}{(1+x)^4}\right\}$$

44.

Die Functionen von x, die in dem Ausdruck für S_n vorkommen, entsprechen alle der allgemeinen Form

$$\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{2p}}$$

wo p eine ganze und positive Zahl ist, und es ist daher nur das eine Integral $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{2p}}\,dx$ zu ermitteln, welches durch bekannte Regeln geschehen kann. Man kann setzen

Digitized by Google

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{(1+x)^{2p}} = \text{const} - \left\{\lambda_1 x^{p-1} + \lambda_2 x^{p-2} + \lambda_3 x^{p-3} + \ldots\right\} \frac{1}{(1+x)^{2p-1}}$$

Differentiirt man diese Gleichung, und reducirt alle Glieder auf denselben Nenner, so bekommt man die folgende identische Gleichung

$$\begin{aligned} x^{p-1} &= \lambda_1(2p-1)x^{p-1} + \lambda_2(2p-1)x^{p-2} + \lambda_3(2p-1)x^{p-3} + \ldots \\ &- \left\{\begin{array}{l} \lambda_1(p-1)x^{p-2} + \lambda_2(p-2)x^{p-3} + \lambda_3(p-3)x^{p-4} + \ldots \\ + \lambda_1(p-1)x^{p-1} + \lambda_2(p-2)x^{p-2} + \lambda_3(p-3)x^{p-3} + \ldots \end{array}\right. \end{aligned}$$

und hieraus folgen die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 p \\ 0 &= -\lambda_1(p-1) + \lambda_2(p+1) \\ 0 &= -\lambda_2(p-2) + \lambda_3(p+2) \end{aligned}$$

etc.

woraus

$$\lambda_1 = \frac{1}{p}\,; \quad \lambda_2 = \frac{p-1}{p.p+1}\,; \quad \lambda_3 = \frac{p-1.p-2}{p.p+1.p+2}\,; \text{ etc.}$$

hervorgehen, die bei

$$\lambda_p = \frac{p-1.p-2\ldots 2.1}{p.p+1\ldots 2p-2.2p-1}$$

also bei dem mit x^0 multiplicirten Gliede abbrechen. Gehen wir nun zu dem bestimmten Integral über, so bekommen wir zuerst

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{(1+x)^{2p}} &= \frac{p-1.p-2..2.1}{p.p+1\ldots 2p-2.2p-1} \\ &- \frac{1}{2^{2p-1}}\left\{\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p.p+1} + \frac{p-1.p-2}{p.p+1.p+2} + \ldots + \frac{p-1\ldots 2.1}{p.p+1\ldots 2p-1}\right\} \end{aligned}$$

Wenn man die Reihenfolge der negativen Glieder umkehrt, so kann man diese Gleichung auch so schreiben,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{(1+x)^{2p}} &= \frac{1.2\ldots p-1}{p.p+1\ldots 2p-1} \\ &- \frac{1.2\ldots p-1}{p.p+1..2p-1}\left\{1 + \frac{2p-1}{1} + \frac{2p-1.2p-2}{1.2} + \ldots + \frac{2p-1.2p-2\ldots p+1}{1.2\ldots p-1}\right\}\frac{1}{2^{2p-1}} \end{aligned}$$

Die innerhalb der Klammern befindlichen Glieder sind aber die erste Hälfte der Glieder, die man durch die Entwickelung der Grösse $(1+1)^{2p-1}$ vermittelst der Binomialformel erhält, und es ist daher

$$1 + \frac{2p-1}{1} + \frac{2p-1.2p-2}{1.2} + \ldots + \frac{2p-1.2p-2\ldots p+1}{1.2\ldots p-1} = \frac{2^{2p-1}}{2}$$

Digitized by Google

Substituirt man diesen Werth, so wird

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{(1+x)^{2p}} = \frac{1}{2}\,\frac{1.2\ldots p-1}{p.p+1\ldots 2p-1}$$

und hiemit ergiebt sich sogleich

$$B_n = \frac{1}{2^{2n-1}-1}\left\{\frac{1.2\ldots n}{n+1.n+2\ldots 2n+1}T_n^{(0)} + \frac{1.2\ldots n-1}{n.n+1\ldots 2n-1}T_n^{(1)} + \frac{1.2\ldots n-2}{n-1.n\ldots 2n-3}T_n^{(2)} + \ldots + \frac{2}{3.4.5}T_n^{(n-2)} + \frac{1}{2.3}T_n^{(n-1)}\right\}$$

wobei bemerkt werden kann, dass wenn man die T Functionen in entgegengesetzter Ordnung aufstellt, sie folgende Ausdrücke haben

$$T_n^{(n-1)} = (-1)^{n-1}$$
$$T_n^{(n-2)} = (-1)^n \left\{2^{2n} - 4\right\}$$
$$T_n^{(n-3)} = (-1)^{n-1}\left\{3^{2n} - \frac{6}{1}2^{2n} + \frac{6.5}{1.2}\right\}$$
$$T_n^{(n-4)} = (-1)^n \left\{4^{2n} - \frac{8}{1}3^{2n} + \frac{8.7}{1.2}2^{2n} - \frac{8.7.6}{1.2.3}\right\}$$

u. s. w., die man fortsetzen kann, so weit man will. Wenn man hieraus die ersten Bernoullischen Zahlen als Beispiel rechnet, so bekommt man die folgenden Zahlen. Zuerst

$$T_1^{(0)} = 1$$
$$T_2^{(0)} = 3.4, \quad T_2^{(1)} = -1,$$
$$T_3^{(0)} = 3.4.5.6, \quad T_3^{(1)} = -60, \quad T_3^{(2)} = 1$$
$$T_4^{(0)} = 3.4.5.6.7.8, \quad T_4^{(1)} = -(3^6 - 6.2^6 + 15) = -5040,$$
$$T_4^{(2)} = 252, \quad T_4^{(3)} = -1$$

und hiemit

$$B_1 = \frac{1}{2.3} = \frac{1}{6}$$
$$B_2 = \frac{1}{7}\left\{\frac{1.2}{3.4.5}3.4 - \frac{1}{2.3}\right\} = \frac{1}{30}$$
$$B_3 = \frac{1}{31}\left\{\frac{1.2.3}{4.5.6.7}3.4.5.6 - \frac{1.2}{3.4.5}60 + \frac{1}{2.3}\right\} = \frac{1}{42}$$
$$B_4 = \frac{1}{127}\left\{\frac{1.2.3.4}{5.6.7.8.9}3.4.5.6.7.8 - \frac{1.2.3}{4.5.6.7}5040 + \frac{1.2}{3.4.5}252 - \frac{1}{2.3}\right\} = \frac{1}{30}$$

mit den bekannten Werthen übereinstimmend.

Digitized by Google

45.

Einen anderen Ausdruck für die Bernoullischen Zahlen erhält man wie folgt. Da

$$\operatorname{tg} h = \operatorname{cotg} h - 2 \operatorname{cotg} 2h$$

und

$$h \operatorname{cotg} h = 1 - \frac{2^2 B_1}{1.2} h^2 - \frac{2^4 B_2}{1.2.3.4} h^4 - \frac{2^6 B_3}{1.2...6} h^6 - \text{etc.}$$

ist, so wird

$$\operatorname{tg} h = \frac{2^2(2^2-1)}{1.2} B_1 h + \frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4} B_2 h^3 + \frac{2^6(2^6-1)}{1.2...6} B_3 h^5 + \ldots$$

und da ferner

$$\log \text{nat} \cos h = -\int \operatorname{tg} h \, dh$$

ist, so ergiebt sich

$$\log \text{nat} \cos h = -\frac{2^2(2^2-1)}{2.1.2} B_1 h^2 - \frac{2^4(2^4-1)}{4.1.2.3.4} B_2 h^4 - \frac{2^6(2^6-1)}{6.1.2...6} B_3 h^6 - \ldots$$

wo die Integrationsconstante Null ist, weil

$$\log \text{nat} \cos 0 = 0$$

ist. Es ist ferner

$$\log \text{nat} \cos h = \log \text{nat} \left(1 - \tfrac{1}{2}(2 \sin \tfrac{1}{2} h)^2\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}(2 \sin \tfrac{1}{2} h)^2 - \frac{1}{2^2.2}(2 \sin \tfrac{1}{2} h)^4 - \frac{1}{2^2.3}(2 \sin \tfrac{1}{2} h)^6 - \ldots$$

Diese Reihe convergirt zwar nur von $h = 0$ bis $h = \frac{\pi}{2}$, allein wir können uns bei den folgenden Entwickelungen h so klein denken wie wir wollen, und deshalb hat es nichts zu bedeuten, dass sie von $h = \frac{\pi}{2}$ bis $h = \pi$ divergirt.

Wenn man nun für die Potenzen von $2 \sin \frac{1}{2} h$ die Reihen des Art. 42 substituirt, so wird

$$\begin{aligned}
\log \text{nat} \cos h = &-\tfrac{1}{2} h^2 - \tfrac{1}{2} R_1^{(1)} h^4 - \tfrac{1}{2} R_1^{(2)} h^6 - \tfrac{1}{2} R_1^{(3)} h^8 - \ldots \\
&- \frac{1}{2^2.2} h^4 - \frac{1}{2^2.2} R_2^{(1)} h^6 - \frac{1}{2^2.2} R_2^{(2)} h^8 - \ldots \\
&- \frac{1}{2^4.3} h^6 - \frac{1}{2^4.3} R_3^{(1)} h^8 - \ldots \\
&- \frac{1}{2^6.4} h^8 - \ldots \\
&- \ldots
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem obigen, so ergiebt sich sogleich

$$B_n = \frac{2n.4.2\ldots 2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)}\left\{\frac{1}{n.2^n} + \frac{R_{n-1}^{(1)}}{(n-1)2^{n-1}} + \frac{R_{n-2}^{(2)}}{(n-2)2^{n-2}} + \ldots + \frac{R_2^{(n-2)}}{2.2^2} + \frac{R_1^{(n-1)}}{1.2}\right\}$$

und wenn man die T Functionen einführt,

$$B_n = \frac{n}{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}\left\{\frac{T_n^{(0)}}{n.2^n} + \frac{T_n^{(1)}}{(n-1)2^{n-1}} + \frac{T_n^{(2)}}{(n-2)2^{n-2}} + \ldots + \frac{T_n^{(n-2)}}{2.2^2} + \frac{T_n^{(n-1)}}{1.2}\right\}$$

Rechnet man hieraus wieder die ersten Zahlen, so wird, da die T Coefficienten dieselben sind wie oben

$$B_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$B_2 = \frac{2}{4.15}\left\{\frac{2.4}{2.4} - \frac{4}{2}\right\} = \frac{1}{30}$$

$$B_3 = \frac{3}{16.63}\left\{\frac{3.4.5.6}{3.8} - \frac{60}{2.4} + \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{42}$$

$$B_4 = \frac{4}{64.255}\left\{\frac{3.4.5.6.7.8}{4.16} - \frac{5040}{3.8} + \frac{252}{2.4} - \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{30}$$

wie oben.

46.

Man kann den zuletzt erhaltenen Ausdruck, so wie die Rechnung die er erfordert, noch vereinfachen. Setzt man

$$V_n^{(m)} = \frac{T_n^{(m)}}{n-m}$$

so wird

$$B_n = \frac{n}{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}\left\{\frac{V_n^{(0)}}{2^n} + \frac{V_n^{(1)}}{2^{n-1}} + \frac{V_n^{(2)}}{2^{n-2}} + \ldots + \frac{V_n^{(n-2)}}{2^2} + \frac{V_n^{(n-1)}}{2}\right\}$$

Diese V Coefficienten, die alle ganze Zahlen sind, können durch einfache und regelmässige Ausdrücke einer aus den anderen berechnet werden. Um dieses zu zeigen nehme ich den Ausdruck für $T_n^{(m)}$ des Art. 43 vor, und ersetze zuerst $T_n^{(m)}$ durch $V_n^{(m)}$ vermittelst der vorstehenden Gleichung, dann wird, wenn man zugleich zur Abkürzung μ statt $n-m$ schreibt,

Digitized by Google

$$V_n^{m)} = (-1)^m \Big\{ \mu^{2n-1} - \frac{2\mu-2}{1}(\mu-1)^{2n-1} + \frac{2\mu-4 \,.\, 2\mu-1}{1 \,.\, 2}(\mu-2)^{2n-1} - \frac{2\mu-6 \,.\, 2\mu-1 \,.\, 2\mu-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}(\mu-3)^{2n+1} \pm \ldots \Big|$$

schreibt man hierin nach und nach $m+1$, $m+2$, etc. für m, so ergiebt sich

$$-\frac{2\mu-2}{1}V_n^{(m+1)} = (-1)^m \Big\{ \frac{2\mu-2}{1}(\mu-1)^{2n-1} - \frac{2\mu-4 \,.\, 2\mu-2}{1 \,.\, 1}(\mu-2)^{2n-1} + \frac{2\mu-6 \,.\, 2\mu-2 \,.\, 2\mu-3}{1 \,.\, 1 \,.\, 2}(\mu-3)^{2n-1} \mp \ldots \Big|$$

$$\frac{2\mu-3 \,.\, 2\mu-1}{1 \,.\, 2}V_n^{(m+2)} = (-1)^m \Big\{ \frac{2\mu-1 \,.\, 2\mu-3}{1 \,.\, 2}(\mu-2)^{2n-1} - \frac{2\mu-6 \,.\, 2\mu-4 \,.\, 2\mu-3}{1 \,.\, 1 \,.\, 2}(\mu-3)^{2n-1} \pm \ldots \Big|$$

$$-\frac{2\mu-4 \,.\, 2\mu-5 \,.\, 2\mu-6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}V_n^{(m+3)} = (-1)^m \Big\{ \frac{2\mu-6 \,.\, 2\mu-5 \,.\, 2\mu-4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}(\mu-3)^{2n-1} \mp \ldots \Big|$$

etc.

addirt man diese Gleichungen, so verschwinden auf der rechten Seite alle vorhandenen Glieder bis auf das erste Glied der ersten Gleichung, nemlich bis auf $(-1)^m \mu^{2n-1}$, und es ist leicht einzusehen, dass bei der Fortsetzung dieses Verfahrens alle folgenden Glieder verschwinden müssen. Es wird daher

$$V_n^{m)} - p_{2\mu-2}^{(1)} V_n^{(m+1)} + p_{2\mu-3}^{(2)} V_n^{m+2)} - p_{2\mu-4}^{(3)} V_n^{(m+3)} \pm \ldots \mp p_{\mu+1}^{(\mu-2)} V_n^{n-2)} \pm p_{\mu}^{(\mu-1)} V_n^{(n-1)} = (-1)^m \mu^{2n-1}$$

wo $p_q^{(p)}$ den $p$ten Binomialcoefficienten der $q$ten Potenz bezeichnet, oder

$$p_q^{(p)} = \frac{q \,.\, q-1 \,.\, \ldots \,.\, q-p+1}{1 \,.\, 2 \,.\, \ldots \,.\, p}$$

und

$$\mu = n - m$$

ist. Specialisirt man nun diese Gleichung, indem man vom letzten Γ anfängt, so wird

$$V_n^{n-1)} = -(-1)^n$$

$$V_n^{n-2)} - p_2^{(1)} V_n^{(n-1)} = (-1)^n 2^{2n-1}$$

$$V_n^{n-3)} - p_4^{(1)} V_n^{(n-2)} + p_3^{(2)} V_n^{n-1)} = -(-1)^n 3^{2n-1}$$

$$V_n^{n-4)} - p_6^{(1)} V_n^{(n-3)} + p_5^{(2)} V_n^{n-2)} - p_4^{(3)} V_n^{n-1)} = (-1)^n 4^{2n-1}$$

etc. etc.

Digitized by Google

deren Gesetz des Fortganges offenbar ist. Die letzte Gleichung dieses Systems ist

$$V_n^{(0)} - p_{2n-2}^{(1)} V_n^{(1)} + p_{2n-3}^{(2)} V_n^{(2)} - p_{2n-4}^{(3)} V_n^{(3)} \pm \cdots + (-1)^n p_{n+1}^{(n-2)} V_n^{(n-2)} - (-1)^n p_n^{(n-1)} V_n^{(n-1)} = n^{2n-1}$$

woraus der Werth von $V_n^{(0)}$ hervorgeht. Aber ausserdem ist auch

$$V_n^{(0)} = 1.2.3 \ldots 2n-1$$

und man braucht daher das vorstehende System von Gleichungen nur bis $V_n^{(1)}$ fortzusetzen. Setzt man es aber bis zu $V_n^{(0)}$ fort, so giebt die letzte Gleichung eine Controle dieser ganzen Rechnung.

Man kann auch diese Bestimmungen umkehren, und ein System von ähnlichen Gleichungen geben, die vom anderen Ende anfangen. Die ersten sechs Gleichungen sind

$$V_n^{(1)} + \frac{n}{2.1.2.3} V_n^{(0)} = 0$$

$$V_n^{(2)} + \frac{n-1}{4.1.2.3} V_n^{(1)} + \frac{n}{2.1.2..5} V_n^{(0)} = 0$$

$$V_n^{(3)} + \frac{n-2}{6.1.2.3} V_n^{(2)} + \frac{n-1}{3.1.2..5} V_n^{(1)} + \frac{2.3}{3} \frac{n}{1.2..7} V_n^{(0)} = 0$$

$$V_n^{(4)} + \frac{n-3}{8.1.2.3} V_n^{(3)} + \frac{n-2}{4.1.2..5} V_n^{(2)} + \frac{2.3}{4} \frac{n-1}{1.2..7} V_n^{(1)} + \frac{2^2.3^2}{4} \frac{n}{1.2..9} V_n^{(0)} = 0$$

$$V_n^{(5)} + \frac{n-4}{10.1.2.3} V_n^{(4)} + \frac{n-3}{5.1.2..5} V_n^{(3)} + \frac{2.3}{5} \frac{n-2}{1.2..7} V_n^{(2)} + \frac{2^2.3^2}{5} \frac{n-1}{1.2..9} V_n^{(1)} + \frac{2^3.3^2.5}{5} \frac{n}{1.2..11} V_n^{(0)} = 0$$

$$V_n^{(6)} + \frac{n-5}{12.1.2.3} V_n^{(5)} + \frac{n-4}{6.1.2..5} V_n^{(4)} + \frac{2.3}{6} \frac{n-3}{1.2..7} V_n^{(3)} + \frac{2^2.3^2}{6} \frac{n-2}{1.2..9} V_n^{(2)} + \frac{2^3.3^2.5}{6} \frac{n-1}{1.2..11} V_n^{(1)} + \frac{2^4.3^2.5^2}{6} \frac{n}{1.2..13} V_n^{(0)} = 0$$

Man sieht aber, dass hier das Gesetz des Fortganges anfängt undeutlich zu werden, auch sind diese Gleichungen weniger bequem wie die vorhergehenden, wegen der Divisionen mit grossen Zahlen, die sie erfordern. Höchstens kann man die ersten derselben in Anwendung bringen, die jedenfalls einfacher sind, wie die letzten des vorhergehenden Systems.

Digitized by Google

47.

Man kann die Nenner innerhalb der Klammern im Ausdruck von B_n leicht fortschaffen. Sei

$$W_n^{(m)} = \frac{V_n^{(m)}}{2^{n-m-1}}$$

dann wird sogleich

$$B_n = \frac{n}{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}\{W_n^{(0)} + W_n^{(1)} + W_n^{(2)} + \ldots + W_n^{(n-2)} + W_n^{(n-1)}\}$$

und zur Bestimmung der W Functionen ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$W_n^{(n-1)} = -(-1)^n$$

$$W_n^{(n-2)} = \tfrac{1}{2}p_2^{(1)} W_n^{(n-1)} + (-1)^n \frac{2^{n-1}}{2}$$

$$W_n^{(n-3)} = \tfrac{1}{2}p_4^{(1)} W_n^{(n-2)} - \tfrac{1}{2^2}p_3^{(2)} W_n^{(n-1)} - (-1)^n \frac{3^{2n-1}}{2^2}$$

$$W_n^{(n-4)} = \tfrac{1}{2}p_6^{(1)} W_n^{(n-3)} - \tfrac{1}{2^2}p_5^{(2)} W_n^{(n-2)} + \tfrac{1}{2^3}p_4^{(3)} W_n^{(n-1)} + (-1)^n \frac{4^{2n-1}}{2^3}$$

etc. etc.

und es wird hier auch

$$W_n^{(0)} = 1.2..n-1.1.3.5..2n-1$$

Bei der Anwendung dieser Ausdrücke kommt man auf kleinere Zahlen wie bei der Anwendung der V Functionen, allein man kommt hier auf gebrochene Zahlen, welches bei der Anwendung des V nie statt findet.

48.

Als Beispiel der Anwendung der Ausdrücke des vor. Art. will ich den numerischen Werth von B_{10} rechnen. Aus einer Potenzentafel habe ich zuerst die folgenden Zahlengrössen erhalten, in welchen die nach je drei Ziffern angesetzten Punkte nur zur Erleichterung der Uebersicht dienen sollen.

Digitized by Google

$$\frac{3^{17}}{2} = 262.144 = 2^{18}$$

$$\frac{3^{19}}{4} = 290.565.366\frac{3}{4}$$

$$\frac{4^{17}}{8} = 34.359.738.368 = 2^{16}.4^{19}$$

$$\frac{5^{19}}{16} = 1.192.092.895.507\frac{13}{16}$$

$$\frac{6^{19}}{32} = 19.042.491.875.328 = 2^{11}.3^{19}$$

$$\frac{7^{19}}{64} = 178.107.737.271.455\frac{23}{64}$$

$$\frac{8^{19}}{128} = 1.125.899.906.842.624 = 2^{12}.4^{19}$$

$$\frac{9^{19}}{256} = 5.276.764.522.180.125\frac{89}{256}$$

$$\frac{10^{19}}{512} = 19.531.250.000.000.000 = 2^{10}.5^{19}$$

Aus einer Tafel für die Binomialcoefficienten ergab sich

$$\frac{1}{2}p_2^{(1)} = 1$$

$$\frac{1}{2}p_4^{(1)} = 2, \quad \frac{1}{4}p_3^{(2)} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}p_6^{(1)} = 3, \quad \frac{1}{4}p_5^{(2)} = \frac{5}{2}, \quad \frac{1}{8}p_4^{(3)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}p_8^{(1)} = 4, \quad \frac{1}{4}p_7^{(2)} = \frac{21}{4}, \quad \frac{1}{8}p_6^{(3)} = \frac{5}{2}, \quad \frac{1}{16}p_5^{(4)} = \frac{5}{16}$$

$$\frac{1}{2}p_{10}^{(1)} = 5, \quad \frac{1}{4}p_9^{(2)} = 9, \quad \frac{1}{8}p_8^{(3)} = 7, \quad \frac{1}{16}p_7^{(4)} = \frac{35}{16}, \quad \frac{1}{32}p_6^{(5)} = \frac{3}{16}$$

$$\frac{1}{2}p_{12}^{(1)} = 6, \quad \frac{1}{4}p_{11}^{(2)} = \frac{55}{4}, \quad \frac{1}{8}p_{10}^{(3)} = 15, \quad \frac{1}{16}p_9^{(4)} = \frac{63}{8}, \quad \frac{1}{32}p_8^{(5)} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{1}{2}p_{14}^{(1)} = 7, \quad \frac{1}{4}p_{13}^{(2)} = 19, \quad \frac{1}{8}p_{12}^{(3)} = \frac{55}{2}, \quad \frac{1}{16}p_{11}^{(4)} = \frac{165}{8}, \quad \frac{1}{32}p_{10}^{(5)} = \frac{63}{8}$$

$$\frac{1}{2}p_{16}^{(1)} = 8, \quad \frac{1}{4}p_{15}^{(2)} = \frac{105}{4}, \quad \frac{1}{8}p_{14}^{(3)} = \frac{91}{2}, \quad \frac{1}{16}p_{13}^{(4)} = \frac{715}{16}, \quad \frac{1}{32}p_{12}^{(5)} = \frac{99}{4}$$

$$\frac{1}{2}p_{18}^{(1)} = 9, \quad \frac{1}{4}p_{17}^{(2)} = 34, \quad \frac{1}{8}p_{16}^{(3)} = 70, \quad \frac{1}{16}p_{15}^{(4)} = \frac{1365}{16}, \quad \frac{1}{32}p_{14}^{(5)} = \frac{1001}{16}$$

$$\frac{1}{64}p_7^{(6)} = \frac{7}{64},$$

$$\frac{1}{64}p_9^{(6)} = \frac{21}{16}, \quad \frac{1}{128}p_8^{(7)} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{64}p_{11}^{(6)} = \frac{231}{32}, \quad \frac{1}{128}p_{10}^{(7)} = \frac{15}{16}, \quad \frac{1}{256}p_9^{(8)} = \frac{9}{256}$$

$$\frac{1}{64}p_{13}^{(6)} = \frac{429}{16}, \quad \frac{1}{128}p_{12}^{(7)} = \frac{99}{16}, \quad \frac{1}{256}p_{11}^{(8)} = \frac{165}{256}, \quad \frac{1}{512}p_{10}^{(9)} = \frac{5}{256}$$

und hiemit wurde durch die obigen Gleichungen nach und nach erhalten

Digitized by Google

$$W_{10}^{(9)} = - \quad 1$$
$$W_{10}^{(8)} = + \quad 262.143$$
$$W_{10}^{(7)} = - \quad 290.041.080$$
$$W_{10}^{(6)} = + \quad 33.488.959.770$$
$$W_{10}^{(5)} = - \quad 1.056.613.685.400$$
$$W_{10}^{(4)} = + \quad 13.455.991.949.400$$
$$W_{10}^{(3)} = - \quad 82.338.728.472.000$$
$$W_{10}^{(2)} = + 257.387.093.964.000$$
$$W_{10}^{(1)} = - 395.980.144.560.000$$
$$W_{10}^{(0)} = + 237.588.086.736.000$$

Die Berechnung von $W_{10}^{(0)}$ durch den Ausdruck

$$W_{10}^{(0)} = 1.2 \ldots 9.1.3.5 \ldots 19$$

gab vollständige Uebereinstimmung. Addirt man nun die vorstehenden Werthe, so ergiebt sich

$$B_{10} = \frac{10}{2^{19}.1048575}\, 29.088.885.112.832$$
$$= \frac{1}{2^{18}.3.5.11.31.41}\, 29.088.885.112.832 = \frac{174611}{330}$$

mit dem von Euler berechneten Werthe übereinstimmend.

49.

Rechnet man noch B_7, so findet sich aus den Angaben des vor. Art., da die Binomialcoefficienten dieselben bleiben, leicht

$$\frac{2^{12}}{2} = \quad 4.096$$
$$\frac{3^{12}}{4} = \quad 398.580\,\frac{3}{4}$$
$$\frac{4^{12}}{8} = \quad 8.388.608$$
$$\frac{5^{12}}{16} = \quad 76.293.945\,\frac{5}{16}$$
$$\frac{6^{12}}{32} = \quad 408.146.688$$
$$\frac{7^{12}}{64} = 1.513.890.787\,\frac{39}{64}$$

Digitized by Google

$$W_7^{(6)} = + 1$$
$$W_7^{(5)} = - 4.095$$
$$W_7^{(4)} = + 390.390$$
$$W_7^{(3)} = - 7.207.200$$
$$W_7^{(2)} = + 45.405.360$$
$$W_7^{(1)} = - 113.513.400$$
$$W_7^{(0)} = + 97.297.200$$

und hiemit

$$B_7 = \frac{7}{2 \times 4096 \times 16383} \times 22.368.256 = \frac{7}{6}$$

ebenfalls mit Euler übereinstimmend.

Digitized by Google

H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erst Reihe. 1856. 24 Ngr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Erste Abhandlung: über die Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 2 Thlr.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. No. II. Mit 13 Tafeln. 1857. 1 Thlr. 10 Ngr.

SECHSTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Vierter Band. Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. Preis 7 Thlr. 15 Ngr.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Zweite Abhandlung. 1857. 1 Thlr. 10 Ngr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung: über die thermoelektrischen Eigenschaften des Boracites. 1857. 24 Ngr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Dritte Abhandlung: über Elektricitätserregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen. 1858. 16 Ngr.

P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Tafeln. 1858. 2 Thlr.

G. T. FECHNER, Über ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 20 Ngr.

W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Diktyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zellentheilung wachsendem Endosperm. Mit 27 Tafeln. 1859. 2 Thlr. 20 Ngr.

SIEBENTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Fünfter Band. Mit 30 Tafeln. hoch 4. 1861. Preis 8 Thlr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung: über das Verhalten der Weingeistflamme in elektrischer Beziehung. 1859. 20 Ngr.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Dritte Abhandlung. 1859. 2 Thlr. 12 Ngr.

G. T. FECHNER, Über einige Verhältnisse des binocularen Sehens. 1860. 1 Thlr. 26 Ngr.

G. METTENIUS, Zwei Abhandlungen: I. Beiträge zur Anatomie der Cycadeen. Mit 5 Tafeln. II. Über Seitenknospen bei Farnen. 1860. 1 Thlr.

W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Tafeln. 1861. 2 Thlr. 20 Ngr.

ACHTER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Dritter Band. Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1861. Preis 8 Thlr.

H. C. VON DER GABELENTZ, die Melanesischen Sprachen nach ihrem grammatischen Bau und ihrer Verwandtschaft unter sich und mit den Malaiisch-Polynesischen Sprachen. 1860. 2 Thlr. 20 Ngr.

G. FLÜGEL, die Classen der Hanefitischen Rechtsgelehrten. 1860. 24 Ngr.

JOH. GUST. DROYSEN, das Stralendorffsche Gutachten. 1860. 24 Ngr.

H. C. VON DER GABELENTZ, über das Passivum. Eine sprachvergleichende Abhandlung. 1860. 28 Ngr.

TH. MOMMSEN, die Chronik des Cassiodorus Senator v. J. 519 n. Chr. 1861. 1 Thlr. 10 Ngr.

OTTO JAHN, über Darstellungen griechischer Dichter auf Vasenbildern. Mit 8 Tafeln. 1861. 2 Thlr.

NEUNTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Sechster Band. Mit 10 Tafeln. hoch 4. 1864. Preis 6 Thlr. 12 Ngr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfte Abhandlung. Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Erster Theil. 1861. 16 Ngr.

W. G. HANKEL, Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. 1862. 12 Ngr.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Erste Abhandlung. 1862. 3 Thlr.

G. METTENIUS, über den Bau von Angiopteris. Mit 10 Tafeln. 1863. 1 Thlr. 14 Ngr.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. 1864. 1 Thlr.

ZEHNTER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Vierter Band.

Hiervon ist bis jetzt erschienen:

J. OVERBECK, Beiträge zur Erkenntniss und Kritik der Zeusreligion. 1861. 28 Ngr.

G. HARTENSTEIN, Locke's Lehre von der menschlichen Erkenntniss in Vergleichung mit Leibnitz's Kritik derselben dargestellt. 1861. 1 Thlr. 10 Ngr.

WILHELM ROSCHER, Die deutsche Nationalökonomik an der Gränzscheide des sechzehnten und siebzehnten Jahrhunderts. 1862. 20 Ngr.

JOH. GUST. DROYSEN, Die Schlacht von Warschau 1656. 1863. 1 Thlr. 14 Ngr.

AUG. SCHLEICHER, Die Unterscheidung von Nomen und Verbum in der lautlichen Form. 1865. 24 Ngr.

ELFTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Siebenter Band.

Hiervon ist bis jetzt erschienen:

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Zweite Abhandlung. 1864. 3 Thlr.

G. METTENIUS, Ueber die Hymenophyllaceae. Mit 5 Tafeln. 1864. 1 Thlr. 6 Ngr.

P. A. HANSEN, Relationen einestheils zwischen Summen und Differenzen und anderntheils zwischen Integralen und Differentialen. 1865. 20 Ngr.

Leipzig, November 1864. **S. Hirzel.**

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

KLEINERE ABHANDLUNGEN.

BERICHTE über die Verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Erster Band. Aus den Jahren 1846 und 1847. Mit Kupfern. gr. 8. 12 Hefte.

—— Zweiter Band. Aus dem Jahre 1848. Mit Kupfern. gr. 8. 6 Hefte.

Vom Jahre 1849 an sind die Berichte der beiden Classen getrennt erschienen.

—— Mathematisch-physische Classe. 1849 (3) 1850 (3) 1851 (2) 1852 (2) 1853 (3) 1854 (3) 1855 (2) 1856 (2) 1857 (3) 1858 (3) 1859 (4) 1860 (3) 1861 (2) 1862 (1) 1863 (2).

—— Philologisch-historische Classe. 1849 (5) 1850 (4) 1851 (5) 1852 (4) 1853 (5) 1854 (6) 1855 (4) 1856 (4) 1857 (2) 1858 (2) 1859 (4) 1860 (4) 1861 (4) 1862 (1) 1863 (3) 1864, 1.

Jedes Heft der Berichte ist einzeln zu dem Preise von 10 Ngr. zu haben.

Aus den Berichten besonders abgedruckt:

Das Edict Diocletians de pretiis rerum venalium. Herausgegeben von *Th. Mommsen*. Mit Nachträgen. 1852. 14 Ngr.

M. Valerius Probus de notis antiquis. Herausgegeben von *Th. Mommsen*. 1853. 10 Ngr.

W. ROSCHER, ein nationalökonomisches Hauptprincip der Forstwissenschaft. 1854. 6 Ngr.

SCHRIFTEN

DER FÜRSTLICH-JABLONOWSKISCHEN GESELLSCHAFT

ZU LEIPZIG.

ABHANDLUNGEN bei Begründung der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtsfeier Leibnizens herausgegeben von der Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft. Mit dem Bildnisse von Leibniz in Medaillon und zahlreichen Holzschnitten und Kupfertafeln. 61 Bogen in hoch 4. 1846. broch. Preis 5 Thlr.

PREISSCHRIFTEN gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft.

1. H. GRASSMANN, Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Characteristik. Mit einer erläuternden Abhandlung von *A. F. Möbius*. hoch 4. 1847. 20 Ngr.
2. H. B. GEINITZ, das Quadergebirge oder die Kreideformation in Sachsen, mit Berücksichtigung der glaukonitreichen Schichten. Mit 1 color. Tafel. hoch 4. 1850. 16 Ngr.
3. J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die Mondfinsternisse des Almagest. hoch 4. 1851. 10 Ngr.
4. J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die wichtigeren Finsternisse, welche von den Schriftstellern des classischen Alterthums erwähnt werden. hoch 4. 1853. 20 Ngr.
5. H. B. GEINITZ, Darstellung der Flora des Hainichen-Ebersdorfer und des Flöhaer Kohlenbassins. hoch 4. Mit 14 Kupfertafeln in gr. Folio. 1854. 8 Thlr.
6. TH. HIRSCH, Danzigs Handels- und Gewerbsgeschichte unter der Herrschaft des deutschen Ordens. hoch 4. 1858. 2 Thlr. 20 Ngr.
7. H. WISKEMANN, die antike Landwirthschaft und das von Thünensche Gesetz, aus den alten Schriftstellern dargelegt. 1859. 24 Ngr.
8. K. WERNER, Urkundliche Geschichte der Iglauer Tuchmacher-Zunft. 1861. 1 Thlr.
9. V. BÖHMERT, Beiträge zur Geschichte des Zunftwesens. 1862. 1 Thlr. 10 Ngr.
10. H. WISKEMANN, Darstellung der in Deutschland zur Zeit der Reformation herrschenden nationalökonomischen Ansichten. 1862. 1 Thlr. 10 Ngr.
11. E. L. ETIENNE LASPEYRES, Geschichte der volkswirthschaftlichen Anschauungen der Niederländer und ihrer Litteratur zur Zeit der Republik. 1863. 2 Thlr. 20 Ngr.

CHR. AD. PESCHECK, die Böhmischen Exulanten in Sachsen. hoch 4. 1857. 1 Thlr. 10 Ngr.

Leipzig.

S. Hirzel.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

Digitized by Google

11,914.

W. G. HANKEL

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

SECHSTE ABHANDLUNG.

MAASSBESTIMMUNGEN DER ELEKTROMOTORISCHEN KRÄFTE.

ZWEITER THEIL.

Des VII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° IV.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1865.

Digitized by Google

ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

ERSTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Erster Band. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. broch. Preis 4 Thlr. 16 Ngr.

A. F. MÖBIUS, über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. 24 Ngr.
P. A. HANSEN, allgemeine Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. 12 Ngr.
A. SEEBECK, über die Querschwingungen elastischer Stäbe. 10 Ngr.
C. F. NAUMANN, über die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. 10 Ngr.
W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 1 Thlr.
F. REICH, neue Versuche mit der Drehwaage. 20 Ngr.
M. W. DROBISCH, Zusätze zum florentiner Problem. 16 Ngr.
W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus.) 20 Ngr.

ZWEITER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Erster Band. Mit einer Karte. hoch 4. 1850. broch. Preis 6 Thlr.

A. WESTERMANN, Untersuchungen über die in die attischen Redner eingelegten Urkunden. 2 Abhandlungen. 1 Thlr.
F. A. UKERT, über Dämonen, Heroen und Genien. 24 Ngr.
TH. MOMMSEN, über das römische Münzwesen. 1 Thlr. 20 Ngr.
E. v. WIETERSHEIM, der Feldzug des Germanicus an der Weser. 1 Thlr.
G. HARTENSTEIN, Darstellung der Rechtsphilosophie des Hugo Grotius. 20 Ngr.
TH. MOMMSEN, über den Chronographen vom Jahre 354. Mit einem Anhange über die Quellen der Chronik des Hieronymus. 1 Thlr. 10 Ngr.

DRITTER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Zweiter Band. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1857. broch. Preis 7 Thlr. 10 Ngr.

W. ROSCHER, zur Geschichte der Englischen Volkswirthschaftslehre im sechzehnten und siebzehnten Jahrhundert 1851. 1 Thlr.
— — — Nachträge. 1852. 8 Ngr.
J. G. DROYSEN, Eberhard Windeck. 1853. 24 Ngr.
TH. MOMMSEN, Potamii Silvii Intercalus. 1853. 16 Ngr.
———— Volusii Maeciani distributio partium. 1853. 6 Ngr.
J. G. DROYSEN, zwei Verzeichnisse, Kaiser Karls V. Lande, seine und seiner Grossen Einkünfte und anderes betreffend. 1854. 20 Ngr.
TH. MOMMSEN, die Stadtrechte der latinischen Gemeinden Salpensa und Malaca in der Provinz Baetica. 1855. 1 Thlr.
———— Nachträge. 1855. 16 Ngr.
FRIEDRICH ZARNCKE, Die urkundlichen Quellen zur Geschichte der Universität Leipzig in den ersten 150 Jahren ihres Bestehens. 1857. 3 Thlr.

VIERTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Zweiter Band. Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. br. Preis 6 Thlr. 20 Ngr.

M. W. DROBISCH, über musikalische Tonbestimmung und Temperatur. 1852. 1 Thlr.
W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Mit 18 Tafeln. 1852. 1 Thlr. 10 Ngr.
P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 1 Thlr.
———— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2+r'^2-2rr'(\cos U\cos U'+\sin U\sin U'\cos J)$. 1854. 1 Thlr.
O. SCHLÖMILCH, über die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 8 Ngr.
———— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. 16 Ngr.
P. A. HANSEN, die Theorie des Aequatoreals. 1855. 24 Ngr.
C. F. NAUMANN, über die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 10 Ngr.
A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. 1855. 20 Ngr.

FÜNFTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Dritter Band. Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. br. Preis 6 Thlr. 12 Ngr.

M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 12 Ngr.
P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 1856. 1 Thlr. 20 Ngr.
R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. 1856. 16 Ngr.

Digitized by Google

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

SECHSTE ABHANDLUNG.

MAASSBESTIMMUNGEN DER ELEKTROMOTORISCHEN KRÄFTE.

ZWEITER THEIL.

VON

W. G. HANKEL

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des VII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° IV.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1865.

Digitized by Google

Vom Verfasser übergeben den 1. März 1865.
Der Abdruck vollendet den 10. Juni 1865.

Digitized by Google

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

W. G. HANKEL.

SECHSTE ABHANDLUNG.

MAASSBESTIMMUNGEN DER ELEKTROMOTORISCHEN KRÄFTE.

ZWEITER THEIL.

Digitized by Google

IV. Maassbestimmungen der durch Berührung der Metalle mit Wasser entstehenden elektromotorischen Kräfte.

Nachdem im vorhergehenden Abschnitte (Bd. IX. S. 28—52) die bei Berührung der Metalle unter einander entstehenden elektrischen Spannungen ermittelt worden, können wir uns jetzt zu denjenigen Kräften wenden, welche der Berührung jener Metalle mit flüssigen Leitern ihren Ursprung verdanken.

Die zu einer solchen Untersuchung nöthigen Apparate habe ich bereits im ersten Theile dieser Abhandlung (Bd. IX. S. 10 u. 11) beschrieben. Anstatt des sonst gewöhnlich für die untere Condensatorplatte dienenden isolirenden Trägers wird die Bd. IX. S. 11 erläuterte aus einem mit seitlicher communicirender Röhre versehenen Trichter bestehende Vorrichtung unterhalb der oberen Condensatorplatte auf die horizontale Serpentinplatte (durch Schellackunterlagen möglichst vollkommen isolirt) gestellt, und der eben abgeschliffene Rand des Trichters mittelst einer Wasserwage horizontal gerichtet. Da dieser Rand an seinem äusseren Umfange mit der oberen Condensatorplatte genau gleichen Durchmesser besitzt, so kann, wenn die Ränder der oberen Condensatorscheibe und des Trichters gerade über einander stehen, ihre Entfernung ebenso wie früher bei den Metallplatten durch das zur Seite befindliche Mikroskop gemessen werden.

Ist die Stellung dieses Apparates berichtigt, so wird der Trichter bis zu seinem Rande mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt (wobei die kleine Bd. IX. S. 11 beschriebene Hebelvorrichtung mit Platinspitze wesentliche Dienste leistet), und dann durch Ueberfahren des Randes mit einem in die Flüssigkeit getauchten Glasstäbchen seine obere Fläche gehörig benetzt, so dass die flüssige Oberfläche einen Kreis von 95^{mm} Durchmesser bildet. Auch im Mikroskope lässt sich, namentlich wenn die obere Condensatorscheibe der Oberfläche der Flüssigkeit sehr

Digitized by Google

genähert worden, an einem dunkeln Scheine über dem Trichterrande erkennen, ob das Niveau der Flüssigkeit letzteren noch überragt.

Was nun das weitere Verfahren anlangt, so weicht es von dem früher befolgten nicht wesentlich ab. In die Flüssigkeit der mit dem Trichter zusammenhängenden seitlichen Röhre wird das zu prüfende, mit der Erde in leitender Verbindung stehende Metallstück eingetaucht, und sodann wie bei der Messung der elektromotorischen Kräfte zwischen Metallen verfahren, d. h. die obere Condensatorscheibe bis zu einem Abstande von 10 Theilstrichen des Ocularmikrometers dem Flüssigkeitsspiegel genähert, zur Erde abgeleitet und nach bewirkter Isolirung wieder gehoben. Eine einfache Rechnung wird lehren, dass der bei diesem Emporziehen auftretende Ausschlag des Goldblättchens (im Elektrometer) im Verein mit den entsprechenden Beobachtungen bei Kupfer- und Zinkplatten zu einem Maasse für die bei Berührung der Flüssigkeiten mit den eingetauchten Metallen entstehenden elektromotorischen Kräfte führt.

Zu diesem Zwecke wollen wir ebenso wie früher die Metalle durch die Symbole ihrer chemischen Aequivalente, die obere Condensatorplatte, oder eigentlich eine Platte von der Beschaffenheit ihrer unteren Fläche mit K, ferner die in dem Trichter befindliche Flüssigkeit mit F bezeichnen, und, um von einem bestimmten Falle auszugehen, annehmen, es handle sich um die Messung der elektrischen Spannung dieser Flüssigkeit bei ihrer Berührung mit Kupfer (Cu). Bestehen die Ableitungen zur Erde aus Platin, und empfangen durch ihre Berührung mit der Erde die Spannung (PtA), so erhalten wir, wenn wir zunächst eine frisch geputzte Kupferplatte auf den Rand des Trichters legen und zur Erde ableiten, nach Bd. IX. S. 23 einen Ausschlag

$$N = (m-1)\,\big((KPt) + (PtA)\big) - n\,\big((Cu\,Pt) + (PtA)\big).$$

Wird dann nach Hinwegnahme der Kupferplatte die gegebene Flüssigkeit in den Trichter gefüllt, und ein frisch polirtes Kupferstück in die Seitenröhre getaucht, so entsteht bei Ausführung des kurz zuvor beschriebenen Verfahrens ein Ausschlag

$$M = (m-1)\,\big((KPt) + (PtA)\big) - n\,\big((FCu) + (Cu\,Pt) + (PtA)\big).$$

Ziehen wir die erste Gleichung von der zweiten ab, so erhalten wir die Differenz der beiden Ausschläge

$$M - N = -n\,(FCu)$$

als ein Maass für die elektrische Spannung (FCu).

Digitized by Google

In demselben Maasse erhalten wir aber auch, wie Bd. IX. S. 25 gezeigt worden, die elektrische Differenz zwischen Kupfer und Zink ausgedrückt, wenn wir zu den beiden vorhergehenden Versuchen noch einen dritten hinzufügen, bei welchem auf den Rand des leeren Trichters eine blank geputzte Zinkplatte gelegt und ihre Spannung gegen die obere Condensatorplatte gemessen wird; es lässt sich daher die Spannung (FCu) sehr leicht in Theilen jener von mir bisher zur Einheit gewählten elektrischen Differenz ($ZnCu$) ausdrücken.

Bereits Bd. IX. S. 17 dieser Abhandlungen habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass die in der Luft des Zimmers vorhandene Elektricität auf die Messungen störend einwirken kann; ich hob diese Einwirkung der den Apparat umgebenden elektrischen Atmosphäre besonders für diejenige Einrichtung hervor, bei welcher die untere Condensatorplatte unmittelbar auf dem Elektrometer befestigt war, während die obere ihr mittelst eines Hebels genähert und darauf wieder von ihr entfernt wurde. Da bei dieser Art der Messung die untere Platte durch das Entfernen der oberen Platte gänzlich frei wird, während sie zuvor bedeckt war, so muss sie der vollen Vertheilungswirkung von Seiten der elektrischen Luft des Zimmers unterliegen. Es leuchtet aber ein, dass auch bei dem von mir gewöhnlich eingeschlagenen Verfahren, wo die obere durch einen dünnen Platindraht mit dem Elektrometer in leitender Verbindung stehende Platte nur gehoben und gesenkt wird, ähnliche Einwirkungen seitens der elektrischen Luft infolge des Hebens und Senkens, wenn auch in geringerem Grade, eintreten müssen, weil die Platte beim Heben aus Regionen schwächerer Wirkung in solche von stärkerer Wirkung gelangt. Man sieht indess leicht, dass der elektrische Zustand der Luft auf die Genauigkeit der Messungen ohne allen Einfluss ist, wofern er nur während der Dauer derselben constant bleibt, indem er bei der Subtraction der beiden oben angeführten Gleichungen hinwegfällt.

Ist es nun nach Lage der Sache möglich, die beiden zu vergleichenden Versuche schnell und ohne viele dazwischen liegende Verrichtungen auf einander folgen zu lassen, wie dies bei den früheren in dem ersten Theile dieser Maassbestimmungen mitgetheilten Beobachtungen der Fall war, so wird man den elektrischen Zustand der Luft im Allgemeinen als hinreichend gleichgeblieben betrachten können; indess dürfte es doch auch in diesem Falle zweckmässig sein, durch Wiederholung der ersten Messung nach Ausführung der zweiten sich von dem

Digitized by Google

unverändert gebliebenen elektrischen Zustande der Luft zu überzeugen, wie dies auch bei den früheren Versuchen schon aus anderen Gründen geschehen (vergl. Bd. IX. S. 31). Erfordert aber der Uebergang von einer Messung zur andern eine längere Zeit und mancherlei Zurichtungen, welche eine Aenderung des elektrischen Zustandes der Luft durch Bewegung und Reibung wohl zur Folge haben können, so ist jene Voraussetzung eines constanten Zustandes der Luft nicht mehr zulässig, und es wird nothwendig, entweder das Statthaben eines solchen Zustandes durch die Beobachtung direct nachzuweisen, oder andererseits die im elektrischen Verhalten der Luft eingetretenen Aenderungen zu messen und in Rechnung zu ziehen.

Die Einrichtung meines Apparates gestattet nun unmittelbar in jedem Augenblicke zu prüfen, ob die Luft des Zimmers oberhalb des Condensators überhaupt elektrisch ist, und falls dies statt findet, die Grösse der Vertheilungswirkung auf die gehobene Platte zu messen.

Betrachten wir zunächst den Fall, wo nur eine geringe Spannung zwischen den beiden Condensatorplatten vorhanden ist, wenn z. B. beide Platten aus Kupfer bestehen, und ihre Oberflächen nur wenig von einander verschieden sind. Gesetzt, es betrage der Ausschlag, welcher durch diese beiden Platten erzeugt wird, — 0,4 Skth. Da die Ladung des Condensators nahe in umgekehrtem Verhältnisse der Entfernungen steht, so wird in einem Abstande, welcher auf das 40fache des gewöhnlich angewandten steigt, die Ladung des Condensators infolge der elektrischen Differenz der Platten fast unmerklich sein. Nähert man also die obere Platte der unteren nur bis auf 40 mm, während sie sonst gewöhnlich bis zu ungefähr 1 mm (Bd. IX. S. 13) niedergelassen wird, leitet die obere Platte zur Erde ab, isolirt sie dann wieder und zieht sie empor, so wird, falls ein wahrnehmbarer Ausschlag im Elektrometer erscheint, derselbe nur von der Vertheilungswirkung der elektrischen Luft im Zimmer herrühren.*) Zieht man dann diesen Ausschlag von dem bei Annäherung der Platten bis auf den gewöhnlichen Abstand von ungefähr 1 mm (10 Theilstriche des betreffenden Ocularmikrometers) erhaltenen ab, so gibt die Differenz die durch die Berührung der verschiedenen Leiter erzeugte Elektricität. Ist die obere Platte der unteren bis auf 1 mm ge-

*) Selbstverständlich ist, dass der infolge der Ungleichheit der Stärke der Säulenpole, sowie der Ableitung zur Erde im Elektrometer ursprünglich vorhandene Ausschlag in Abzug gebracht werden muss.

Digitized by Google

nähert worden, so wird sie allerdings etwas mehr gehoben, als wenn sie nur bis 40 mm genähert wurde; indess handelt es sich hier stets nur um geringe Correctionen, deren Werth sich durch die kleine Differenz in der Hebungsweite der oberen Platte nicht merklich ändert: denn man wird jedenfalls alle Messungen unterlassen müssen, wenn die Luft stark elektrisch ist, indem bei solchem Zustande selbst zwischen zwei in kurzen Zeiträumen auf einander folgenden Versuchen durch Bewegungen der Luft, wie sie das Auf- und Abwärtsziehen der oberen Platte hervorbringt, sehr erhebliche Aenderungen in dem elektrischen Verhalten der Luft eintreten können.

Das eben beschriebene Verfahren würde, wofern eine kleine Rechnung hinzugefügt wird, auch in dem Falle anwendbar bleiben, wo die Spannung zwischen den beiden Condensatorplatten grösser ist. Es bestehe z. B. die untere Condensatorplatte aus Zink, und die bei Annäherung der oberen Platte bis auf 10 Theilstriche des betreffenden Ocularmikrometers entstehende Ladung (die Vertheilungswirkung seitens der elektrischen Luft nicht mitgerechnet) erzeuge einen Ausschlag von $-5{,}5$ Skth. Nähert man dann dieselbe Condensatorplatte nur bis auf 400 Theilstriche (ungefähr 40 mm), so wird die zwischen ihnen vorhandene Spannung auch selbst bei diesem beträchtlichen Abstande noch einen Ausschlag von $-0{,}14$ Skth. hervorrufen, und der nach dem Emporziehen der oberen Condensatorplatte aus diesem Abstande beobachtete Ausschlag kann also nicht mehr als eine allein durch die elektrische Luft bewirkte Vertheilung betrachtet werden. Indess lässt sich durch Combination der in den Abständen von 10 und 400 Theilstrichen des Ocularmikrometers erhaltenen Ausschläge leicht die infolge der Contactwirkungen allein erzeugte Spannung von der durch die elektrische Atmosphäre hervorgerufenen Vertheilungswirkung sondern. Es sei der bei der ersten Messung durch die elektrischen Differenzen der Leiter erzeugte Ausschlag des Elektrometers $= \alpha$, und der Ausschlag durch die Vertheilungswirkung seitens der elektrischen Luft infolge des Emporhebens der Platte $= \delta$, so ist der gesammte beobachtete Ausschlag $m = \alpha + \delta$. Bei der zweiten Messung in vierzigfachem Abstande wird dann die Ladung durch die Contactwirkungen auf $\frac{\alpha}{40}$ reducirt, während die Grösse der Vertheilung seitens der Luft als nahe unverändert betrachtet werden darf; es ist also der bei dieser zweiten Messung beobachtete Ausschlag $n = \frac{\alpha}{40} + \delta$. Aus den beiden vorstehenden Glei-

Digitized by Google

chungen kann nun aber sowohl α als auch δ berechnet werden. Da jedoch ein Abstand von 400 Theilstrichen gewöhnlich zu gross sein wird, um ohne Verschiebung des Mikrometers gemessen werden zu können, so erscheint es zweckmässiger, falls man überhaupt das eben beschriebene Verfahren anwenden will, jenen Abstand soweit zu verringern (z. B. bis auf 100 Theilstriche), dass seine Messung am unverändert stehen gebliebenen Mikrometer noch möglich ist.

Man erkennt indess leicht, dass auf dem zuletzt beschriebenen Wege die Vertheilungswirkung nicht wohl mit derselben Genauigkeit bestimmt werden kann, als wenn diese Wirkung allein für sich gemessen wird. Wo es daher thunlich war, habe ich in Fällen, wo durch die untere Platte eine starke Spannung zu erwarten stand, den Einfluss der Luft zu bestimmen gesucht, bevor diese Platte hingelegt, und ebenso nachdem dieselbe wieder entfernt oder mit einer anderen der oberen Condensatorplatte sehr nahe gleichwerthigen Platte bedeckt war, indem dergleichen Verrichtungen schnell und ohne wesentliche Aenderungen in der elektrischen Beschaffenheit der Luft ausführbar sind. Bestand jedoch die untere Condensatorfläche aus einer Flüssigkeit, so waren die eben angegebenen Verrichtungen nicht ausführbar. Um unter diesen Verhältnissen die Vertheilungswirkung der atmosphärischen Luft bestimmen zu können, genügte es in Fällen, wo die Flüssigkeit im Trichter durch die Berührung mit einem bestimmten Metalle einen der oberen Condensatorplatte nahe gleichen Zustand annahm, die Flüssigkeit mit diesem Metalle zu berühren, und dann durch Senken und Heben der oberen Condensatorplatte die Wirkung der Luft in der S. 590 angegebenen Weise zu bestimmen. Dies Verfahren führte z. B. zum Ziel, wenn die Trichtervorrichtung Wasser enthielt, und die obere Condensatorplatte aus einer lange Zeit der Luft ausgesetzten Kupferplatte bestand; wurde die Flüssigkeit mittelst eines Kupferdrahtes abgeleitet, so war unter gewissen Umständen die Spannung zwischen der Flüssigkeit und der oberen Condensatorfläche nur sehr gering.

Das eben beschriebene Verfahren setzt aber bereits die Kenntniss der eintretenden Spannungen voraus, und lässt sich nicht immer anwenden. Um nun in jedem Falle die Messung der elektrischen Vertheilung seitens der Luft mit Leichtigkeit ausführen zu können, habe ich folgende Einrichtung getroffen. An einer verticalen Axe ist ein in horizontaler Ebene beweglicher Arm angebracht, der an seinem Ende eine der

Digitized by Google

oberen Condensatorplatte gleichartige, mit der Erde in leitender Verbindung stehende Metallplatte trägt; diese Metallplatte lässt sich durch die Drehung des Armes dicht über den Rand des Trichters stellen. und deckt, weil sie beträchtlich grösser als der Umfang des Trichters ist, die obere Condensatorplatte gegen jede Einwirkung von Seiten der Elektricität, welche die im Trichter befindliche Flüssigkeit besitzt. Ist bei dieser Stellung der Metallplatte die Luftwirkung ermittelt, so wird die Platte zur Seite bewegt, und sodann zur Messung der Spannung zwischen der Flüssigkeit und der oberen Condensatorplatte übergegangen. Selbstverständlich ist dies Verfahren auch anwendbar, wenn an Stelle der Flüssigkeit eine Metallfläche die untere Condensatorfläche bildet.

Um beträchtliche Aenderungen in dem elektrischen Zustande der Luft hervorzurufen, genügt es z. B. schon, eine mit einem Glascylinder versehene Gasflamme (Argand'schen Brenner) im Zimmer anzuzünden. Wenn zuvor die Luft unelektrisch erschien, kann sie sehr bald eine Vertheilungswirkung auf die gehobene Platte ausüben, die bis auf 20 p. C. und mehr der Spannung zwischen Zink und Kupfer steigt. Die so starke Elektricität der Luft unter den genannten Umständen rührt hauptsächlich von der Reibung der erhitzten Luft an dem die Flamme umgebenden heissen Glascylinder her. Als ich mit der Ausführung der in Bd. VII dieser Abhandlungen mitgetheilten Untersuchungen über das elektrische Verhalten der Weingeistflamme beschäftigt war, erzeugte selbst die Flamme einer gewöhnlichen Alkohollampe, die in das Innere eines mehr als einen Fuss im Durchmesser haltenden gläsernen Cylinders gestellt war, so starke Elektricität durch Reibung der bewegten Luft an den Glaswänden, dass ich damals diese für das ruhige Brennen der Lampe sonst sehr zweckmässige Einrichtung aufzugeben gezwungen war. Bliebe der elektrische Zustand der Luft constant, so würde er, wie bereits oben bemerkt, für das Resultat ohne Einfluss sein; es sind mir indess Fälle vorgekommen, wo, nachdem die Gaslampen im Zimmer bereits zwei Stunden ruhig gebrannt hatten und während dieser Zeit die Vertheilungswirkung der Luft nahe constant geblieben war, plötzlich innerhalb zweier Minuten eine so starke Schwankung in dem elektrischen Verhalten der Luft eintrat, dass der Ausschlag des Elektrometers sich um 13 p. C. der Spannung zwischen Zink und Kupfer änderte.*)

*) In dem ersten Theile dieser Maassbestimmungen (Bd. IX. S. 33) habe ich erwähnt, dass einmal an einem Abende, wo zwei Argand'sche Gasflammen länger als

Digitized by Google

In ähnlicher Weise können auch Luftströmungen störend wirken. Wie Bd. IX. S. 9 erwähnt, stand das Elektrometer sammt dem Condensator auf dem Brette eines Fensters, das mit doppelten Rahmen und Glasscheiben versehen war. Indess gestattete selbst diese Einrichtung stets noch Luftzüge, so dass ein zwischen das Fenster und das Elektrometer gestellter Schirm nöthig wurde, um Störungen durch dieselben von dem Elektrometer abzuhalten. Behufs Abhaltung der directen Sonnenstrahlen von den Apparaten musste dieser Schirm aus weissem, auf einem Rahmen ausgespannten Papiere gebildet werden. Ein solcher Schirm führte nun unter Umständen eine neue Störung herbei. Das Fenster war nach Osten gerichtet; wehte, besonders in der kälteren Jahreszeit, wo das Zimmer stark geheizt war, ein trockner Ost- oder Nordostwind, so reichte der geringe durch die Fensterritzen hindurchdringende Luftzug hin, um bei seinem Aufsteigen an dem Papierschirme eine Elektricitätserregung zu veranlassen, welche durch die Schwankungen in ihrer Stärke jede genaue Messung unmöglich machte, und mich zwang, oft viele Tage hintereinander auf jede Beobachtung zu verzichten.

Zum Nachweise des eben Gesagten möge die Anführung der folgenden Thatsachen genügen. Als z. B. während eines Ostwindes bei geheiztem Zimmer die obere Condensatorplatte ruhig in ihrer oberen Stellung gelassen und sie selbst, ebenso wie die von ihr zu dem Goldblättchen des Elektrometers führende Drahtleitung isolirt war, änderte sich die Stellung des Goldblättchens in kurzer Zeit so weit, dass beim Umlegen des Commutators ein Ausschlag von + 1,0 Skth. entstand. Nach 5- bis 6maligem Aufziehen und Niederlassen der oberen Condensatorplatte war der elektrische Zustand der Luft in der Umgebung des Condensators ein anderer geworden, und anstatt der positiven Ladung trat jetzt nach bewirkter Isolirung eine negative von — 0,4 Skth. ein. Liess ich dann die Condensatorplatte wieder ruhig in ihrer oberen Stellung isolirt hängen, so ging die letztere negative Ladung allmälich wie-

zwei Stunden in dem Zimmer gebrannt hatten, eine frisch geputzte Kupferplatte innerhalb weniger Minuten sich merklich änderte. Da ich seitdem am Kupfer diese Erscheinung niemals wieder beobachtet habe, so ist sicherlich die beobachtete Aenderung im Ausschlage des Elektrometers nicht durch eine rasche Veränderung der Kupferoberfläche, sondern nur durch eine Aenderung des elektrischen Zustandes der Luft im Zimmer zu erklären. Vergl. auch die Bemerkungen weiter unten S. 602 über das Aluminium.

Digitized by Google

der in die zuvor bezeichnete positive über. Ein dreimaliges Heben und Senken der Platte änderte die Ladung von + 0,9 Skth. bis — 0,15 Skth. Wie man hieraus sieht, hatte jede Bewegung der Platte eine erhebliche Aenderung zur Folge.*)

Erfahrungen, wie die zuvor angeführten, weisen auf die Nothwendigkeit hin, die Luft des Zimmers in möglichst unelektrischem und constantem Zustande zu erhalten. Man hat deshalb alle heftigen Bewegungen der Luft, sowie das Reiben und Abfegen von Gegenständen im Zimmer sorgfältig zu vermeiden. Um indess starke Anhäufungen von Elektricität in der Luft gänzlich unmöglich zu machen, dient eine mitten im Zimmer brennende kleine Alkoholflamme, deren Docht zur Erde abgeleitet ist. Die Flamme saugt etwa vorhandene Elektricität auf, ladet

*) Man könnte vielleicht glauben, dass der Einfluss der in der Luft des Zimmers angehäuften Elektricität nur bei der von mir gewählten Form des Condensators eintreten, dagegen fehlen werde, wenn die beiden Platten des Condensators vertical stehen und sich in horizontaler Richtung von einander entfernen. Allein ganz abgesehen davon, dass die horizontale Lage der Condensatorplatten bei den Messungen der elektromotorischen Kräfte zwischen Flüssigkeiten und Metallen absolut gefordert wird, ist auch ein Condensator mit vertical stehenden und nur in horizontaler Richtung verschiebbaren Platten ebenfalls dem Einflusse der Luftelektricität unterworfen, wie dies deutlich die Erfahrungen nachweisen, welche Kohlrausch an einem Instrumente der letzteren Art gemacht hat, jedoch ohne dass es ihm gelungen, die beobachteten Vorgänge auf ihre eigentliche Quelle zurückzuführen.

In Poggendorff's Annal. Bd. 88. S. 470 sagt Kohlrausch: »Nun könnte ich mir wohl folgendes denken. Der Natur der Sache nach steht das Elektrometer vor einem Fenster und die Condensatoren befinden sich in dessen Nähe. Das Haus ist auf seiner äusseren Oberfläche je nach der Beschaffenheit des Himmels mehr oder weniger elektrisch, wenn nicht besondere Wolken einwirken, fast immer negativ. Diese Elektricität sollte billig auf die im Innern des Hauses befindlichen Apparate nicht einwirken, jedoch würde sie dies gewiss thun müssen, wenn das Fenster offen wäre, diese Apparate also dadurch mit zur Oberfläche des Hauses gehörten. Wer kann aber behaupten, dass aussen auf einem geschlossenen Fenster die Elektricität gerade so wie auf dem übrigen Hause verbreitet sei, dass überhaupt das Glas gar keine Rolle spiele? Hier scheint eine Fehlerquelle gesucht werden zu können. Der häufig sich bemerklich machende Zusammenhang zwischen dem Wechsel des Wetters und den geringen Aenderungen der gemessenen elektrischen Werthe hat mich auf die ausgesprochene Vermuthung geführt, der ich jedoch, weil deshalb angestellte directe Versuche nicht entscheidend genug ausfielen, einen besonderen Werth durchaus nicht beilege.«

Die von Kohlrausch beobachteten Aenderungen hängen in keiner Weise mit der Elektricität des Hauses oder der Atmosphäre zusammen, sondern vielmehr mit der verschieden starken Vertheilung, welche die elektrische Luft des Zimmers auf die Condensatorplatten in der Anfangs- und Endlage ausübt.

Digitized by Google

aber die Luft mit der durch ihr Leitersystem (vergl. meine Abhandlung über das Verhalten der Weingeistflamme in elektrischer Beziehung Bd. VII. S. 13) erzeugten sehr schwachen Spannung, die nach den zuvor beschriebenen Methoden gemessen werden kann, und, weil sie nahe constant bleibt, nach angebrachter Correction der Genauigkeit der Messungen keinen Eintrag thut.

Besonders ist auch darauf zu achten, dass der Körper des Beobachters vollständig von aller Elektricität, welche durch die bei den erforderlichen Bewegungen eintretende Reibung erzeugt wird, befreit ist; in einem geheizten Zimmer mit gefirnisstem Fussboden ist die Ableitung durch die Kleidung, den Stuhl und den Fussboden nicht ausreichend; es muss eine metallische Ableitung (zu den Gasröhren) mit nassen Fingern berührt werden.

Da ein Beschlagen frisch polirter Metallflächen mit Feuchtigkeit Aenderungen in den Spannungsverhältnissen hervorruft, und bei dem zuvor S. 588 angeführten Versuche, wo eine Flüssigkeit die untere Condensatorfläche bildete, die obere Platte wenigstens mehrere Secunden in geringem Abstande über dieser verweilen musste, also zu einem Beschlagen der Metallplatte die günstigste Gelegenheit geboten war: so überzog ich anfangs die untere Fläche der oberen Condensatorplatte, sowie den Rand derselben und die in ihn eingeschraubten drei Fortsätze mit einer das Metall überall gleichförmig bedeckenden Schicht von Schellackfirniss (Schellack in Alkohol gelöst). Eine so zubereitete Platte zeigte sich gegen den Wasserdampf unempfindlich; dagegen rief dieser Ueberzug den Uebelstand hervor, dass der untere Rand der Platte nicht mehr ausreichend scharf erschien. Ich brachte daher auf der seitlichen Cylinderfläche, etwas oberhalb des Randes, eine Marke an, durch deren Beobachtung im Mikroskop der Abstand der oberen Fläche der unteren Condensatorplatte von der unteren gefirnissten Fläche der oberen Platte stets genau gemessen und, worauf es ja allein ankam, in allen mit derselben oberen Platte ausgeführten Versuchen gleich gemacht werden konnte. Dieses Verfahren erforderte schliesslich noch eine Beleuchtung des dem Mikroskope zugewandten Theiles der Plattenränder, die leicht durch einen auf den Körper des Mikroskops aufgesetzten Schirm aus weissem Papiere erreicht wurde.

Die Versuche selbst zeigten aber, dass meine Befürchtung bei einer längere Zeit der Luft ausgesetzten Kupferfläche, wenigstens so lange

Digitized by Google

Wasser die untere Flüssigkeit bildete, nicht begründet war, und so sind die folgenden Versuche theils mit gefirnissten, theils (und zwar bei den meisten Beobachtungen) mit nicht gefirnissten Condensatorplatten ausgeführt worden. Jedenfalls haben nicht gefirnisste Platten den sehr erheblichen Vorzug, dass ihnen stets jede Spur von Elektricität augenblicklich entzogen werden kann.

Während bei der Messung der durch Berührung der Metalle entstehenden elektromotorischen Kräfte die Schwierigkeiten gewöhnlich nur in der Herstellung einer möglichst reinen Oberfläche liegen, die zu messenden Kräfte aber bis auf wenige Ausnahmen einige Zeit constant bleiben, treten bei den nachfolgenden Versuchen ausserdem durch die Veränderlichkeit der zu beobachtenden elektrischen Spannungen neue sehr erhebliche Schwierigkeiten ein, wozu noch kommt, dass die Schnelligkeit, mit welcher diese Spannungen sich ändern, von der Beschaffenheit der Metalloberflächen und der Flüssigkeiten abhängig ist.

Das Reinigen der Metalloberflächen, welche mit den Flüssigkeiten in Berührung gebracht werden sollten, geschah entweder durch Feilen oder durch Putzen mit Schmirgelpapier. Nach dem Feilen wurden die Oberflächen mit einem Handtuche leicht abgewischt und mit einem Haarpinsel abgebürstet, nach dem Putzen mit Schmirgelpapier dagegen auf einem reinen durch sorgfältiges Auswaschen von Seife befreiten Handtuche abgerieben.*) Beim Feilen ward für jedes Metall eine besondere Feile angewandt. Der Kürze wegen sollen die mittelst Schmirgelpapier gereinigten Metallflächen als polirte, dagegen die mit der Feile behandelten als gefeilte bezeichnet werden.

Bevor ich indess auf die Untersuchung des elektrischen Verhaltens der Metalle gegen Flüssigkeiten eingehe, sei es mir gestattet, über die im ersten Theile dieser Messungen behandelten elektrischen Differenzen der Metalle noch einige Bemerkungen theils zur Bestätigung, theils zur Verbesserung der Bd. IX. S. 51 zusammen gestellten Zahlenwerthe hinzuzufügen. Denn in dem seit dem Erscheinen jenes ersten Theiles verflossenen Zeitraume, während dessen Verlauf ich unausgesetzt mit der Vervollständigung meiner Messungen der aus Berührung fester und flüssiger Leiter entstehenden elektromotorischen Kräfte beschäftigt ge-

*) Bei leicht oxydirbaren Metallen darf dies Abreiben nicht zu stark und nicht zu lange geschehen.

Digitized by Google

wesen bin, habe ich vielfache Veranlassung gehabt, die gegenseitigen Spannungen der Metalle einer erneuten Prüfung zu unterwerfen; und ich ging auf eine solche Prüfung um so bereitwilliger ein, als sie mir Gelegenheit gab, mit Sicherheit festzustellen, dass bei den früheren Messungen sich keine Irrthümer infolge eines möglichen Einflusses seitens des elektrischen Zustandes der Zimmerluft eingeschlichen hatten. Während früher die Annahme gemacht worden, dass dieser Zustand während einer Reihe von Messungen ungeändert geblieben, ist derselbe jetzt nach dem im Vorstehenden beschriebenen Verfahren bei jeder Beobachtung gemessen und in Rechnung gebracht worden.

Ausserdem suchte ich die Genauigkeit der Messungen noch dadurch zu steigern, dass ich die Spannung in den Messingscheiben des Elektrometers, zwischen welchen das Goldblättchen hing, durch Vermehrung der Anzahl der Elemente in der Volta'schen Säule erhöhte und dadurch unter sonst gleichen Umständen am Condensator die Ausschläge vergrösserte. Da hierdurch die Spannung der dem Goldblättchen mitgetheilten Elektricität nicht erhöht wurde, so traten auch keine stärkeren Verluste durch Zerstreuung oder mangelhafte Isolirung ein, als sonst.

Ich hatte früher bereits versucht, die Anzahl der Elemente zu vermehren, musste aber, bei dem zu grossem Widerstande der kleinen nur mit Wasser gefüllten Elemente davon abstehen, weil beim Umlegen des Bügels am Commutator die Pole der Säule und infolge dessen auch die mit ihnen verbundenen Messingscheiben des Elektrometers nicht augenblicklich das Maximum der Ladung annahmen, was zur Folge hatte, dass beim Umlegen des Commutators das Goldblättchen nicht augenblicklich das jedesmalige Maximum der Ablenkung zeigte. Der vollkommeneren Leitung wegen, und zugleich um jedes Effloresciren zu vermeiden, versuchte ich das reine Wasser durch eine 10 p. C. haltige Chlorcalciumlösung zu ersetzen, aber auch jetzt war es noch zweckmässig, die Leitung dadurch zu verbessern, dass je 2 Elemente neben einander (also zu einem mit doppelter Oberfläche verbunden) angewandt wurden.

Eine solche mit Chlorcalcium gebaute Säule hielt sich zwar auf einer etwas höheren Spannung, als eine aus einer gleichen Anzahl Zink-Kupfer-Wasser gebildete Säule, und zeigte auch bei Temperaturveränderungen nur geringe Schwankungen in der Intensität ihrer Pole; indess wurde das Zink so stark angegriffen, dass die Säule nach einigen Wochen unbrauchbar war. Ich kehrte also wieder zu den früheren Elementen

Digitized by Google

(Zink, Kupfer, Wasser) zurück, und ermöglichte auch hierbei die Benutzung einer grösseren Anzahl, indem ich den Widerstand in ähnlicher Weise wie zuvor bei der Chlorcalciumsäule durch Nebeneinanderstellung je zweier Elemente verringerte.*) Dabei mache ich noch darauf aufmerksam, dass, wenn das Goldblättchen sofort einen festen Stand einnehmen soll, die Enden des Commutatorbügels, welche in das Quecksilber tauchen, stets vollständig blank amalgamirt sein müssen.

Bei allen Metallen, deren Platten unverändert geblieben waren und sich nicht zu schwierig putzen liessen, habe ich bei meinen wiederholten Messungen genau dieselben oder nur um sehr geringe Grössen (höchstens 1 Procent der Spannung zwischen Zink und Kupfer) abweichende Werthe erhalten. Dies gilt, um die Reihe dieser Metalle namentlich aufzuführen, von Zink, Antimon, Wismuth (sehr nahe), Eisen, Kupfer, Silber, Platin, Neusilber und Messing.

Die gegossene Kadmiumplatte war, wie Bd. IX. S. 37 angeführt, kleiner als die übrigen Platten, und es bedurfte jedes Mal der Messung des Ausschlages, den eine Zinkplatte von derselben Grösse gab, um ihre Stellung in der Spannungsreihe zu bestimmen. Um diesen Uebelstand zu beseitigen, liess ich die Platte, da sie eine hinreichende Dicke besass, durch Hämmern ausdehnen und von Neuem abschleifen, so dass sie jetzt den übrigen Platten in ihrer Grösse gleich kam. Die Platte, die früher nur schwierig rein erhalten wurde, und beim Putzen leicht an einzelnen Stellen ein dunkles Aussehen annahm, liess sich jetzt, wohl eine Folge der durch das Hämmern eingetretenen grösseren Dichte, leichter putzen, und zeigte eine weissere Oberfläche, als sonst. Dafür war sie jetzt auch dem Zink in der Spannungsreihe näher gerückt, und es betrug die Spannung (*Zn Cd*) nur 0,19 (*Zn Cu*), während dieselbe früher als 0,24 (*Zn Cu*) bezeichnet worden war; und zwar gaben beide Seiten der Platte denselben Werth.**)

*) Da bei dieser Stärke der Säule der Ausschlag, welchen jeder ihrer Pole bei seiner Verbindung mit dem Goldblättchen des zu den folgenden Messungen benutzten Elektrometers erzeugte, zu gross war, um noch durch das Mikrometer dieses Instrumentes gemessen werden zu können, so wurde die Spannung in den Polen der Säule an einem zweiten besonderen Elektrometer (an dem Bd. IV. S. 403 mit *C* bezeichneten) beobachtet.

**) Zur Untersuchung beider Seiten wurde ich besonders durch den Umstand veranlasst, dass bei der ersten Prüfung der Platte nach dem Hämmern und Abschleifen die Spannung (*Zn Cd*) nur 0,12 (*Zn Cu*) gefunden wurde; ein Werth, den ich

Digitized by Google

Die Zinnplatte hatte nach Bd. IX. S. 37 für die Spannung (*Zn Sn*) den Werth 0,23 (*Zn Cu*) gegeben. Bei wiederholten Versuchen aber, wobei die Platte von Neuem geputzt wurde, stieg dieser Werth nach und nach bis 0,32 (*Zn Cu*) und war durch kein Mittel wieder zu verringern. Diese Erscheinung wies also auf eine Ungleichartigkeit in der Platte hin, und eine genauere Nachforschung ergab, dass der Mechanikus die ihm übergebene Zinnplatte nicht, wie vorgeschrieben, auf die Zinkplatte gelöthet, sondern das Zinn im geschmolzenen Zustande auf die mit Bleiloth überzogene Zinkplatte gegossen hatte; ein Vorgang, der nothwendig eine Verunreinigung der oberen Zinnmasse zur Folge haben musste. Es wurde daher die Anfertigung einer neuen Zinnplatte nöthig, und um ähnliche Verunreinigungen zu verhüten, wurde eine so dicke Zinnplatte gegossen, dass sie ohne Unterlage einer Zinkplatte für sich hinlängliche Steifigkeit besass.

Diese neue Platte liess sich leichter putzen und sah viel heller aus, als die frühere. Sie gab die Spannung (*Zn Sn*) = 0,51 (*Zn Cu*), also mehr als noch einmal so gross, als die frühere. Dieser Werth ist also an die Stelle des Bd. IX. S. 37 dieser Abhandlungen angegebenen, der, wie erläutert, einer Legirung angehört, zu setzen.

Die Spannung einer auf galvanischem Wege vergoldeten Kupferplatte gegen Zink betrug (nach Bd. IX. S. 43) 1,01 (*Zn Cu*). Eine dünne, auf eine Kupferplatte aufgelöthete Goldplatte gab (ebend. S. 44) die Spannung zwischen Zink und Gold damals noch geringer, als die zwischen Zink und Kupfer; indess war die Platte auf ihrer Oberfläche beim Auflöthen wahrscheinlich mit Zinn verunreinigt, denn ihre Oberfläche zeigte, wie bereits früher erwähnt, unter dem Mikroskope zahlreiche kleine weisse Flecken, die sich durch kein Mittel von der festsitzenden Platte entfernen liessen. Die Goldplatte wurde deshalb abgelöthet und mit schmelzendem sauren schwefelsauren Kali behandelt; diese Behandlung machte sie aber so brüchig, dass sie nicht wieder aufgelöthet werden konnte. Das Gold musste wieder zusammengeschmolzen und von Neuem zu einer Platte geformt werden. Die neue Platte (von derselben Grösse, wie die frühere) gab für (*Zn Au*) den Werth 1,10

durch fortgesetzte Messungen nach frischem Putzen nicht wieder habe erreichen können; dieselben lieferten vielmehr nur zwischen 0,18 und 0,20 (*Zn Cu*) liegende Werthe.

Digitized by Google

(*Zn Cu*)*); sie war also beträchtlich negativer, als die frühere, und auch als die galvanisch vergoldete Platte. Nachdem diese Platte einen Tag lang ruhig und unangerührt auf dem Stative, der Luft ausgesetzt, gelegen hatte, stieg ihre Spannung gegen Zink bis 1,17 (*Zn Cu*), ein Werth, der nahe mit dem übereinstimmt, den die frühere Goldplatte durch eintägiges Liegen an der Luft angenommen hatte (Bd. IX. S. 44). Eben diesen Werth lieferte auch die Platte, nachdem sie seit langer Zeit und zum Theil sogar unbedeckt an der Luft gelegen hatte; durch blosses Abreiben mit einem Handtuche nahm diese Spannung bis auf 1,13 (*Zn Cu*) ab; es bedurfte des Putzens mit Schmirgelpapier, um den Werth 1,10 (*Zn Cu*) wieder zu erhalten.

Die früher benutzte Stahlplatte, deren Oberfläche sonst untadelhaft war, hatte etwas abgerundete Ränder, die ihre genaue Einstellung erschwerten. Zur Beseitigung dieses Uebelstandes liess ich sie bis zur Bildung eines scharfen Randes abschleifen. Nach Entfernung dieser oberflächlichen Schicht zeigte die Platte gegen Zink nur dieselbe Spannung wie eine Eisenplatte, während sie früher eine höhere gegeben hatte (Bd. IX. S. 49). Einer ungenauen Einstellung allein kann diese beträchtliche Differenz nicht zugeschrieben werden, da die Spannung der Stahlplatte gegen die obere kupferne Platte nicht sehr gross ist, und folglich der Ausschlag durch eine geringe Aenderung im Abstande der Condensatorplatten sich nicht beträchtlich ändern kann; es ist also die oberflächliche Schicht von der darunter liegenden verschieden gewesen.

Einen gleichen Einfluss hatte auch das in etwa gleicher Stärke vorgenommene Abschleifen der Gusseisenplatte; während sie früher in gleicher Weise wie der Stahl negativer gewesen war, als das Schmiede-

*) Das zur Platte verwandte Gold war nicht absolut rein, sondern enthielt wahrscheinlich eine, wenn auch nur sehr geringe Beimengung von Silber; bei dem nahe übereinstimmenden Verhalten des Goldes und Silbers steht indess nicht zu befürchten, dass diese Beimengung eine wesentliche Aenderung in der Stellung des Goldes in der Spannungsreihe bewirkt habe. Leider war die Platte so dünn, dass sich von ihrer Oberfläche nicht wohl eine zu einer Analyse hinreichende Menge Metall abschaben liess.

Die Goldplatte war zwar kleiner, als die obere Condensatorplatte; jedoch konnte im vorliegenden Falle ihre Stellung in der Spannungsreihe durch den Umstand leicht bestimmt werden, dass sie der durch langes Aussetzen an die Luft oxydirten Fläche der oberen kupfernen Condensatorplatte sehr nahe gleich war, d. h. bei geeigneter Beschaffenheit der unteren Fläche der oberen Condensatorplatte gegen dieselbe keine Spannung zeigte.

Digitized by Google

eisen, nahm sie nach der neuen Bearbeitung ihre Stellung ebenfalls nahe beim Eisen.

Ich wage nicht zu entscheiden, ob etwa die oberflächlichen Schichten der Stahl- und Gusseisenplatte kohlenstoffreicher, oder mehr von Sauerstoff*) durchdrungen gewesen sind, als die tiefer liegenden, und weise nur noch darauf hin, dass die früheren Oberflächen der Stahl- und Gusseisenplatte nach längerem Liegen an der Luft nahe denselben Zustand angenommen hatten, als die Oberfläche einer ebenso lange der Luft ausgesetzten schmiedeeisernen Platte (Bd. IX. S. 42 und 49).

Die Aluminiumplatte liess sich, wie bereits früher bemerkt, sehr schwer reinigen; ich habe die früher Bd. IX. S. 36 angegebene Spannung des Aluminiums gegen Zink ($= 0{,}25$ *Zn Cu*) nicht ganz wieder erhalten können. Es wäre, namentlich mit Rücksicht auf die früher unmittelbar nach dem Putzen eingetretene, sehr schnelle Abnahme des Ausschlags (vgl. Bd. IX. S. 35) nicht unmöglich, dass hier eine Störung durch die Elektricität der Luft mitwirkend gewesen; doch könnte immerhin der frühere hohe Werth auch einer durch zufällige Umstände besser gereinigten Platte angehören. Bei wiederholten Versuchen habe ich die Spannung (*Al Zn*) nicht höher als 0,20 (*Zn Cu*) bringen können: ein Zahlenwerth, der aber, wie bereits Bd. IX. S. 36 erwähnt, nur als untere Grenze betrachtet werden darf.

Es schien nicht ohne Interesse, auch verschiedene Kohlensorten in Bezug auf ihre Stellung in der Spannungsreihe zu untersuchen, falls sich dieselben dazu eigneten. Aus mehreren grossen Stücken schönen ceylanischen Graphits war es der zu stark blätterigen Beschaffenheit wegen nicht möglich, eine brauchbare Platte herzustellen. Dagegen liessen sich aus den in Paris verfertigten und zu negativen Platten in galvanischen Elementen bestimmten Kohlenplatten, die (wahrscheinlich auf ähnliche Weise, wie sonst üblich, bereitet) ein ziemlich feinkörniges Gefüge besitzen, Platten mit ebenen Flächen und scharfen Rändern darstellen.

Eine solche Platte zeigte sehr bald nach ihrer Anfertigung infolge eines Gehaltes an Feuchtigkeit gegen Kupfer nur die Spannung $-0{,}02$

*) Eine lange an der Luft gelegene Bleiplatte z. B. muss in beträchtlicher Weise abgeschabt und abgefeilt werden, ehe sie möglichst blank erscheint. Ebenso muss von einer seit längerer Zeit nicht polirten Zinkplatte eine Schicht von gewisser Dicke entfernt werden, um ihre Oberfläche rein zu erhalten.

Digitized by Google

(*Zn Cu*); nachdem sie drei Monate an der Luft gelegen hatte, betrug ihre Spannung — 0,16 (*Zn Cu*); unmittelbar darauf mit destillirtem Wasser angefeuchtet erschien sie dem Kupfer genau gleich.

Da später auch Beobachtungen über das Verhalten des Wassers gegen gefeilte Metalle mitgetheilt werden, so ist es, namentlich in Betreff derjenigen Metalle, die sich schwierig putzen lassen, nicht unwichtig, den Ort, welchen die gefeilten Oberflächen in der Spannungsreihe einnehmen, kennen zu lernen.

Eine gefeilte Kupferplatte zeigt gegen Zink eine um höchstens 0,01 (*Zn Cu*) grössere Spannung, als eine polirte, weicht also in ihrer Stellung nicht erheblich von letzterer ab (S. 612).

Dagegen stellt sich eine gefeilte Zinkplatte merklich tiefer, als eine polirte. Die Spannung zwischen einer polirten und gefeilten *) Platte fand ich = 0,08 (*Zn Cu*); dieselbe stieg innerhalb weniger Minuten bis 0,14 (*Zn Cu*).

Der Unterschied zwischen einer polirten und gefeilten Kadmiumplatte betrug ungefähr 0,06 (*Zn Cu*).

Ebenso steht eine gefeilte Wismuthplatte merklich tiefer in der Spannungsreihe als eine polirte; in einem Versuche war bei gefeiltem Wismuth die Spannung (*Zn Bi*) = 0,82 (*Zn Cu*).

Unter Anwendung einer gefeilten Bleiplatte fand ich die Spannung (*Zn Pb*) = 0,49 (*Zn Cu*); dieselbe wuchs aber in den nächsten Minuten.

Eine Antimonplatte gab polirt und gefeilt dieselbe Spannung gegen Zink.

Eine gefeilte Zinnplatte gab gegen Zink die Spannung (*Zn Sn*) = 0,55 (*Zn Cu*).

Bei einer gefeilten Aluminiumplatte steigt die Spannung (*Al Zn*) nicht höher als 0,09 (*Zn Cu*).

Im Allgemeinen erscheinen also die mittelst Schmirgelpapieres und eines leinenen Tuches geputzten Metalle mit reinerer Oberfläche, als die mittelst selbst sehr feiner Feilen bearbeiteten.

Bilden wir jetzt nach den in der früheren Abhandlung, sowie nach den im Vorstehenden mitgetheilten Zahlenwerthen die Spannungsreihe, so erhalten die verschiedenen Metalle die folgenden Stellungen:

*) Die Messungen wurden mit einer und derselben Platte angestellt, und zwar waren an der gefeilten Platte noch Spuren der vorhergegangenen Politur sichtbar.

Digitized by Google

Name des Metalles.	Ort in der Spannungsreihe bei polirter Oberfläche.	bei gefeilter Oberfläche.
Aluminium	220	209
Zink	200	192
Kadmium	181	175
Thallium		
Blei	156	151
Zinn	149	145
Antimon	131	131
Wismuth	130	118
Neusilber	125	
Messing	122	
Quecksilber	119	
Eisen	116	
Stahl	116—108	
Gusseisen		
Kupfer	100	
Gold	90	
Palladium	85	
Silber	82	
Coke	78	
Platin	77	

Nach dieser Einschaltung kehren wir zu der eigentlichen Aufgabe dieses zweiten Theiles, zu der Bestimmung der elektromotorischen Kräfte zwischen Metallen und Flüssigkeiten zurück.

Da sich manche Vorgänge in dem Verhalten der Flüssigkeiten gegen die Metalle am leichtesten beim Wasser, das auf sie die geringste chemische Einwirkung ausübt, erkennen lassen, und ausserdem das Wasser einen wesentlichen Bestandtheil der übrigen zu untersuchenden Flüssigkeiten ausmacht, so scheint es zweckmässig, die Untersuchung über jenes Verhalten mit den beim Eintauchen der verschiedenen Metalle in Wasser eintretenden Vorgängen zu beginnen.

Digitized by Google

1. Verhalten des Kupfers gegen Wasser.

a. Erläuterung des Verfahrens und der Bezeichnungen.

Um eine deutliche Einsicht in die Bestimmung des elektrischen Verhaltens zwischen Wasser und Kupfer zu geben, will ich eine Versuchsreihe ausführlich mittheilen.

Auf den Rand des leeren Trichters wurde eine in der früher Bd. IX. S. 27 angegebenen Weise polirte Zinkplatte gelegt, und ihre elektrische Differenz gegen die obere, seit langer Zeit ruhig in der Luft schwebende Kupferplatte in bekannter Weise gemessen. Das Elektrometer zeigte einen Ausschlag von — 8,49 Skth.

Darauf wurde an die Stelle der Zinkplatte eine frisch geputzte Kupferplatte gelegt, und gleichfalls ihre Spannung gegen die obere kupferne Condensatorplatte gemessen. Der erhaltene Ausschlag betrug — 0,18 Skth.

Nach Entfernung der Kupferplatte wurde der Trichter mit destillirtem Wasser gefüllt, und sodann nach Niederlassung der oberen Condensatorplatte bis zu einem Abstande von 10 Theilstrichen des Ocularmikrometers (s. Bd. IX. S. 20) ein durch Putzen mit Schmirgelpapier polirtes und durch einen dünnen Kupferdraht mit der Erde in leitender Verbindung stehendes Kupferstück in die Flüssigkeit der mit dem Trichter zusammenhängenden seitlichen Röhre eingetaucht. Die obere Condensatorplatte war zuvor ebenfalls mit der Erde in leitende Verbindung gesetzt; diese letztere Verbindung wurde aber noch während des Eintauchens des Kupferstückes in das Wasser aufgehoben. Nach dem Aufziehen der oberen Condensatorplatte musste das Elektrometer einen Ausschlag zeigen, welcher der im Augenblicke der Unterbrechung der zuletzt genannten Ableitung vorhandenen Spannung entsprach. Im vorliegenden Versuche beobachtete ich einen Ausschlag von — 0,96 Skth.

Das Kupferstück blieb ruhig eingetaucht. Als dann nach ungefähr $^3/_4$ bis 1 Minute die obere Condensatorplatte wieder niedergelassen und nach Aufhebung ihrer Ableitung zur Erde emporgezogen wurde, gab das Elektrometer einen Ausschlag von — 0,21 Skth.

Bei Wiederholung eben dieses Verfahrens nach abermals $^3/_4$ bis 1 Minute fand ich einen Ausschlag von + 0,09 Skth. Zehn Minuten nach dem Eintauchen betrug der Ausschlag + 0,38 Skth. und blieb von da an für längere Zeit constant.

Digitized by Google

Aus der Differenz der mittelst der Zink- und Kupferplatte erhaltenen Ausschläge 8,49 — 0,18 Skth. ergibt sich die Grösse des Ausschlags, welcher der Spannung (*Zn Cu*) entspricht, = 8,31 Skth.

Aus der Vergleichung der mit der Kupferplatte und der beim Eintauchen des Kupferstücks ins Wasser beobachteten Ausschläge lässt sich ferner die zwischen Wasser und Kupfer eintretende elektrische Spannung berechnen, und mittelst des so eben angegebenen Werthes in der von uns gewählten Einheit (*Zn Cu*) ausdrücken.

Bildete nämlich die polirte Kupferplatte die untere Condensatorfläche, so wurde ein Ausschlag von — 0,18 Skth. erhalten. Derselbe stieg auf — 0,96 Skth., als die untere Condensatorfläche aus Wasser bestand, in welches ein frisch polirtes Kupferstück so eben eingetaucht wurde. Daraus folgt, dass bei diesem Versuche im Momente des Eintauchens das Wasser gegen das Kupfer positiv war*), und zwar betrug diese Spannung in Skalentheilen des Elektrometers 0,96 — 0,18 = 0,78 Skth., oder nach der von uns gewählten Einheit + 0,09 (*Zn Cu*).**)

Die vorstehenden Beobachtungen lehren weiter, dass sich diese positive Spannung des Wassers gegen das Kupfer rasch verminderte, nach ¾ Minuten betrug die Spannung (0,21 — 0,18) = 0,03 Skth. oder 0,004 (*Zn Cu*). Nach weiteren ¾ Minuten war die Spannung des Wassers gegen Kupfer 0,09 + 0,18 = 0,27 Skth. oder = — 0,03 (*Zn Cu*), also bereits in die entgegengesetzte der anfänglichen übergegangen. Diese letzte Spannung, in welcher also das Wasser negativ gegen das Kupfer erscheint, stieg dann noch bis 0,38 + 0,18 = 0,56 Skth., oder bis — 0,07 (*Zn Cu*).

Die mitgetheilten Zahlenwerthe beweisen, dass die Spannung zwischen Wasser und Kupfer sich mit der Dauer ihrer Berührung schnell und beträchtlich ändert, geben aber durchaus keine Andeutung über den Grund jener Aenderung. Derselbe kann in einer Modification entweder der Metalloberfläche oder des sie berührenden Wassers oder beider zusammen liegen. Nehmen wir das Letztere an, so wird es nöthig, das durch die gegenseitige Berührung modificirte Wasser und Kupfer durch

*) Die Elektricität der unteren Platte hat stets das entgegengesetzte Zeichen, wie die in der oberen beobachtete.

**) Die Bedeutung der Vorzeichen s. gleich nachher.

Digitized by Google

ein besonderes Zeichen zu unterscheiden. Ich wähle dazu die Zeichen (Cu') und (Aq'), während (Cu) und (Aq) die nicht modificirten Substanzen bezeichnen sollen.

Hiernach ist also die im Momente des Eintauchens des Kupfers in das Wasser entstehende elektromotorische Kraft zu schreiben $(Aq\,Cu)$, während die z. B. 10 Minuten später beobachtete Spannung aus der Summe der Spannungen $(Aq\,Aq') + (Aq'\,Cu') + (Cu'\,Cu)$ besteht. In obigem Versuche war nun

$$(Aq\,Cu) = +0{,}09\ (Zn\,Cu)$$

und

$$(Aq\,Aq') + (Aq'\,Cu') + (Cu'\,Cu) = -0{,}07\ (Zn\,Cu).$$

Das positive Vorzeichen in der ersten Gleichung deutet an, dass die an den Enden eines aus (Aq) und (Cu) gebildeten Leitersystemes vorhandene freie Elektricität der Art nach gerade dieselbe ist, wie an einem aus (Zn) und (Cu) gebildeten Leiter, oder anders ausgedrückt: Das vor der betreffenden Spannung stehende Zeichen gibt stets die Art der sich auf dem Anfangsgliede des Leiters entwickelnden freien Elektricität an, das Endglied des Leiters als zur Erde abgeleitet vorausgesetzt.

b. Elektromotorische Kraft zwischen Wasser und frisch polirtem oder gefeiltem Kupfer zehn Minuten nach dem Eintauchen des letzteren.

Ich wende mich zunächst zur genaueren Feststellung derjenigen elektromotorischen Kraft, welche zwischen Wasser und dem genannten Metalle zehn Minuten nach dem Eintauchen besteht, indem diese eine genauere Bestimmung gestattet, als die unmittelbar beim Eintauchen auftretende Spannung. Der zuvor ausführlich mitgetheilte Versuch lehrt nämlich, dass die Aenderungen in dem Werthe der Spannung zwischen Wasser und Kupfer bereits zwei Minuten nach dem Eintauchen wenig beträchtlich sind, und anderweitige Beobachtungen (vgl. unten S. 615) zeigen, dass sieben bis zehn Minuten nach dem Eintauchen ein als constant zu betrachtender Zustand eingetreten ist, der längere Zeit fortdauert. Während dieser constanten Periode kann die elektromotorische Kraft wiederholt gemessen und durch Mittelwerthe bestimmt werden.

Indess unterliegt auch diese Bestimmung noch grossen Schwierigkeiten: es dürfte nämlich unter den gegebenen Umständen nicht möglich sein, die Versuche mit absolut reinem, d. h. von allen, auch den geringsten Spuren von Salzen und Gasarten freiem Wasser, oder auch nur mit

Digitized by Google

möglichst reinem Wasser von stets gleicher Beschaffenheit anzustellen. Es wird sich aber später in dem dritten Theile dieser Untersuchungen zeigen, dass selbst geringe Beimengungen schon merkliche Modificationen in der elektrischen Spannung zwischen Wasser und Kupfer hervorrufen.

Das zu den folgenden Versuchen verwandte Wasser war in den meisten Fällen aus einer verzinnten kupfernen Blase mit zinnernem Kühlrohre aus Flusswasser mit möglichster Sorgfalt im chemischen Laboratorium destillirt worden. Ein solches Wasser zeigt, wenn es einen oder einige Tage in verschlossener Glasflasche aufbewahrt wird, gegen Kupfer sehr nahe die Spannung $-0{,}08$ ($Zn\,Cu$). Mehrere Versuche machen es wahrscheinlich, dass unmittelbar nach der Destillation diese negative Spannung etwas kleiner ist, $-0{,}05$ bis $-0{,}06$ ($Zn\,Cu$).

Bei allen späteren Angaben, wo nichts Besonderes darüber bemerkt, setze ich stets ein destillirtes Wasser voraus, das bereits einige Tage in verschlossener Glasflasche aufbewahrt worden, und gegen Kupfer, zehn Minuten nach dem Eintauchen, eine Spannung von $-0{,}08$ ($Zn\,Cu$) besitzt. Wo im Nachfolgenden schlechthin von der Spannung des Wassers gegen Kupfer die Rede ist, hat man stets diese zehn Minuten nach dem Eintauchen vorhandene constante Spannung von $-0{,}08$ ($Zn\,Cu$) zu verstehen.

Alle angewandten Wassermassen hinterliessen beim Abdampfen in Platinschalen, selbst beim Verdampfen grösserer Mengen, keinen bemerkbaren Rückstand, so dass also die Beimengung fester Substanzen sich jeder Beobachtung entzog. Was den Gehalt an aus der Atmosphäre aufgenommenen Gasen betrifft, so hätte eine Untersuchung des in den verschlossenen Flaschen aufbewahrten Wassers keine entscheidenden Resultate geben können, da bei der Messung der elektrischen Spannung des Wassers gegen Kupfer die Wasseroberflächen nothwendig längere Zeit mit der Luft in Berührung sein mussten. Um übrigens vollkommen vergleichbare Werthe für die Spannungen des Wassers gegen die verschiedenen Metalle zu erhalten, wurde das Wasser jeder Destillation, oder vielmehr jeder einzelnen grossen Flasche, erst auf sein Verhalten gegen Kupfer geprüft, bevor die anderen Metalle eingetaucht wurden; häufig wurde auch in dieselbe Wassermasse des Trichters erst das Kupfer und unmittelbar darauf eines der übrigen Metalle eingetaucht.

Schliesslich sei hier noch eines speciellen Versuches über den früher befürchteten Einfluss der Wasserdämpfe auf die obere kupferne Conden-

Digitized by Google

satorplatte (s. oben S. 596) gedacht. Die nachfolgenden Beobachtungen werden zeigen, dass jene Befürchtung, wie bereits oben erwähnt, unbegründet war.

Als eine drei Tage zuvor frisch polirte und dann unberührt der Luft ausgesetzt gewesene Kupferplatte als obere Condensatorplatte einer seit einem halben Jahre an der Luft gelegenen Kupferplatte entgegengesetzt wurde, erhielt ich einen Ausschlag von — 0,15 Skth. Nachdem dann die obere Platte behufs der Messung der elektrischen Spannung zwischen Wasser und Kupfer wiederholt dicht oberhalb einer Wasserfläche geschwebt hatte, gab sie nach Beendigung dieser Versuche bei neuer Prüfung gegen die zuvor erwähnte Kupferplatte einen Ausschlag von — 0,09 Skth., hatte also nur eine geringe dauernde Veränderung von 0,06 Skth. = 0,01 (*Zn Cu*), wie solche auch wohl ohne Gegenwart des Wassers vorkommt, erlitten.

Aber auch während des Schwebens über der Wasserfläche selbst kann die obere Platte keine erhebliche Veränderung durch einen feuchten Beschlag erlitten haben, indem ich bei ihrer Anwendung die Spannung des Wassers gegen Kupfer — 0,09 (*Zn Cu*) fand, während ich kurz zuvor unter Anwendung einer stark gefirnissten Kupferplatte als oberer Condensatorplatte für dieselbe Spannung den Werth — 0,08 (*Zn Cu*) erhalten hatte.

Diese Versuche wurden im Sommer angestellt, wo die Luft des Zimmers und die in ihm aufbewahrten Gegenstände lange Zeit hindurch nahe gleiche und constante Temperaturen bewahrten; im Winter, bei nur vorübergehender Heizung des Zimmers und infolge dessen ungleichen Temperaturen des Wassers und der oberen Condensatorplatten würden unter Umständen Störungen durch ein Beschlagen der oberen Platte wohl möglich sein.*)

*) Es dürfte nicht ohne Interesse sein, hier wenigstens ein Beispiel über die Aenderung der Beschaffenheit der unteren Fläche der oberen Condensatorplatte anzuführen.

Mehrere Wochen hindurch hatte die untere Fläche der seit langer Zeit an den Drähten hängenden oberen kupfernen Condensatorplatte eine solche Beschaffenheit, dass sie gegen eine frisch polirte untere kupferne Condensatorplatte eine Ladung von — 0,70 Skth. zeigte.

Als eines Tages bei Darstellung photographischer Glasplatten alkoholische und essigsaure Dämpfe aus einem Nebenzimmer, wo jene Bereitung stattfand, in die Stube, in welcher die Condensatorplatte hing, eingedrungen waren, zeigte sich die obere

Digitized by Google

Wird ein gefeiltes Kupferstück anstatt eines polirten in destillirtes Wasser getaucht, so zeigt dasselbe, wie wir gleich sehen werden, zwar beim Eintauchen ein anderes Verhalten, dagegen gibt es zehn Minuten später dieselbe oder eine nur um ungefähr 0,01 (*Zn Cu*) grössere Spannung, als das polirte Kupfer bei gleicher Beschaffenheit des Wassers. Wir werden weiterhin ein Verfahren kennen lernen, um diesen Unterschied auf directem Wege zu ermitteln.

c. *Elektromotorische Kraft zwischen Wasser und frisch polirtem oder gefeiltem Kupfer beim Eintauchen des letzteren.*

Um die Spannung zwischen Wasser und Kupfer im Momente des Eintauchens zu messen, wurde, wie oben erwähnt, die obere Condensatorplatte der Oberfläche des Wassers im Trichter bis auf 10 Theilstriche des Ocularmikrometers genähert und dann allerdings noch während des Eintauchens eines mit der Erde leitend verbundenen Kupferstückes die Verbindung der oberen Condensatorplatte mit der Erde aufgehoben. Die Ladung dieser Platte entspricht also dem Augenblicke, in welchem ihre Ableitung zur Erde unterbrochen wurde. Ich glaube versichern zu können, dass zwischen dem Augenblicke des Beginnens des Eintauchens und dem Unterbrechen der Ableitung der oberen Condensatorplatte nicht mehr als $\frac{1}{3}$ Secunde verflossen, dass jedenfalls noch während der Bewegung des Eintauchens jene Ableitung aufgehoben worden ist; indess können auch schon selbst während des Eintauchens die zuerst mit dem Wasser in Berührung gekommenen Stellen des Kupfer-

---

Platte so verändert, dass sie gegen eine frisch polirte Kupferplatte unter gleichen Verhältnissen wie zuvor nur noch eine Spannung von — 0,10 Skth. annahm. Die Differenz von 0,30 Skth. entspricht aber 0,04 (*Zn Cu*), da der Ausschlag für die Spannung zwischen Zink und Kupfer, oder (*Zn Cu*) 7,5 Skth. betrug.

Nach einiger Zeit waren in einem anderen Nebenzimmer grosse Glastafeln, die zu elektrischen Versuchen dienen sollten, mittelst Alkohol und Kreide geputzt worden, und durch die wiederholt geöffnete Thür reichliche Alkoholdämpfe in die Umgebung des Condensators gekommen. Wahrscheinlich infolge entstandener Essigsäure war die Beschaffenheit der unteren Fläche der oberen Condensatorplatte jetzt soweit geändert, dass sie gegen eine frisch polirte Kupferplatte eine Spannung von + 0,05 Skth. annahm; diese Fläche hatte sich also von Neuem um 0,06 (*Zn Cu*) geändert.

Während der beschriebenen Vorgänge hatte eine andere, gleichfalls lange Zeit der Luft ausgesetzte Kupferplatte auf dem Stative unterhalb der oberen Platte gelegen; auch sie hatte genau dieselben Veränderungen auf ihrer Oberfläche erlitten.

Digitized by Google

stäbchens eine gewisse Aenderung erleiden, so dass der beobachtete Werth eigentlich nur als ein Grenzwerth betrachtet werden darf, über welchen hinaus der wahre Werth der Spannung zwischen Wasser und Kupfer im Augenblicke des ersten Zusammentreffens liegt.

Wie nun die constante elektrische Spannung des Wassers gegen Kupfer zehn Minuten nach dem Eintauchen je nach der Beschaffenheit des Wassers etwas wechselt, ebenso finden wir auch die im Augenblicke des Eintauchens eines polirten Kupferstückes beobachtete Spannung ein wenig verschieden, und zwar ändert sich letztere nahe um dieselbe Grösse, wie erstere. Im Allgemeinen ist beim Eintauchen eines polirten Kupferstückes in destillirtes Wasser die Spannung des Wassers gegen Kupfer um 0,17 (*Zn Cu*) positiver als zehn Minuten später; beim Eintauchen eines solchen Kupfers ist folglich das Wasser positiv und das Kupfer negativ. Beträgt also die constante Spannung, wie dies bei dem einige Tage zuvor destillirten Wasser der Fall ist, zehn Minuten nach dem Eintauchen — 0,08 (*Zn Cu*), so wird beim Eintauchen die Spannung + 0,09 (*Zn Cu*) beobachtet.

Ganz anders aber als das polirte Kupfer verhält sich beim Eintauchen ins Wasser ein gefeiltes Kupferstück. Wird letzteres in destillirtes Wasser getaucht, so weicht die im Momente des Eintauchens beobachtete Spannung sehr wenig von der zehn Minuten später eintretenden ab; im Momente des Eintauchens ist die Spannung zwischen Wasser und gefeiltem Kupfer nur ungefähr 0,03 (*Zn Cu*) weniger negativ als zehn Minuten später. Mit Rücksicht auf die S. 610 gemachten Angaben ergibt sich hieraus der Unterschied in der Spannung des Wassers gegen polirtes und gefeiltes Kupfer im Augenblicke des Eintauchens zu 0,15 (*Zn Cu*).

Die beträchtliche Grösse dieses Unterschiedes könnte vermuthen lassen, dass derselbe durch eine Verunreinigung der Oberfläche des polirten Kupfers hervorgebracht werde, indem z. B. etwas Leim, womit das Schmirgelpulver auf dem Papiere befestigt worden, beim Putzen auf der Fläche des Metalls hängen geblieben. Obwohl eine solche Verunreinigung der Kupferoberfläche sehr unwahrscheinlich ist, indem bei dem sorgfältigen Abreiben des Kupfers auf dem leinenen Tuche alle anhängenden fremden Theilchen von der Oberfläche entfernt werden, und auch als Beweis gegen dieselbe der Umstand angeführt werden kann, dass wenige Minuten nach dem Eintauchen eine polirte und eine gefeilte Kupferfläche sich sehr nahe gleich verhalten, so glaubte ich doch die zu-

Digitized by Google

vor ausgesprochene Vermuthung durch einen directen Versuch als unbegründet zurückweisen zu müssen.

Wenn nämlich durch die Behandlung mit Schmirgelpapier eine Verunreinigung der Metalloberfläche einträte, so müsste auch eine mit diesem Papiere geputzte Kupferplatte eine um die obige Grösse oder doch wenigstens um ein Beträchtliches veränderte Stellung in der Spannungsreihe zeigen. Dies ist jedoch, wie bereits oben S. 603 erwähnt, nicht der Fall; denn als ich zuerst die Spannung einer mit Schmirgelpapier in der gewöhnlichen Weise geputzten Kupferplatte gegen eine als obere Condensatorplatte dienende Platinplatte maass, und dann unmittelbar darauf jene Kupferplatte mit einer Feile behandelte, so fand ich bei Wiederholung der Messung ihrer Spannung gegen die Platinplatte sehr nahe denselben Werth als zuvor; sie erschien nur um 0,01 (*Zn Cu*) negativer als zuvor. Eben dieses Resultat wurde bei Wiederholung eines solchen Versuchs nach längerer Zeit erhalten. Die Aenderung von 0,01 (*Zn Cu*), wofern sie nicht etwa durch eine infolge des Abfeilens entstandene Aenderung in der Einstellung des Abstandes der beiden Condensatorplatten hervorgerufen ist, würde ihre naturgemässe Erklärung darin finden, dass die gefeilte Oberfläche etwas weniger rein ist*); denn selbst wenn man beim Feilen die Platte vertical hält, ist es nicht möglich, das Anhängen der in der Feile sitzenden feinen Kupferstaubtheilchen, die sich in mehr oder weniger oxydirtem Zustande befinden, an der Platte gänzlich zu vermeiden, und ausserdem werden die feinen hervorragenden spitzen Theilchen der Oberfläche, die noch dazu durch den Angriff der Feile sich erwärmen, leichter Sauerstoff aufnehmen als die mehr geebneten einer polirten Platte. Das Abfegen der Platte mit einem Pinsel vermag jene Staub- oder Oxydtheilchen ebenfalls nicht völlig zu entfernen, und ein Abreiben mit einem leinenen Tuche ist wegen der Rauhigkeiten der Oberfläche nicht thunlich.

Der Unterschied in dem Verhalten einer polirten und einer gefeilten Oberfläche im Wasser kann also nur darin seinen Grund haben, dass die hervorragenden und infolge dessen fast allseitig vom Wasser umgebenen Metallspitzen einer gefeilten Fläche bei der Berührung mit dem Wasser sehr viel schneller ihren Zustand ändern, als die dem Wasser weniger Angriffspunkte darbietenden Theilchen einer polirten Fläche.

*) Damit stimmt auch das Verhalten anderer gefeilter Platten s. oben S. 603.

Digitized by Google

d. Directe Messung der Aenderung der elektromotorischen Kraft zwischen Wasser und frisch polirtem oder gefeiltem Kupfer vom Beginn des Eintauchens bis zehn Minuten nach demselben.

Die Aenderung in der elektromotorischen Kraft zwischen Wasser und polirtem Kupfer, welche von dem Augenblicke des Eintauchens bis zehn Minuten nach demselben eintritt, ergab sich im Vorstehenden durch die Differenz der in den genannten Zeitpunkten ausgeführten Messungen; dieselbe lässt sich aber auch direct beobachten.

Die elektromotorische Kraft zwischen dem einige Tage zuvor destillirten Wasser und dem frisch polirten Kupfer im Momente des Eintauchens haben wir gefunden

$$(Aq\,Cu) = +\,0{,}09\;(Zn\,Cu)$$

und die zehn Minuten später vorhandene Spannung

$$(Aq\,Aq') + (Aq'\,Cu') + (Cu'\,Cu) = -\,0{,}08\;(Zn\,Cu).$$

Ziehen wir die erste Formel von der zweiten ab, so erhalten wir

$$(Aq\,Aq') + (Aq'\,Cu') + (Cu'\,Cu) - (Aq\,Cu) = -\,0{,}17\;(Zn\,Cu)$$

oder in anderer Anordnung

$$(Cu\,Cu') + (Cu'\,Aq') + (Aq'\,Aq) + (Aq\,Cu) = +\,0{,}17\;(Zn\,Cu).$$

Die letzte Formel drückt die elektrische Spannung eines galvanischen Elementes aus, dessen eines Glied aus längere Zeit in Wasser eingetauchtem Kupfer besteht, während das andere Glied durch frisch polirtes Kupfer im Augenblicke seines Eintauchens gebildet wird. Die elektromotorische Kraft eines solchen Elementes lässt sich mittelst eines Condensators aus zwei Metallplatten in folgender Weise bestimmen.

Man legt auf das früher Bd. IX. S. 10 beschriebene Stativ als untere Condensatorplatte eine Metallplatte, welche gegen die obere bewegliche Condensatorplatte eine möglichst geringe Spannung zeigt, und bestimmt diese Spannung in der gewöhnlichen Weise. Darauf verbindet man die untere Platte mit einem seit 5 bis 10 Minuten ins Wasser tauchenden polirten Kupferstücke, nähert die obere Platte der unteren bis auf zehn Theilstriche des Ocularmikrometers, taucht dann ein frisch polirtes und mit der Erde in leitender Verbindung stehendes Kupferstück in dasselbe Glas, in dessen Inhalt das erste Kupferstück eingesenkt wurde, und hebt schliesslich noch während des Eintauchens die Verbindung der oberen Condensatorplatte mit dem Erdboden auf. Beim Emporziehen der letzteren Platte entsteht im Elektrometer ein Ausschlag, der eines

Digitized by Google

Theils die Folge der veränderten Beschaffenheit der seit einigen Minuten bereits mit dem Wasser in Berührung stehenden Kupferfläche ist, andern Theils aber auch von der ursprünglich zwischen den beiden Condensatorplatten vorhandenen elektrischen Differenz herrührt. Ist nun letztere zuvor gemessen worden, so lässt sich die durch das ungleichzeitige Eintauchen des Kupfers erzeugte Spannung berechnen.

Nehmen wir, im Anschlusse an die früheren Formeln (S. 588), die untere Platte als aus Platin (*Pt*) bestehend an, und bezeichnen das Metall der oberen Platte mit *K*, so entspricht der erste Ausschlag *P*, welcher durch die elektrische Differenz der beiden Condensatorplatten erzeugt wird, den Spannungen

$$P = (m-1)\,((KPt)+(PtA)) - n\,(PtA),$$

dagegen der zweite Ausschlag *P'* beim Eintauchen des zweiten Kupferstückes den Spannungen

$$P' = (m-1)\,((KPt)+(PtA))$$
$$-n\,((PtCu)+(CuCu')+(Cu'Aq')+(Aq'Aq)+(AqCu)+(CuPt)+(PtA))$$

Wird die zweite Gleichung von der ersten abgezogen, so kommt, weil $(PtCu)+(CuPt)=0$ ist,

$$P-P' = n\,((CuCu')+(Cu'Aq')+(Aq'Aq)+(AqCu)),$$

d. h. die Differenz der beiden Ausschläge ist ein Maass für die beim ungleichzeitigen Eintauchen der beiden Kupferstücke entstehende elektrische Spannung.

Das positive Zeichen dieser Differenz (auf der vorhergehenden Seite) weist darauf hin, dass das im ersten Gliede stehende *Cu* eine positive und das im letzten Gliede stehende *Cu* eine negative Spannung zeigt, oder dass wenn die beiden genannten Kupferstücke ausserhalb der Flüssigkeit metallisch verbunden werden, ein Strom entsteht, welcher in diesem metallischen Bogen vom erstgenannten *Cu* zum zweiten, oder in der Flüssigkeit vom zweiten *Cu* durch *Aq*, *Aq'* und *Cu'* nach dem ersten *Cu* sich bewegt; in Bezug auf die Art der elektrischen Spannung oder auf die Richtung des Stromes nach geschlossener Kette verhält es sich also gerade so, als ob das länger eingetauchte Metall sich in Platin verwandelt hätte.*)

*) Um bei derartigen Versuchen zu verhindern, dass durch das Eintauchen des zweiten Kupferstückes die Flüssigkeit in der Nähe des ersten in Bewegung gesetzt und dadurch möglicherweise eine Aenderung in den Spannungen hervorgerufen wird, ist es nothwendig, jedes Metallstück in ein besonderes durch Schellackunterlagen isolir-

Digitized by Google

Als z. B. eines Tages die Spannung ($Zn\,Cu$) einem Ausschlage von 4,70 Skth. entsprach, erhielt ich beim Eintauchen eines frisch polirten Kupferstückes zehn Minuten nach dem Eintauchen eines andern einen Ausschlag von —0,80 Skth., woraus die Summe der elektromotorischen Kräfte $(Cu\,Cu') + (Cu'\,Aq'') + (Aq'\,Aq) + (Aq\,Cu) = +0{,}17\ (Zn\,Cu)$, also ein mit den früheren Messungen übereinstimmender Werth, sich ergibt.

Bleiben beide Kupferstücke längere Zeit ruhig eingetaucht, so sinkt die Spannung des aus ihnen gebildeten galvanischen Elementes nach und nach auf Null, wofern die beiden Metalle streng gleichartig sind.

Von dieser Gleichartigkeit der beiden Kupferstücke kann man sich am besten überzeugen, wenn man ihre Verbindungen respective mit der unteren Condensatorplatte und dem Erdboden durch einen Commutator vermittelt, der durch Umlegen seines Bügels eine leichte Verwechselung dieser Verbindungen gestattet. Sind die beiden Kupferstücke genau gleich geworden, so muss nach dem Umlegen des Commutators der Ausschlag im Elektrometer derselbe bleiben, und zwar in beiden Lagen des Bügels genau dem durch die Spannung der unteren Condensatorplatte gegen die obere erzeugten gleich sein.

Mit Rücksicht auf den später zu berichtenden Gang der Veränderungen, welche die elektromotorische Kraft, z. B. zwischen Platin und Wasser im Laufe der Zeit erleidet, bedarf die Frage, ob bei Berührung des Kupfers mit dem Wasser bereits zehn Minuten nach dem Eintauchen der Zustand völlig constant geworden ist, noch einer bestimmten Antwort. Dieselbe lässt sich leicht durch einen dem vorstehenden analogen Versuch geben.

Nachdem ein frisch polirtes Kupferstück 40 Minuten lang in destillirtem Wasser ruhig gestanden hatte, wurde in dasselbe Wasser ein zweites frisch polirtes Kupferstück eingetaucht. Die Spannung dieses Elementes betrug

beim Eintauchen des zweiten Kupferstückes						0,17	($Zn\,Cu$)
¾ Minuten nach dem	„	„	„	„		0,11	„
1½ „	„	„	„	„	„	0,07	„

tes, mit Wasser gefülltes Glas zu tauchen, und beide Gläser durch einen mit demselben Wasser gefüllten Heber zu verbinden. Der Querschnitt dieses Hebers darf nicht zu eng sein, um nicht beim Eintauchen, wo die Ableitung der unteren Condensatorplatten nur sehr kurze Zeit dauert, die Ladung des Condensators zu beeinträchtigen.

Digitized by Google

5 Minuten nach dem Eintauchen des zweiten Kupferstückes 0,01 (*Zn Cu*)
10 „ „ „ „ „ „ „ 0,00 „

In zehn Minuten hatte also das zweite Kupferstück denselben Zustand angenommen, wie das bereits 50 Minuten lang eingetauchte erste. *)

Durch analoge Versuche lässt sich nun auch die Aenderung im Verhalten des gefeilten Kupfers nachweisen. Wird zehn Minuten nach dem Eintauchen eines ersten gefeilten Kupferstückes ein zweites in das destillirte Wasser eingesenkt, so entsteht ein Ausschlag von 0,03 (*Zn Cu*) in demselben Sinne, wie zuvor bei polirtem Kupfer, so dass also in diesem Elemente das erste Kupferstück (bei Ableitung des zweiten) eine positive Spannung von der angegebenen Stärke zeigt. Kurze Zeit nach dem Eintauchen des zweiten Kupferstücks ist bei gleichartigen Metallen jede Spannung verschwunden.

Mittelst des im Vorstehenden beschriebenen Verfahrens kann ferner der Unterschied im Verhalten des polirten und des gefeilten Kupfers festgestellt werden. Werden beide genannte Metalle gleichzeitig in destillirtes Wasser eingetaucht, so muss ein solches Element eine Spannung von nahe 0,15 (*Zn Cu*) zeigen, und zwar in der Weise, dass das polirte Kupfer eine negative, das gefeilte eine positive Spannung besitzt, wenn das andere Ende zur Erde abgeleitet ist. Zehn Minuten nach dem Eintauchen ist diese Spannung entweder gleich Null oder beträgt in demselben Sinne wie zuvor noch 0,01 (*Zn Cu*).

Behufs leichterer Uebersicht stelle ich die zuvor ermittelten verschiedenen Spannungen nochmals zusammen, indem ich zur Unterscheidung das gefeilte Kupfer mit *Ku* bezeichne, während das Zeichen *Cu* der polirten Kupferoberfläche und der inneren Kupfermasse verbleibt. Es ist dann

$$(Aq\,Cu) = +\,0{,}09\,(Zn\,Cu)$$
$$(Aq\,Ku) = -\,0{,}06\,(Zn\,Cu)$$
$$(Aq\,Aq') + (Aq'\,Cu') + (Cu'\,Cu) = -\,0{,}08\,(Zn\,Cu)$$
$$(Aq\,Aq') + (Aq'\,Ku') + (Ku'\,Cu) = -\,0{,}09\,(Zn\,Cu).$$

*) Während nach dem Ergebnisse des obigen Versuchs die Spannung zwischen Wasser und Kupfer von 10 bis 50 Minuten nach dem Eintauchen des Metalles keine merkliche Veränderung zeigt, tritt jedoch (infolge der Bildung von Salzen) eine solche im Verlaufe von 24 Stunden ein; bleibt das Metall während dieser Zeit ruhig eingetaucht, so erscheint die Spannung des Wassers gegen Kupfer noch um 0,02 bis 0,03 (*Zn Cu*) negativer, als sie zehn Minuten nach dem Eintauchen ist. Dasselbe gilt auch, wenn das Kupfer vier Tage lang in Wasser eingetaucht gewesen.

Digitized by Google

Hieraus ergeben sich weiter folgende Spannungen:

$$(Cu\,Cu') + (Cu'\,Aq') + (Aq'\,Aq) + (Aq\,Cu) = +\,0.17\,(Zn\,Cu)$$
$$(Ku\,Ku') + (Ku'\,Aq') + (Aq'\,Aq) + (Aq\,Ku) = +\,0{,}03\,(Zn\,Cu)$$
$$(Cu\,Ku') + (Ku'\,Aq') + (Aq'\,Cu') + (Cu'\,Cu) = +\,0{,}01\,(Zn\,Cu).$$

Oben habe ich erwähnt, dass die absoluten Werthe der Spannungen zwischen Wasser und Kupfer von der Beschaffenheit des destillirten Wassers und der Kupferoberfläche abhängen; eben diese Umstände sind aber auch von Einfluss auf die Schnelligkeit, mit welcher die sofort beim Eintauchen beginnenden Aenderungen bis zum Eintritt des constanten Zustandes verlaufen, was zur Folge hat, dass die Spannungen eines aus zwei polirten und in zwei Sorten destillirten Wassers von etwas ungleicher Beschaffenheit eingetauchten Kupferstücken bestehenden Elementes vom Augenblicke des Eintauchens an bis zum Eintritt des constanten Werthes je nach den vorliegenden Bedingungen einen etwas verschiedenen Gang zeigen.

Die in vorliegender Abhandlung beschriebenen Messungen der elektromotorischen Kräfte zwischen dem Wasser und den Metallen sind innerhalb der Temperaturen von 12° bis 20° R. ausgeführt worden; durch einen speciellen Versuch habe ich mich überzeugt, dass eine Aenderung der Temperatur von wenigen Graden die betreffenden Kräfte nicht wesentlich ändert; in wiefern grössere Aenderungen der Temperaturen einen merklichen Einfluss darauf ausüben, muss einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben. Ich habe zwar schon in dem ersten Theile meiner elektrischen Untersuchungen (Bd. V. S. 437) durch den Versuch nachgewiesen, dass die Spannung an den Polen eines aus Zink, Kupfer und Wasser bestehenden Elementes selbst durch ziemlich beträchtliche Temperaturerhöhungen nicht merklich geändert wurde, wofern die Metallstücke erst kurze Zeit zuvor ins Wasser eingesenkt waren. Dies Resultat genügte für den damals vorliegenden Zweck, wo es sich blos um die Benutzung dieser Spannung zur Construction eines Elektrometers handelte; dagegen lässt sich aus ihm nicht mit Sicherheit schliessen, dass eine Erhöhung der Temperatur auf die Spannung zwischen Wasser und Kupfer ohne Einfluss sei, indem ja die Möglichkeit nicht ausgeschlossen ist, dass eine Erhöhung der Temperatur in den elektrischen Spannungen des Wassers gegen Kupfer und gegen Zink gleich grosse und gleich gerichtete Aenderungen, die sich also in der Spannung des gesammten Elementes aufheben würden, zu erzeugen vermag.

Digitized by Google

Im Folgenden werden meistens anstatt der vollständigen Zeiche für die auftretenden elektromotorischen Kräfte nur die Namen der aufeinander folgenden und also beziehungsweise mit einander in Berührung befindlichen Substanzen genannt werden. Für diese Fälle will ich bemerken, dass das vor dem Zahlenwerthe, sei es einer einzigen, sei es der Summe mehrerer elektrischer Spannungen, befindliche Zeichen + oder — stets auf das erste Glied in der Reihe der genannten Substanzen zu beziehen ist, so dass dieses also die angegebene Spannung zeigt, wenn das Endglied zur Erde abgeleitet ist. Heisst es z. B., die Spannung des Wassers gegen Kupfer sei zehn Minuten nach dem Eintauchen $= -0{,}18$ $(Zn\,Cu)$, so zeigt dies an, dass das Wasser in jenem Zeitpunkte die Spannung $-0{,}08$ $(Zn\,Cu)$ annimmt, wenn das Kupfer auf einer Spannung $= 0$ erhalten wird. Wird ferner gesagt, ein Element aus polirtem Kupfer, Wasser, polirtem Platin und Kupfer, oder auch (da kein Missverständniss obwalten kann) in kürzerer Bezeichnung ein Element aus polirtem Kupfer, Wasser und polirtem Platin gibt beim Eintauchen die Spannung $-0{,}18$ $(Zn\,Cu)$, so zeigt das erste Kupfer dieses Elementes die Spannung $-0{,}18$ $(Zn\,Cu)$, wenn das letzte Kupfer zur Erde abgeleitet oder, richtiger gesagt, in seiner Spannung auf Null gebracht wird.

Zum Schlusse dieses Paragraphen will ich noch einen Einwand entkräften, den man vielleicht erheben könnte. Es liegen bis jetzt keine Versuche darüber vor, ob die Vertheilung, bei Luft als trennendem Medium, durch Beimengung von Wasserdämpfen zur Luft geändert wird oder nicht. Jedenfalls ist die Luft zwischen der Wasserfläche und der darüber schwebenden Metallfläche, auch wenn letztere nur wenige Secunden nahe über dem Flüssigkeitsspiegel gehangen, etwas feuchter als zwischen zwei einander genäherten Metallplatten; würden nun durch diese etwas grössere Feuchtigkeit die Condensationsverhältnisse erheblich geändert, so wären die über der Wasserfläche ausgeführten Messungen nicht mehr mit den blos bei Anwendung der Metallflächen erhaltenen Werthen vergleichbar. Aus den im Vorstehenden berichteten Versuchen lässt sich aber der Schluss ziehen, dass bei dem angewandten Verfahren keine merkliche Modification eintritt.

Nach S. 611 und S. 615 beträgt nämlich die Aenderung in der Spannung des Wassers gegen Kupfer 0,17 $(Zn\,Cu)$; der auf S. 611 angegebene Werth ist nun mittelst eines Condensators gemessen, dessen eine Platte aus Wasser bestand, während der S. 615 aufgeführte Werth

Digitized by Google

unter Anwendung zweier metallischer Condensatorplatten gefunden wurde. Die Gleichheit beider Werthe kann als Beweis der Vergleichbarkeit der bei beiden Verfahren erhaltenen Resultate dienen, wofern man bedenkt, dass, bei Wasser als unterer Condensatorplatte, die Feuchtigkeit der Luft auf die zehn Minuten nach dem Eintauchen des Kupfers vorhandene Spannung ohne allen Einfluss sein muss, wenn diese Spannung bei geeigneter Beschaffenheit der oberen Condensatorplatte fast Null ist, also durch Modification des Condensationscoefficenten keine Aenderung erleiden kann. Wäre eine solche Modification in merklicher Weise vorhanden, so würde sie allein den beim Eintauchen des Kupfers in die Trichtervorrichtung beobachteten Ausschlag treffen, und die zuvor erwähnte Gleichheit der beiden nach verschiedenen Methoden erhaltenen Werthe könnte nicht statt haben.

e. Verhalten des Wassers gegen Kupfer, das nach dem Poliren oder Feilen einige Zeit der Luft ausgesetzt gewesen ist.

Zum Verständniss der im Vorstehenden mitgetheilten Beobachtungen über die Aenderungen im Verhalten des Wassers gegen Kupfer, sowie zur Beurtheilung des Einflusses, den eine unvollkommene Reinigung der Oberfläche des Metalles äussern kann, wird es erforderlich, auch das Verhalten des Wassers gegen solches Kupfer, das einige Zeit nach dem Poliren oder Feilen der Luft ausgesetzt gewesen ist, zu untersuchen.

Um die der Luft ausgesetzten metallischen Oberflächen gegen Staub und sonstige Verunreinigungen zu schützen, wurden dieselben sofort nach dem Poliren oder Feilen unter Glasglocken aufbewahrt, und bei ihrer Handhabung jede Berührung der ins Wasser zu tauchenden Stellen mit den Fingern aufs Sorgfältigste vermieden.

Die Messung der elektrischen Erregung bei Berührung des Wassers mit dem an der Luft gelegenen und dadurch an seiner Oberfläche veränderten Kupfer geschah in der Weise, dass ich dieses Kupfer in Wasser eintauchte, in welches bereits zehn Minuten zuvor ein frisch polirtes Kupferstück eingesenkt worden war. Da die constante Spannung des Wassers gegen dieses letztere Metall nach S. 608 bekannt ist, so konnte aus der Grösse der Spannung an den Polen des aus den beiden Kupferstücken und dem Wasser bestehenden Elementes die Span-

nung des Wassers gegen das an der Luft veränderte Kupfer berechnet werden.

Nach S. 611 zeigt Wasser gegen frisch polirtes Kupfer im Momente des Eintauchens eine positive Spannung von $+0{,}09$ ($Zn\,Cu$). Wird dagegen ein der Luft ausgesetzt gewesenes Kupferstück eingetaucht, so erscheint je nach der seit dem Poliren verflossenen Zeit diese positive Spannung geringer oder geht sogar in die entgegengesetzte über. So zeigte z. B. das Wasser gegen ein nach dem Poliren noch nicht ganz zwei Tage mit der Luft in Berührung gewesenes Kupferstück beim Eintauchen bereits die Spannung $-0{,}01$ ($Zn\,Cu$), und gegen ein seit 11 Tagen der Luft ausgesetzt gewesenes Kupferstück sogar die Spannung $-0{,}07$ ($Zn\,Cu$), so dass dies letztere Kupferstück in seinem Verhalten sehr nahe einem seit zehn Minuten in Wasser getauchten Kupferstücke gleich kam.

Selbstverständlich ist hiernach, dass wenn ein frisch polirtes und ein vor einiger Zeit polirtes und seitdem der Luft ausgesetztes Kupferstück gleichzeitig ins Wasser getaucht werden, im Augenblicke des Eintauchens die Spannung an den Polen dieses Elementes eine solche Richtung besitzt, als ob an Stelle des frisch polirten Kupfers ein Zinkstück eingetaucht würde; die Grösse dieser Spannung hängt von der seit dem Poliren des zweiten Kupferstückes verflossenen Zeit ab, und kann nach dem Vorhergehenden nahe bis zu der Höhe steigen, wie sie frisch polirtes Kupfer gegen bereits zehn Minuten lang eingesenktes im Momente des Eintauchens darbietet.

Der beim Eintauchen zwischen den beiden eben bezeichneten Kupferstücken eintretende Unterschied beginnt sofort abzunehmen, und nach Verlauf von zehn Minuten erscheinen beide Kupferstücke völlig oder sehr nahe gleich (höchstens um $0{,}01$ ($Zn\,Cu$) verschieden). *)

*) Die durch ungleiche Beschaffenheit der Condensatorplatten entstehende Spannung scheidet man, wenn es sich um die Messung constant bleibender Spannungen handelt, am leichtesten und genauesten aus, wenn man die beiden Pole des Elementes durch einen Commutator abwechselnd mit den beiden Condensatorplatten verbindet, und aus den erhaltenen beiden Ausschlägen das Mittel nimmt. Der grösseren Sicherheit wegen habe ich stets den Ausschlag erst in der einen Lage des Condensators, dann in der zweiten, und darauf wieder in der ersten gemessen; die Gleichheit der Werthe bei der ersten und dritten Messung beweist die unverändert gebliebene Beschaffenheit der Condensatorplatten und der Luft.

Digitized by Google

In den vorstehenden Versuchen war es den Umständen nach nicht möglich, den Zustand der Oberfläche des an der Luft gelegenen Kupferstäbchens zu bestimmen, wogegen die Messung der elektrischen Spannung beim Eintauchen desselben ausgeführt werden konnte. Wollen wir auf diesen letzteren Vortheil verzichten, indem wir das Stäbchen durch eine Platte ersetzen, so lässt sich dafür eine genaue Bestimmung des Zustandes der Kupferoberfläche vor ihrer Berührung mit Wasser gewinnen.

In dem ersten Theile dieser Abhandlung Bd. IX. S. 33 ist bereits angeführt, dass eine polirte Kupferplatte durch Liegen an der Luft negativer wird. Eine nach dem Poliren 19 Tage lang der Luft ausgesetzte Kupferplatte erschien, als untere Kupferplatte benutzt, um 0,15 (*Zn Cu*) negativer als eine frisch polirte. Als auf die so beschaffene horizontal gelegte Kupferplatte ein Tropfen Wasser gebracht und in dieses Wasser das untere Ende eines frisch polirten Kupferstäbchens getaucht wurde, erschien zehn Minuten nach dem Eintauchen nur eine Spannung von + 0,02 (*Zn Cu*)*), d. h. in dem Sinne, als ob anstatt des frisch polirten Kupferstäbchens Zink eingetaucht worden. Eben diese Spannung beobachtete ich in gleichem Zeitpunkte, als ich an Stelle der vorigen Kupferplatte eine frisch polirte Kupferplatte legte; es verhielt sich also zehn Minuten nach eingetretener Berührung mit Wasser eine durch Aussetzen an die Luft um 0,15 (*Zn Cu*) negativer gewordene Platte einer frisch polirten gleich, was mit den obigen Resultaten übereinstimmt. Ein gleiches Ergebniss fand sich bei der Untersuchung einer seit einem halben Jahre an der Luft gelegenen Kupferplatte; vor dem Benetzen mit einem Wassertropfen war sie 0,14 (*Zn Cu*) negativer als eine frisch polirte; nach dem Versuche, mittelst eines trocknen Handtuches stark abgerieben, erschien sie nur noch 0,08 (*Zn Cu*) negativer als eine frisch polirte.

Dass eine gefeilte Kupferoberfläche bei dem Aussetzen an die Luft gleiche Aenderungen erleidet, wie eine polirte, bedarf nach dem Früheren keines weiteren Beweises.

---

*) Es mag genügen, hier kurz zu bemerken, dass dieser Ausschlag von + 0,02 (*Zn Cu*) zum grössten Theile eine Folge des Eintauchens der Spitze gegenüber einer Fläche ist.

Digitized by Google

f. Verhalten des Wassers gegen bereits in Wasser eingetaucht gewesenes Kupfer.

Wird ein polirtes Kupferstück in Wasser getaucht, so zeigt zehn Minuten nach der Berührung das Wasser gegen dieses Kupfer eine Spannung — 0,08 (*Zn Cu*) (S. 608).

Hebt man das Kupfer aus, und taucht es sofort oder nach wenigen Minuten wieder ein, so erscheint gleich beim Eintauchen die zuvor angegebene Spannung unverändert wieder oder infolge der Bewegung (vergl. den nächsten Paragraphen) um ein wenig vermindert.

Wird dagegen nach dem Herausheben das an dem Kupfer in einzelnen Tropfen hängende Wasser durch rasches Herumschleudern möglichst entfernt, und dann das Kupfer unter einer Glasglocke einige Zeit aufbewahrt, so zeigt sich nachher bei neuem Eintauchen dieses Kupfers im Momente des Eintauchens das Wasser sogar noch stärker negativ. So betrug die Spannung des Wassers gegen solches Kupfer (jedes Mal im Momente des Eintauchens gemessen), nachdem das Kupfer an der Luft gestanden hatte

ungefähr 1 Stunde	— 0,09 (*Zn Cu*)
4—6 Stunden	— 0,10 „
2 Tage	— 0,13 „
6 Tage	— 0,14 „ *)

Merkwürdigerweise nimmt nun, wenn dieses Kupfer eingetaucht bleibt, die negative Spannung ab, und nach 10 oder 20 Minuten langer Berührung mit dem Wasser beträgt die Spannung des Wassers gegen dasselbe, ebenso wie gegen frisch polirtes Kupfer in gleicher Zeit nach dem Eintauchen, wieder — 0,08 (*Zn Cu*).

g. Verhalten des in Wasser bewegten Kupfers gegen ruhendes.

Im 44. Bande der 3. Reihe der *Annales de Chimie et de Physique* vom Jahre 1855 hat E. Becquerel Versuche beschrieben über Entstehung elektrischer Ströme durch Bewegung eines von zwei gleichartigen Metallstücken in einer Flüssigkeit, während das andere feststand;

*) Das zu diesem Versuche benutzte Kupfer war 6 Tage zuvor zwei Mal, und zwar jedes Mal 12 bis 15 Minuten, in Wasser eingetaucht gewesen.

Digitized by Google

indess beziehen sich diese Versuche nicht auf destillirtes Wasser, das er seiner sehr geringen Leitungsfähigkeit wegen vermied. Als er die eine von zwei in eine Lösung von schwefelsaurem Kupferoxyd oder andere nicht namhaft gemachte Lösungen eintauchenden Kupferplatten bewegte, erhielt er wenig kräftige Ströme und noch dazu von veränderlicher Richtung.

Bei destillirtem Wasser ist letzteres nicht der Fall, der Strom hat stets eine constante Richtung, wenn auch keine erhebliche elektromotorische Kraft.

An die Seitenwand eines Glases wurde eine Glasröhre von 20 mm Durchmesser und 45 mm Länge mit Siegellack befestigt, und in das Glas dann so viel Wasser gegossen, dass das Niveau der Flüssigkeit einige Millimeter unter dem oberen Rande der Glasröhre stand; das untere Ende der Röhre stand noch 30 mm vom Boden des Glases ab. In das Innere der Glasröhre wurde das eine Kupferstück eingesenkt, während das zweite, an einer drehbaren Axe befestigt, ausserhalb der Röhre in das Wasser des Glases eintauchte. Um nicht Störungen durch Berührung des Wassers mit zuvor nicht benetzten Theilen des Metalles zu veranlassen, waren beide Kupferstücke vor den Versuchen gegen 10 mm tiefer eingesenkt gewesen, als dies nachher bei der Bewegung statt fand.

Nachdem die frisch polirten Kupferstäbe länger als zehn Minuten eingetaucht gewesen, und die Spannung beider gegen das Wasser sehr nahe gleich war (der Unterschied betrug nicht 0,005 (*Zn Cu*)), wurde der eine Stab in Umdrehung versetzt. Die hierdurch erzeugte Ungleichheit in den Spannungen zwischen den Kupferflächen und dem Wasser konnte entweder mittelst des Condensators oder mittelst des früher Bd. IX. S. 18 erwähnten Galvanometers mit 9960 Windungen, Doppelnadel und Spiegelvorrichtung gemessen werden.

Mittelst des Condensators ergab sich ein Unterschied in den Spannungen des Wassers gegen ruhendes und bewegtes Kupfer von 0,03 bis 0,04 (*Zn Cu*) in dem Sinne als ob anstatt des bewegten Kupfers Zink eingetaucht wäre; durch die Bewegung des Kupfers in Wasser war also die negative Spannung des Wassers gegen ruhendes Kupfer um 0,03 bis 0,04 (*Zn Cu*) verringert worden.

Dasselbe Resultat erhielt ich durch die Messungen mittelst des Galvanometers. Uebrigens kehrte das astatische Nadelsystem nach Aufhören des Drehens nicht sofort in die Lage, wie sie vor dem Drehen gewesen

Digitized by Google

war, zurück. Selbst zwei Minuten nach dem Aufhören der Bewegung betrug die Verringerung der negativen Spannung des Wassers gegen Kupfer noch 0,01 bis 0,02 (*Zn Cu*).*)

2. Verhalten des Wassers gegen Platin.

a. Verhalten des Wassers gegen frisch polirtes oder gefeiltes Platin.

Nachdem im vorhergehenden Abschnitte die bei Berührung des Wassers mit dem Kupfer eintretenden elektrischen Vorgänge, sowie die zu ihrer Beobachtung dienenden Verfahren ausführlich dargelegt sind, wird es jetzt, ohne Mangel an Deutlichkeit befürchten zu müssen, in den meisten Fällen möglich sein, in Kürze über diejenigen Erscheinungen zu berichten, welche beim Eintauchen und Verweilen der übrigen Metalle im Wasser eintreten.

Wird frisch polirtes Platin in Wasser getaucht, so ist beim Eintauchen selbst das Wasser gegen dieses Platin ebenso wie gegen Kupfer positiv, und zwar übersteigt bei guter Politur des Metalles (durch längeres Abreiben auf dem Handtuche erzeugt) diese positive Spannung die zwischen Wasser und Kupfer in gleichem Zeitmomente eintretende selbst um 0,05 (*Zn Cu*), so dass also, wenn beim Eintauchen die Spannung des Wassers gegen Kupfer + 0,09 (*Zn Cu*) beträgt, die entsprechende Spannung zwischen Wasser und Platin + 0,14 (*Zn Cu*) erreicht.

Sofort mit dem Eintauchen beginnt aber die positive Spannung zwischen Wasser und Platin, ebenso wie die Spannung zwischen Wasser und Kupfer, abzunehmen, und nach dem Durchgange durch Null in die entgegengesetzte, also negative überzugehen. Diese Aenderung der Spannung erfolgt, wie ich später noch specieller nachweisen werde, anfangs sehr rasch und wird dann allmälich langsamer. Innerhalb zehn Minuten ist die negative Spannung schon bis — 0,11 (*Zn Cu*) gestiegen, jedoch ohne damit ihren höchsten Werth erreicht zu haben.

*) Um Missverständnisse zu vermeiden, bemerke ich, dass ich mich gewöhnlich darauf beschränkt habe, die Genauigkeit der Messungen bis auf 0,01 (*Zn Cu*) zu treiben; nur in einzelnen Fällen, wo es besonders darauf ankam, bin ich bis zu 0,003 oder 0,005 (*Zn Cu*) gegangen. Wenn es daher im Folgenden heisst, dass zwei Metallstücke gegen Wasser ein gleiches Verhalten zeigten, so soll dies, wofern nicht genauere Werthe speciell angegeben werden, nur bedeuten, dass ihre Verschiedenheit noch nicht 0,01 (*Zn Cu*) erreichte.

Digitized by Google

Eine Bestätigung der vorstehenden Resultate liess sich noch auf anderem Wege erhalten.

Es wurden gleichzeitig frisch polirtes Kupfer und frisch polirtes Platin in destillirtes Wasser getaucht, und die Spannung an den Enden dieses galvanischen Elementes in der S. 613 beschriebenen Weise gemessen. Die unmittelbare Beobachtung gab die Spannung des Elementes Kupfer-Wasser-Platin (genauer Kupfer-Wasser-Platin-Kupfer) im Momente des Eintauchens, oder $(Cu\,Aq) + (Aq\,Pt) + (Pt\,Cu) = -0{,}18\ (Zn\,Cu)$.[1]

Eben diese Spannung lässt sich aber auch aus den früher erhaltenen Zahlenwerthen berechnen.

Nach S. 604 ist $(Cu\,Pt) = +0{,}23\ (Zn\,Cu)$
nach dem Vorstehenden $(Aq\,Pt) = +0{,}14$ „
und $(Aq\,Cu) = +0{,}09$ „

woraus $(Cu\,Aq) + (Aq\,Pt) + (Pt\,Cu) = -0{,}18\ (Zn\,Cu)$, also ein mit dem direct erhaltenen Werthe übereinstimmendes Resultat folgt.

Zehn Minuten nach dem Eintauchen war in dem erwähnten speciellen Versuche die Kraft des genannten Elementes $(Cu\,Cu') + (Cu'\,Aq') + (Aq'\,Aq) + (Aq\,Aq') + (Aq'\,Pt') + (Pt'\,Pt) + (Pt\,Cu)$ bis $-0{,}27\ (Zn\,Cu)$ gestiegen. Die früheren Messungen geben nun

$$(Cu\,Pt) = +0{,}23\ (Zn\,Cu)$$
$$(Aq\,Aq') + (Aq'\,Pt') + (Pt'\,Pt) = -0{,}14 \quad ,,$$
$$(Aq\,Aq') + (Aq'\,Cu') + (Cu'\,Cu) = -0{,}08 \quad ,,$$

folglich

$$(Cu\,Cu') + (Cu'\,Aq') + (Aq'\,Aq) + (Aq\,Aq') + (Aq'\,Pt') + (Pt'\,Pt) + (Pt\,Cu) = -0{,}26\ (Zn\,Cu),$$

ein Werth, der mit der directen Beobachtung nahe zusammenfällt.*)

Die obigen Zahlenwerthe geben den Betrag der Aenderung der Spannung zwischen Wasser und Platin innerhalb der ersten zehn Minuten des Eintauchens $= 0{,}25\ (Zn\,Cu)$; ein Resultat, das ich noch weiter bestätigt habe, indem ich zehn Minuten nach dem Einsenken eines polirten Platinstäbchens in destillirtes Wasser ein zweites frisch polirtes

*) Ich erinnere ausdrücklich daran, dass diese letzten Versuche nur die Differenzen der Spannungen des Wassers gegen Platin und Kupfer controliren, dagegen in keiner Weise die früher festgestellten elektrischen Spannungen der Metalle unter einander, indem die oben für $(Aq\,Pt)$ und $(Aq\,Aq') + (Aq'\,Pt') + (Pt'\,Pt)$ angeführten Werthe nur mit Zugrundlegung der Spannung $(Cu\,Pt) = +0{,}23\ (Zn\,Cu)$ berechnet wurden.

Digitized by Google

Platinstäbchen eintauchte, und die Spannung dieses Elementes im Augenblicke des Eintauchens maass.

Indessen gibt, wie schon angedeutet, die Zahl 0,25 (*Zn Cu*) noch nicht den ganzen Betrag, um welchen sich die Spannung des Wassers gegen Platin ändert; diese Aenderung ist innerhalb der ersten zehn Minuten nach dem Eintauchen noch keineswegs vollendet, sondern wächst im Laufe der nächsten halben Stunde noch um mehrere Procente in demselben Sinne wie zuvor, so dass die gesammte Aenderung, welche in der fraglichen Spannung eintritt, 0,30 (*Zn Cu*), noch etwas übersteigt.

Am besten lassen sich diese Aenderungen, sowie auch die Schnelligkeit, mit welcher sie eintreten, aus Versuchsreihen, wie die folgende, erkennen.

Ein polirtes Platinstäbchen wurde in destillirtes Wasser eingesenkt, und nach einer Stunde, während welcher es ruhig darin gestanden, ein zweites genau gleichartiges frisch polirtes Platinstäbchen eingetaucht. An diesem galvanischen Elemente wurden folgende Spannungen beobachtet:

			beim Eintauchen	+ 0,34	(*Zn Cu*)
¾	Minute	nach	dem	+ 0,23	„
1½	„	„	„	+ 0,18	„
5	„	„	„	+ 0,12	„
10	„	„	„	+ 0,09	„
20	„	„	„	+ 0,03	„
30	„	„	„	+ 0,01	„
50	„	„	„	+ 0,01	„

Wie das Vorzeichen lehrt, erfolgte die elektrische Spannung in dem Sinne, als ob an Stelle des zweiten später eingetauchten Platins ein Zinkstück eingetaucht worden. Nach diesem Versuche hat sich, entsprechend den früheren Messungen, die Spannung während der ersten zehn Minuten um 0,25 (*Zn Cu*) geändert. Während also schon in den ersten zehn Minuten die elektrische Spannung zwischen Wasser und Platin beträchtlich stärker variirt, als die Spannung zwischen Wasser und Kupfer, ist die gesammte Aenderung bei ersterem Metalle fast doppelt so gross als beim zweiten.*)

*) Schröder hat in Poggendorf's Annalen Bd. 54, S. 75 aus seinen galvanometrischen Messungen bereits den Schluss gezogen, dass das Platin durch andauernde

Zur Bestimmung des Ortes, welchen das Platin in der Spannungsreihe einnimmt, war (vergl. Bd. IX. S. 46) eine aus in Frankreich bearbeitetem Platin bestehende Platte verwandt worden; dagegen hatte ich zu den eben berichteten Messungen Platinstäbchen von 3,5 mm Durchmesser aus angeblich russischem Platin benutzen müssen, indem ich anfänglich keine hinreichenden dicken Drähte französischen Platins zu erlangen vermochte. Indess schien es mir, mit Rücksicht auf das thermoelektrische Verhalten verschiedener Platinsorten, durchaus nothwendig, auch die Spannung des Wassers gegen die letztere Platinsorte zu prüfen. Dies konnte nach Erlangung eines Drahtes aus französischem Platin von 3,2 mm Durchmesser leicht dadurch geschehen, dass ich ein frisch polirtes Stäbchen von russischem und ein eben solches von französischem Platin gleichzeitig in destillirtes Wasser tauchte, und die Spannungen an den Polen dieses aus den beiden Platinsorten und Wasser bestehenden Elementes maass.

Aus solchen Beobachtungen ergab sich, dass die positive Spannung des Wassers gegen französisches Platin im Momente des Eintauchens um 0,02 bis 0,03 (*Zn Cu*) grösser war als gegen russisches Platin; der Ausschlag des Elektrometers erfolgte also in dem Sinne, als ob an Stelle des französischen Platins ein Zinkstück eingetaucht worden. Auch nach sechs Stunden erschienen die beiden Stäbchen noch nicht völlig gleich, obwohl der anfängliche Ausschlag, jedoch ohne seine Richtung zu ändern, allmälich abgenommen hatte: nach zehn Minuten nämlich betrug die Spannung des Elementes aus russischem Platin, Wasser und französischem Platin noch + 0,02 (*Zn Cu*), nach zwei, vier und sechs Stunden noch + 0,01 (*Zn Cu*). Daraus folgt, dass mehrere Stunden nach dem Eintauchen die negative Spannung des Wassers gegen das angewandte französische Platin um 0,01 (*Zn Cu*) geringer war als die gegen das zu diesen Versuchen benutzte russische Platin beobachtete Spannung. *)

Berührung mit Wasser negativ verändert wird, und dass die Grösse dieser Aenderung beim Platin viel beträchtlicher ist als beim Kupfer.

*) Wenn die Ladungen des Elektrometers so schwach sind, wie in diesen letzten Messungen, so lässt sich, falls das Zimmer völlig unelektrisch ist, wie dies bei mässig feuchter Luft während des Sommers statt findet, die Genauigkeit der Messungen bis auf weniger als 0,005 (*Zn Cu*) verbürgen, indem man eben wegen der äusserst geringen Spannung bei den unmittelbar nach einander in beiden Lagen des Commutators ausgeführten Messungen keine Störung durch einen ungleichen Elektricitätsverlust zu befürchten hat.

Digitized by Google

Beim Kupfer zeigte sich im Momente des Eintauchens zwischen polirtem und gefeiltem Metall ein grosser Unterschied (S. 611; die negative Spannung des Wassers gegen gefeiltes Kupfer war nur um 0.03 (*Zn Cu*) geringer als die zehn Minuten später eintretende constante Kraft.

Eine ähnliche Erscheinung bietet auch das Platin dar. Als ein gefeiltes Platinstäbchen eine Stunde nach dem Einsenken eines anderen polirten Stäbchens in destillirtes Wasser getaucht wurde, zeigte das so gebildete Element im Augenblicke des Eintauchens des gefeilten Stäbchens nur eine elektromotorische Kraft von — 0.09 (*Zn Cu*), woraus folgt, dass die negative Spannung des Wassers gegen das gefeilte eben im Eintauchen begriffene Stäbchen nur um diesen Betrag geringer war, als gegen das bereits eine Stunde lang eingetauchte andere polirte Stäbchen. Setzen wir die Spannung des Wassers gegen Platin, eine Stunde nach dem Eintauchen, = — 0,19 (*Zn Cu*), so würde für gefeiltes Platin beim Eintauchen die Spannung (*Aq Pt*) = — 0,10 (*Zn Cu*) sein, während sie für polirtes + 0,14 (*Zn Cu*) betrug.

Während am polirten Platin die nach dem Eintauchen in Wasser eintretende Aenderung sich verhältnissmässig langsam vollzieht, ist sie ebenso wie beim Kupfer, beim gefeilten Platin viel schneller beendigt. In dem so eben beschriebenen Versuche betrug die Spannung des Elementes

	beim Eintauchen des gefeilten Platins	— 0,09 (*Zn Cu*
¾	Minute nach dem „ „ „ „	— 0,05 „
1½	„ „ „ „ „ „ „	— 0,02 „
10	„ „ „ „ „ „ „	— 0,00 „

so dass also das gefeilte Platin bereits durch eine zehn Minuten dauernde Berührung mit Wasser in denselben Zustand versetzt wird, den das polirte erst nach Verlauf von mehr als einer halben Stunde annimmt.

Wenn ein gefeiltes und ein polirtes Platinstäbchen gleichzeitig in destillirtes Wasser eingetaucht werden, so muss nach dem Vorstehenden im Momente des Eintauchens eine starke Spannung hervortreten. Bei einem speciellen Versuche betrug dieselbe z. B. + 0,24 (*Zn Cu*), d. h. in dem Sinne, als ob an Stelle des polirten Platins ein Stück Zink eingetaucht würde. Wird eben diese Spannung aus den früheren Versuchen berechnet, so ergibt sich ein mit der directen Messung übereinstimmender Werth.

Digitized by Google

b. Verhalten des Wassers gegen Platin, das der Luft ausgesetzt gewesen, oder zuvor in Wasser getaucht oder ausgeglüht worden, oder in Bewegung befindlich ist.

Während das Kupfer durch Aussetzen an die Luft nicht unerhebliche Veränderungen in seiner Oberfläche erleidet, scheinen solche beim Platin nicht einzutreten; denn die sehr geringen Abweichungen, welche sich bisweilen zwischen dem frisch polirten und dem nach dem Poliren mehrere Tage der Luft ausgesetzt gewesenen Platin zeigen, könnten ihre genügende Erklärung in der Schwierigkeit finden, der Oberfläche des nicht beträchtlich harten Metalles stets dieselbe Politur zu ertheilen. Eine etwas geringere Politur wird aber, wie aus den zuvor berichteten Verschiedenheiten im Verhalten des polirten und gefeilten Metalles hervorgeht, gerade bei der grossen und sehr schnell eintretenden Veränderung in der Spannung zwischen Wasser und Platin, leicht Abweichungen von 0,02 und selbst 0,03 (*Zn Cu*) zur Folge haben müssen.

Wird ein Platinstäbchen, das bereits zehn Minuten mit Wasser in Berührung gewesen ist, aus demselben herausgehoben, und nach wenigen Secunden wieder eingetaucht, so zeigt es sehr nahe dieselbe Spannung, wie vor dem Herausheben.

Wird aber das Platinstäbchen nach dem Herausziehen aus dem Wasser, ohne es abzuwischen, längere Zeit an der Luft aufbewahrt, so zeigt bei neuem Eintauchen das Wasser keine oder nur eine sehr geringe Spannung gegen das Platin; zehn oder zwanzig Minuten nach dem Eintauchen steigt die negative Spannung wieder zu dem Werthe, der bei frisch polirtem Platin nach gleich langer Berührung mit dem Wasser beobachtet wird.

Das Platin wird zwar durch Erhitzen an der Luft chemisch nicht geändert; doch erleidet seine Oberfläche durch Glühen eine beträchtliche physikalische Veränderung, ich möchte sagen, Auflockerung. Denn, wenn ein Platinstäbchen durch Putzen mit Schmirgelpapier und Abreiben auf einem Handtuche polirt ist, so gleitet es, wenn man es zwischen einem mit den Fingern angedrückten Handtuche hinzieht, leicht hindurch, während es nach dem Glühen bei gleichem Verfahren wie mit einer rauhen Oberfläche versehen erscheint. Ich hielt es daher für nothwendig, auch das Verhalten zwischen Wasser und Platin nach dem Glühen des letzteren

zu untersuchen. Des besseren Verständnisses wegen möge es mir gestattet sein, eine specielle Versuchsreihe mitzutheilen.

Nachdem ein polirtes Kupferstück zehn Minuten lang bereits ins Wasser eingesenkt worden, wurde ein frisch polirtes Platinstäbchen eingetaucht, und die Spannung dieses Elementes aus Kupfer, Wasser und Platin erhalten:

beim Eintauchen	=	$-0{,}02$ $(Zn\,Cu)$
$^3/_4$ Minute nach dem	„	$-0{,}13$ „
$1^1/_2$ „ „ „	„	$-0{,}14$ „
10 „ „ „	„	$-0{,}28$ „ etc.

Daraus folgt die Spannung des Wassers gegen Platin in den bezeichneten Zeitpunkten der Reihe nach: $+0{,}13$; $+0{,}02$; $+0{,}01$; $-0{,}13$ $(Zn\,Cu)$ etc.

Während das Kupfer eingetaucht blieb, wurde das Platin von Neuem polirt und dann in einer Spirituslampe mit doppeltem Luftzuge geglüht; die Temperatur erreichte bei der Dicke und der guten Leitung und Strahlung des Platins nicht die Weissglühhitze. Als dieses Platin nach dem Erkalten eingetaucht wurde, betrug die Spannung des Elementes aus Kupfer, Wasser und Platin

beim Eintauchen	=	$-0{,}15$ $(Zn\,Cu)$
$^3/_4$ Minute nach dem	„	$-0{,}26$ „
$1^1/_2$ „ „ „	„	$-0{,}30$ „
10 „ „ „	„	$-0{,}37$ „
$1^1/_4$ Stunde „ „	„	$-0{,}35$ „
4 „ „ „	„	$-0{,}30$ „

Hieraus folgt die Spannung zwischen Wasser und Platin in dem angegebenen Zeitpunkte der Reihe nach: 0,00; $-0{,}14$; $-0{,}15$; $-0{,}22$; $-0{,}20$; $-0{,}15$ $(Zn\,Cu)$.

Das Kupfer ward von Neuem polirt, und das Platin, ohne seine Oberfläche weiter zu berühren, nochmals ausgeglüht. Als zehn Minuten nach dem Einsenken des Kupfers das Platin eingetaucht wurde, betrug die Spannung des Elementes Kupfer, Wasser und Platin

beim Eintauchen	=	$-0{,}24$ $(Zn\,Cu)$
$^3/_4$ Minute nach dem	„	$-0{,}32$ „
$1^1/_2$ „ „ „	„	$-0{,}34$ „
$3^1/_2$ „ „ „	„	$-0{,}36$ „
12 „ „ „	„	$-0{,}37$ „

Digitized by Google

1¼ Stunde nach dem Eintauchen = — 0,34 (*Zn Cu*)
2½ „ „ „ „ — 0,32 „

Hieraus folgen die Spannungen zwischen Wasser und Platin in den angegebenen Zeitpunkten der Reihe nach: — 0,09; — 0,17; — 0,19; — 0,21; — 0,22; — 0,19; — 0,17 (*Zn Cu*).

Durch Glühen des polirten Platins wird also die Spannung des Wassers gegen dasselbe gleich beim Eintauchen negativ. In den vorstehenden Versuchen wurde diese negative Spannung durch ein zweites Ausglühen noch erhöht. Dieser letztere erhöhte Werth lässt sich indess auch durch die intensivere Hitze eines Bunsen'schen Gasbrenners mit doppeltem Luftzuge mittelst einmaligen Glühens erreichen. *)

Auffallend ist, dass nach dem Eintauchen des geglühten Platins die negative Spannung zwischen Wasser und Platin rasch über das Maximum der bei ungeglühtem Platin beobachteten Spannung (— 0,19 (*Zn Cu*)) steigt (bis — 0,23 (*Zn Cu*)), und dann allmälich wieder auf das eben erwähnte Maximum zurücksinkt. Beim Kupfer hatten wir auch ein Ueberschreiten der gewöhnlichen grössten negativen Spannung (S. 622), jedoch in etwas anderer Weise; früher in Wasser getauchtes und dann einige Tage der Luft ausgesetztes Kupfer zeigte beim Eintauchen eine grössere Spannung als frisch polirtes zehn Minuten nach dem Eintauchen, und ging dann ebenfalls langsam auf die Spannung des frisch polirten Metalles zurück.

Das eben bezeichnete Verhalten des geglühten Platins wird durch den nachfolgenden Versuch noch weiter bestätigt.

Von zwei frisch polirten Platinstäben ward der eine sofort in destillirtes Wasser getaucht, der andere dagegen in der zuvor genannten Gasflamme stark geglüht, und 16 Minuten nach dem Einsenken des ersteren in das Wasser getaucht. Die Spannung dieser Kette betrug im Augenblicke des Eintauchens des zweiten Stäbchens

+ 0,06 (*Zn Cu*)
nach ¾ Minute + 0,04 „
„ 2 „ 0,00 „
„ 3 „ — 0,03 „

*) Beim Glühen des Platinstäbchens wurde die Spitze stets in die Flamme getaucht, so dass die beim ersten Eintauchen möglicherweise darauf nieder geschlagene Kohle wieder verbrennen musste.

Digitized by Google

Das geglühte Platin verhielt sich in Bezug auf die Richtung der elektrischen Spannung also anfangs so, als ob an seiner Stelle Zink eingetaucht wäre, nach drei Minuten aber umgekehrt.

Durch die Bewegung des Platins im Wasser wird die Spannung des Wassers gegen dasselbe, wenn das Metall durch längeres (mehrstündiges) Eintauchen den constanten Zustand angenommen hat, nicht merklich geändert.

3. Verhalten des Wassers gegen Silber.

a. Verhalten des frisch polirten oder gefeilten Silbers.

Die zu den folgenden Messungen benutzten Silberstäbchen von nahe 4 mm Durchmesser stammten aus derselben Masse chemisch reinen Silbers, aus welcher die Bd. IX. S. 45 beschriebene Platte gefertigt war. Die elektrische Differenz dieses Metalles gegen Kupfer ist nach der eben angeführten Stelle $= 0{,}18$ $(Zn\,Cu)$.

Da das reine Silber ausserordentlich weich ist, so lässt es sich nach dem gewöhnlich angewandten Verfahren wohl nicht mit vollkommen polirter, d. h. von Rissen freier Oberfläche darstellen, und je nach der mehr oder weniger vollkommenen Politur, welche es durch das Behandeln mit Schmirgelpapier und durch Abreiben auf einem Handtuche annimmt, wird, wie man nach den vorhergegangenen Erfahrungen bei polirten und gefeilten Metallen erwarten muss, die Grösse der Spannung zwischen Wasser und Silber beim Eintauchen des Metalles schwanken. Bei guter Politur ist es mir gelungen, eine Spannung des Wassers gegen Silber von $+ 0{,}08$ $(Zn\,Cu)$ zu beobachten; bei weniger vollkommener Politur sinkt dieselbe bis zu Null oder auch selbst bis $- 0{,}02$ $(Zn\,Cu)$ herab.

Dagegen gewähren die einige Zeit nach dem Eintauchen ausgeführten Messungen sehr constante Werthe; zehn oder zwanzig Minuten nach dem Eintauchen ist die Spannung des Wassers gegen Silber sehr nahe der Spannung des Wassers gegen Kupfer gleich; der Unterschied beträgt ungefähr 0,01 $(Zn\,Cu)$, und zwar in dem Sinne, dass, wenn die Spannung zwischen Wasser und Kupfer $- 0{,}08$ $(Zn\,Cu)$ beträgt, die Spannung zwischen Wasser und Silber nur bis $- 0{,}07$ $(Zn\,Cu)$ steigt.

In recht auffälliger Weise lässt sich diese nahe Uebereinstimmung der beiden Spannungen darthun, wenn polirtes Kupfer und Silber in

Digitized by Google

Wasser zu einem Elemente zusammengefügt werden. Nach dem Eintritte der constanten Werthe (zehn bis zwanzig Minuten nach dem Eintauchen) ist die Spannung an den Polen dieses Elementes aus Kupfer, Wasser und Silber nahe der Spannung zwischen Kupfer und Silber gleich; sie beträgt $-0{,}17$ $(Zn\,Cu)$, während $(Cu\,Ag) = +0{,}18$ $(Zn\,Cu)$ ist, so dass also die in entgegengesetzter Richtung wirkenden Spannungen zwischen Wasser und Kupfer einerseits, und zwischen Wasser und Silber andererseits sich nahezu aufheben.

Die Aenderung, welche bei guter Politur des Metalles innerhalb der ersten zehn oder zwanzig Minuten nach dem Eintauchen in der Spannung zwischen Wasser und Silber eintritt, ist also nahe der beim Kupfer beobachteten Aenderung gleich.

Das gefeilte Silber verhält sich ähnlich wie das gefeilte Kupfer; die Spannung zwischen Wasser und gefeiltem Silber beim Eintauchen ist nur einige Procente weniger negativ als zehn oder zwanzig Minuten später.

b. Verhalten des Wassers gegen an der Luft gelegenes oder zuvor eingetauchtes oder geglühtes oder bewegtes Silber.

Im vorhergehenden Paragraphen ist der Schwierigkeit, das Silber hinreichend zu poliren, gedacht worden und mit Rücksicht auf diesen Umstand wage ich keinen bestimmten Ausspruch darüber, ob überhaupt und um welchen Betrag die Spannung des Wassers gegen Silber, das einen bis zwei Tage an der Luft gelegen hat, von der Spannung des Wassers gegen frisch polirtes Metall beim Eintauchen abweicht.

Wird ein polirtes Silberstäbchen bis zum Eintritt der constanten Spannung ins Wasser eingetaucht, so erscheint, wenn das Stäbchen aus dem Wasser herausgehoben und wenige Secunden darauf wieder eingetaucht wird, die vor dem Herausheben beobachtete Spannung sogleich beim Eintauchen wieder.

Wird das Stäbchen nach dem Herausheben aus dem Wasser mehrere Tage der Luft ausgesetzt, so tritt beim Eintauchen in Wasser sofort die constante Spannung $-0{,}07$ $(Zn\,Cu)$ ein, oder es zeigt sich auch eine bis $-0{,}08$ oder $-0{,}09$ $(Zn\,Cu)$ erhöhte Spannung, die jedoch bald wieder auf den Werth $-0{,}07$ $(Zn\,Cu)$ herabsinkt.

Nach dem Glühen eines polirten Silberstäbchens erscheint beim Eintauchen die Spannung des Wassers gegen dasselbe beträchtlich nega-

tiv. In einem Versuche ward dieselbe beim Eintauchen — 0,14 (*Zn Cu*) gefunden und ging dann in zehn Minuten auf — 0,07 (*Zn Cu*) zurück; in einem andern stieg die Spannung beim Eintauchen sogar bis — 0,15 (*Zn Cu*) und nahm dann so langsam ab, dass sie in 3 Stunden erst bis — 0,11 (*Zn Cu*) gesunken war.

Das Glühen geschah über einer Spirituslampe mit doppeltem Luftzuge, und erreichte bei der Dicke und guten Wärmeleitung der Stäbe keine grosse Höhe; es wurde namentlich das eine Ende des Stäbchens der Flamme ausgesetzt, und auch nur dieses ins Wasser getaucht; die entfernteren etwas mit Kohle belegten Theile kamen mit dem Wasser nicht in Berührung. Die Oberfläche des Silbers erschien nach dem Glühen überall matt.

Ein gleiches Resultat erhielt ich durch Glühen des Silbers in der Flamme eines Bunsen'schen Gasbrenners mit doppeltem Luftzuge; die Spitze des Silberstäbchens war geschmolzen und nirgends ein Beschlag von Kohle wahrnehmbar. Beim Eintauchen betrug die Spannung des Wassers gegen dieses Silber — 0,20 (*Zn Cu*).

Die Bewegung des Silbers ändert an der negativen Spannung zwischen Wasser und Silber nach längerem (¼stündigem) Eintauchen nur äusserst wenig. Die Beobachtungen mittelst des Galvanometers ergaben eine Verminderung derselben um etwa 0,005 (*Zn Cu*).

4. Verhalten des Wassers gegen Gold.

a. Verhalten des Wassers gegen frisch polirtes und gefeiltes Gold.

Das zu den nächstfolgenden Messungen verwandte Goldstäbchen war ebenso wie das Metall der entsprechenden Platte (S. 600) nicht absolut chemisch rein; es war von dem Münzscheider als möglichst feines Gold geliefert worden und enthielt also jedenfalls noch geringe fremdartige Beimengungen. Die Dicke des Goldstäbchens betrug nur 2 mm; es liess sich daher schwierig poliren.

Nach S. 600 ist die Spannung (*Cu Au*) = + 0,10 (*Zn Cu*); unter Zugrundlegung dieses Werthes ergibt sich beim Eintauchen die Spannung des Wassers gegen Gold = + 0,10 (*Zn Cu*); diese positive Spannung nimmt rasch ab, und verwandelt sich in eine negative, welche nach zehn bis zwanzig Minuten bis — 0,16 (*Zn Cu*) steigt.

Digitized by Google

Nach vorstehenden Messungen beträgt die Gesammtänderung, welche die Spannung zwischen Wasser und Gold erleidet, 0,26 (*Zn Cu*). Dieselbe habe ich auch direct bestimmt, indem ich eine halbe Stunde nach dem Eintauchen eines Golddrahtes das polirte Goldstäbchen in dasselbe Wasser tauchte, und die Spannung dieses Elementes beim Eintauchen und nach dem Eintritt des constanten Zustandes maass. Der Unterschied beider Beobachtungen gab jene Aenderung = 0,29 (*Zn Cu*). Uebrigens hängt die Geschwindigkeit, mit welcher diese Aenderung vorschreitet, von der Beschaffenheit des Wassers und der Oberfläche des Metalles ab, so dass in manchen Fällen bereits nach zehn Minuten, in anderen erst nach zwanzig Minuten oder auch noch etwas längerer Zeit ein constanter Zustand in der Spannung eingetreten ist.

Der Unterschied in den Geschwindigkeiten, mit welchen die Modificationen in den Spannungen zwischen Wasser und polirtem Kupfer einerseits, und zwischen Wasser und polirtem Golde andererseits verlaufen, tritt recht deutlich hervor, wenn gleichzeitig ein polirtes Kupfer- und ein polirtes Goldstäbchen in Wasser getaucht werden. Die Spannung eines solchen aus Kupfer, Wasser und Gold gebildeten Elementes betrug

beim Eintauchen	— 0,08	(*Zn Cu*)
ungefähr ¾ Minute nach dem „	— 0,06	„
„ 1½ „ „ „ „	— 0,04	„
„ 2½ „ „ „ „	— 0,03	„
„ 10 „ „ „ „	— 0,12	„ etc.

Die Aenderung in der Spannung zwischen Wasser und Gold ist also in den ersten Minuten nach dem Eintauchen geringer als die Aenderung zwischen Wasser und Kupfer, später aber beträchtlich grösser. Uebrigens war in dem vorstehenden Versuche die Aenderung in der Spannung zwischen Wasser und Gold in zehn Minuten noch nicht vollendet, wie man leicht findet, wenn man die Spannung berechnet, welche ein Element aus bereits zehn Minuten in Wasser eingesenktem Kupfer und eben eintauchendem polirten Golde zeigen muss; diese Spannung beträgt + 0,08 (*Zn Cu*), so dass also die im vorstehenden Versuche innerhalb zehn Minuten am Golde allein vollzogene Veränderung nur auf 0,20 (*Zn Cu*) steigt. Nach Eintritt des constanten Zustandes würde obiges Element anstatt der Spannung — 0,12 (*Zn Cu*) die Spannung — 0,18 (*Zn Cu*) dargeboten haben.

Die gleich zu erwähnenden Beobachtungen über den Verlauf der

Digitized by Google

elektrischen Spannung des Wassers gegen gefeiltes Gold machten es nothwendig, auch ein absolut reines Goldstäbchen in Bezug auf sein Verhalten gegen Wasser zu vergleichen. Zu diesem Zwecke wurde das Gold aus einer Lösung von Goldchlorid durch Eisenvitriol niedergeschlagen, der gut ausgewaschene Niederschlag in einem kleinen Tiegel geschmolzen und die erhaltene rundliche Masse ohne Weiteres in die Form eines 23 mm langen und 3,4 mm dicken Stäbchens gebracht.

Das Wasser verhielt sich gegen dieses polirte Stäbchen im Allgemeinen ebenso wie gegen das vorher benutzte. Da infolge der grösseren Steifigkeit das neue Stäbchen sich vollkommener poliren liess, als das frühere dünnere, so gelang es auch, beim Eintauchen eine noch etwas höhere positive Spannung des Wassers, selbst bis zu + 0.15 (*Zn Cu*) zu beobachten. Die nach längerer Berührung mit dem Wasser vorhandene Spannung war der früheren gleich, wie dies auch die directe Vergleichung beider Stäbchen ergab; dagegen war infolge der verschiedenen Beschaffenheit (Politur) der Oberfläche der Verlauf der Aenderung in der Spannung der beiden Stäbchen nicht derselbe.

Wurde das Stäbchen aus chemisch reinem Golde gefeilt, und dann in das Wasser getaucht, so war die beim Eintauchen zu beobachtende Spannung des Wassers gegen das gefeilte Gold etwas geringer als gegen das polirte (+ 0.07 bis + 0.09 (*Zn Cu*)); dagegen ging diese positive Spannung langsamer in die negative über, und wuchs die letztere viel weniger rasch als beim polirten Golde; ja es trat sogar in der Aenderung der Spannung nach der negativen Seite hin auf einige Zeit ein Stillstand oder selbst schwache Umkehr ein, worauf dann von Neuem die Aenderung nach der negativen Seite hin langsam vorzuschreiten begann. Es möge gleich die erste Versuchsreihe mit dem gefeilten Drahte aus chemisch reinem Golde hier Platz finden. Die Spannung des Wassers gegen dieses Gold betrug beim Eintauchen + 0,09 (*Zn Cu*)

3/4	Minute	nach	dem	„	+ 0,02 „
1 1/2	„	„	„	„	0,00 „
5	„	„	„	„	0,00 „
10	„	„	„	„	+ 0,02 „
20	„	„	„	„	+ 0,03 „
40	„	„	„	„	0,00 „
1	Stunde	„	„	„	— 0,05 „
1	Tag	„	„	„	— 0,11 „

Digitized by Google

Also selbst in einer Stunde ist die Spannung des Wassers gegen ge-iltes Gold noch lange nicht so weit negativ als in zehn Minuten gegen olirtes; erst am andern Tage wurde eine fast ebenso hohe negative pannung beobachtet.

In der vorstehenden Versuchsreihe ist die positive Spannung in den uf das Eintauchen folgenden nächsten Minuten nicht negativ geworden. ondern nur zum Verschwinden gekommen; bei anderen Beobachtungen, wo der Oberflächenzustand ein etwas verschiedener gewesen, trat aber bald nach dem Eintauchen die negative Spannung ein. So z. B. wurde in einer zweiten Versuchsreihe die Spannung zwischen Wasser und gefeiltem Golde gefunden:

			beim Eintauchen	+ 0,07	(*Zn Cu*)
¾	Minute	nach dem	„	+ 0,01	„
1½	„	„ „	„	— 0,01	„
4	„	„ „	„	— 0,05	„
7	„	„ „	„	— 0,04	„
13	„	„ „	„	— 0,04	„
20	„	„ „	„	— 0,05	„
1	Tag	„ „	„	— 0,12	„

In ähnlicher Weise verhielt sich im Allgemeinen auch das gefeilte Stäbchen aus nicht chemisch reinem Golde; nur trat bei ihm, wenn die positive Spannung bald nach dem Eintauchen verschwunden, oder selbst schwach negativ geworden war, die Umkehr nach der positiven Seite oft so stark ein, dass die beim Eintauchen beobachtete Spannung fast erreicht (ja in einzelnen Fällen selbst überschritten) wurde; diese positive Spannung erhielt sich je nach ihrer Höhe längere Zeit, und ging dann später in die negative über. Des besseren Verständnisses wegen will ich eine Versuchsreihe im Auszuge mittheilen. Die Spannung des Wassers gegen den frisch gefeilten Golddraht betrug

			beim Eintauchen	+ 0,09	(*Zn Cu*)
3	Minuten	nach dem	„	+ 0,01	„
15	„	„ „	„	+ 0,06	„
25	„	„ „	„	+ 0,07	„
50	„	„ „	„	+ 0,03	„
4½	Stunde	„ „	„	— 0,09	„

Wurde das gefeilte Gold wieder mässig polirt, so blieb noch eine Neigung für die zuletzt erwähnten Vorgänge, die sich namentlich auch

Digitized by Google

in dem sehr langsamen und geringeren Wachsen der negativen Spannung während der Berührung mit dem Wasser aussprach. Erst nach wiederholtem sorgfältigen Poliren erschienen die zu Anfang dieses Abschnittes für polirtes Gold angegebenen Werthe wieder. Das Gesagte gilt namentlich von dem dünneren Drahte, der sich schlecht poliren liess.

b. Verhalten des Wassers gegen an der Luft gelegenes oder zuvor eingetauchtes oder geglühtes oder bewegtes Gold.

Während Platin, wenn es nach dem Poliren einige Tage der Luft ausgesetzt wird, keine Aenderung in seinem Verhalten gegen Wasser zeigt, und beim Silber unter gleichen Umständen wenigstens keine sehr beträchtlichen Modificationen eintreten, übt das Aussetzen an die Luft auf das Gold einen erheblichen Einfluss aus. Als die beiden im vorhergehenden Paragraphen beschriebenen Goldstäbchen ein Mal 13, ein anderes Mal 14 Tage lang unter einer Glasglocke gestanden hatten, betrug im Momente des Eintauchens die Spannung des Wassers gegen dieselben in der ersten Versuchsreihe — 0,07 (*Zn Cu*), und in der zweiten — 0,09 (*Zn Cu*); innerhalb der nächsten zehn Minuten stieg diese negative Spannung respective auf — 0,17 und — 0,19 (*Zn Cu*).

Als beide Goldstäbchen nach den eben erwähnten Versuchen aus dem Wasser gehoben worden, und, ohne wieder berührt zu sein, einen Tag an der Luft gestanden hatten, betrug die Spannung des Wassers gegen dieselben im Momente des Eintauchens — 0,10 (*Zn Cu*) und erhöhte sich innerhalb der nächsten zehn Minuten bis — 0,19 (*Zn Cu*).

Wurde das frisch polirte Stäbchen aus dem nicht chemisch reinen Golde geglüht*), so erschien die Spannung des Wassers gegen dasselbe beim Eintauchen = — 0,04 (*Zn Cu*), und stieg in 15 Minuten bis — 0,20 (*Zn Cu*).

Die Bewegung des längere Zeit bereits in Wasser eingetauchten Goldstäbchens rief keine erhebliche Aenderung in der Spannung zwischen Wasser und Gold hervor.

*) Beim Glühen war die Spitze des Drahtes geschmolzen; an einer Stelle zeigten sich Flecken von hellrother Bronzefarbe, wohl ein Beweis, dass dieses Goldstäbchen auch nicht frei von Kupfer war.

Digitized by Google

5. Verhalten des Wassers gegen Palladium.

a. Spannung des Wassers gegen frisch geputztes Palladium.

Für den Ort des Palladiums in der Spannungsreihe nehme ich den Bd. IX. S. 45 angegebenen, wonach die Spannung zwischen Kupfer und Palladium = 0,15 (*Zn Cu*) beträgt. Die an der eben citirten Stelle ausgesprochene Ansicht, dass dieser Werth sich nicht sehr von der Wahrheit entfernen werde, erhält durch die nachfolgenden Versuche eine Art von Bestätigung.

Der zu diesen Versuchen angewandte Palladiumdraht war nur 1,4 mm dick; durch die geringe Steifigkeit wurden die Schwierigkeiten des Reinigens und Polirens seiner Oberfläche sehr vermehrt, und es schwankten daher die Messungen der Spannungen, als der möglichst sorgfältig polirte Draht in das Wasser der seitlichen Röhre an der Trichtervorrichtung getaucht wurde, zwischen + 0,03 und + 0,07 (*Zn Cu*). Das Mittel mehrerer Versuche betrug + 0,04 (*Zn Cu*). Mit den vorstehenden Angaben stimmen die Messungen der Spannung an den Polen eines Elementes, das aus zehn Minuten lang eingetauchtem Kupfer, Wasser und eben eintauchendem polirten Palladium gebildet wurde, überein.

Zehn Minuten nach dem Eintauchen des polirten Palladiumdrahtes in das Wasser betrug die Spannung des letzteren gegen das Metall — 0,15 (*Zn Cu*), nach einer halben Stunde — 0,23 (*Zn Cu*) und schien dann in der nächsten Zeit keine merkliche Aenderung weiter zu erleiden.

Die Gesammtänderung, welche sich in der Spannung zwischen Wasser und polirtem Palladium im Verlaufe einer halben Stunde nach dem Eintauchen beobachten liess, stieg also im Durchschnitt auf 0,27 (*Zn Cu*).*)

Das Verhalten des gefeilten Palladiums hat eine gewisse Aehnlichkeit mit dem Verhalten des gefeilten Goldes; beim Eintauchen ist die Spannung des Wassers gegen gefeiltes Palladium nur sehr schwach negativ (— 0,01 bis — 0,03 (*Zn Cu*)); bei geeigneter Beschaffenheit der Oberfläche nimmt dann diese negative Spannung ab, geht sogar bis ins Positive (in einer Versuchsreihe war sie zehn Minuten nach dem Eintauchen bis + 0,03 (*Zn Cu*) gestiegen) und kehrt dann allmälich wieder zum Negati-

*) Gelingt es das Palladium vollkommener zu poliren, als oben im Mittel angenommen wurde, so dass ein höherer Anfangswerth eintritt, so wird selbstverständlich die Gesammtänderung grösser und steigt bis 0,30 (*Zn Cu*).

Digitized by Google

ven zurück, so dass diese negative Spannung nach einer Stunde dieselbe Grösse erreicht, wie beim polirten Palladium. Doch kann auch der Zustand der Oberfläche dergestalt sein, dass die negative Spannung, wie sie beim Eintauchen eintritt, nicht in die positive übergeht, sondern, wenn auch anfangs nur sehr langsam, in dem anfänglichen negativen Sinne weiter wächst; in diesem Falle langt dann die negative Spannung früher auf ihrem Maximum an, als bei der zuvor erwähnten Beschaffenheit der Oberfläche.

Dies Verhalten des gefeilten Palladiums bringt einen eigenthümlichen Gang der Spannung eines aus polirtem Palladium, destillirtem Wasser und gefeiltem Palladium gebildeten Elementes hervor. Beim gleichzeitigen Eintauchen beider Metalle war z. B. in einem Versuche die Spannung dieses Elementes (auf Seiten des polirten Palladiums) $-0{,}07$ ($Zn\,Cu$), ein Werth, der mit den früheren Messungen übereinstimmt, wenn wir die Spannung des Wassers gegen polirtes Palladium $= +0{,}05$ ($Zn\,Cu$), und gegen gefeiltes Palladium $= -0{,}02$ ($Zn\,Cu$) setzen. Da nun die erstere positive Spannung (Wasser gegen polirtes Metall) rasch abnimmt und in die negative übergeht, während die zweite negative (Wasser gegen gefeiltes Metall) sich nahe erhält oder gar in eine positive verwandelt, so muss die anfängliche negative Spannung des obigen Elementes (auf Seite des polirten Metalles) rasch abnehmen und in die positive übergehen, welche letztere bis $+0{,}13$ ($Zn\,Cu$) steigen kann und dann allmälich je nach der Oberflächenbeschaffenheit des gefeilten Metalles in kürzerer oder längerer Zeit verschwindet.

b. Verhalten des zuvor mit Luft oder Wasser in Berührung gewesenen oder geglühten oder bewegten Palladiums.

Wird ein polirter, einige Zeit der Luft ausgesetzt gewesener Palladiumdraht in Wasser getaucht, so ist im Momente des Eintauchens die Spannung des Wassers gegen Palladium sofort negativ ($-0{,}06$ bis $-0{,}09$ ($Zn\,Cu$)). Diese negative Spannung steigt nun im Laufe der Zeit, doch scheint die Zunahme etwas langsamer als bei frisch polirtem Metall zu erfolgen.

Ebenso verhält sich das Wasser gegen Palladium, welches einige Tage zuvor bereits mit Wasser in Berührung und dann der Luft ausgesetzt gewesen ist.

Digitized by Google

Wurde ein zuvor polirter Palladiumdraht heftig in der Flamme eines Bunsen'schen Brenners mit doppeltem Luftzuge geglüht, so zeigte das Wasser beim Eintauchen des Drahtes die Spannung — 0,09 (*Zn Cu*), die in zehn Minuten bis — 0,12 (*Zn Cu*) stieg.

Als der zu dem vorstehenden Versuche benutzte Palladiumdraht von Neuem polirt, und dann eine Zeit lang nur so weit von oben her der Flamme des genannten Brenners genähert wurde, dass er kaum in schwache Rothglühhitze kam und nach dem Abkühlen stark blau angelaufen erschien, so betrug die Spannung des Wassers gegen denselben beim Eintauchen — 0,23 (*Zn Cu*); in zehn Minuten wuchs dieselbe bis — 0,26 (*Zn Cu*).

Die Bewegung ändert die Spannung zwischen Wasser und einem bereits zehn Minuten lang eingetauchten Stück Palladium nicht.

6. Verhalten des Wassers gegen Neusilber.

a. Verhalten des Wassers gegen frisch geputztes Neusilber.

Von demselben Neusilberbleche, aus welchem die Bd. IX. S. 47 beschriebene und zur Bestimmung des Ortes dieses Metalles in der Spannungsreihe benutzte Platte angefertigt war, wurden zwei Stückchen für die Ermittelung der Spannung des Wassers gegen diese Legirung verwendet.

Die Spannung des Wassers gegen polirtes Neusilber betrug

beim Eintauchen = + 0,08 (*Zn Cu*)

10 Minuten nach dem „ = — 0,21 „

Die Aenderung, welche die beim Eintauchen auftretende Spannung zwischen Wasser und polirtem Neusilber innerhalb zehn Minuten erfährt, steigt hiernach auf 0,29 (*Zn Cu*). Eine directe Messung, bei welcher zehn Minuten nach dem Eintauchen eines ersten polirten Stückes Neusilber ein zweites eingetaucht wurde, gab für diese Aenderung den Werth 0,30 (*Zn Cu*).

Uebrigens erfolgt diese Aenderung beim Neusilber sehr rasch. Schon vor Verlauf von $^3/_4$ Minuten nach dem Eintauchen ist die positive Spannung verschwunden, und bereits innerhalb fünf Minuten scheint die eintretende negative Spannung für eine längere Zeit ihren grössten Werth erreicht zu haben, indem sich in den hierauf folgenden nächsten Minuten

Digitized by Google

selbst bis zum Verlauf einer Stunde, keine merkliche Aenderung wahrnehmen lässt.

Indess ist, obschon nach einstündigem Eintauchen die Oberfläche des Neusilbers bereits bräunlich aussieht*), doch die Aenderung in der Spannung zwischen Wasser und Neusilber noch nicht vollendet. Nach 20stündigem Eintauchen erscheint vielmehr das Neusilber dem Kupfer gleich; zu dieser Zeit beträgt die Spannung eines aus Kupfer, Wasser und Neusilber gebildeten Elementes höchstens noch $+ 0{,}005$ (*Zn Cu*). Nehmen wir an, dass die Spannung dieses Elementes zuletzt = Null wird, so muss die Spannung zwischen Wasser und Neusilber genau gleich und entgegengesetzt der Summe der Spannungen zwischen Neusilber und Kupfer, und Kupfer und Wasser (vergl. S. 608), also $= - 0{,}33$ (*Zn Cu*) sein.

Das gefeilte Neusilber verhält sich beim Eintauchen ins Wasser dem polirten Metalle fast gleich, was man am besten durch gleichzeitiges Eintauchen eines polirten und gefeilten Metallstückes erkennt. Ein derartiger Versuch gibt durch seinen weitern Verlauf über die verschiedene Geschwindigkeit, mit welcher die Aenderungen an den beiden Oberflächenzuständen erfolgen, Aufschluss.

Während, wie so eben erwähnt, beim gleichzeitigen Eintauchen eines polirten und eines gefeilten Neusilberstückes fast gar keine Spannung eintrat, erschien schon nach $^3/_4$ Minute eine Spannung $= + 0{,}13$ (*Zn Cu*), die nach $1^1/_2$ Minute auf $+ 0{,}10$ (*Zn Cu*) und bereits sechs Minuten nach dem Eintauchen auf Null gesunken war. Wie das Vorzeichen angibt, erfolgte die Spannung in dem Sinne, als ob anstatt des gefeilten Neusilbers ein Zinkstück eingetaucht worden wäre. Hieraus folgt nun, dass während beim Kupfer und Platin die Aenderungen der Spannung auf dem gefeilten Metalle rascher verlaufen, als auf dem polirten, beim Neusilber, ähnlich wie beim Golde und Palladium, der umgekehrte Fall eintritt. Eben dieses Verhalten des gefeilten Neusilbers ging auch aus den Beobachtungen der Spannungen an den Polen zweier Elemente hervor, von denen das eine aus zehn Minuten lang mit Wasser in Berührung befindlichem Kupfer und später eingetauchtem polirten Neusilber, das zweite aus eben diesem Kupfer und später eingetauchtem gefeilten Neusilber bestand.

*) Die bräunliche Schicht lässt sich durch Abwischen mit Papier entfernen.

Digitized by Google

b. Verhalten des zuvor mit Luft oder Wasser in Berührung gewesenen oder bewegten Neusilbers.

Die Spannung des Wassers gegen Neusilber, das nach dem Poliren einige Zeit der Luft ausgesetzt gewesen ist, erscheint sofort negativ, nach 14tägigem Aussetzen an die Luft $= -0{,}11$ (*Zn Cu*), nach sechswöchentlichem $= -0{,}19$ (*Zn Cu*), und steigt dann innerhalb zehn Minuten auf $-0{,}22$ bis $-0{,}24$ (*Zn Cu*).

Wird aber Neusilber, das nach dem Poliren zehn Minuten in Wasser getaucht und dann einige Tage an die Luft gestellt worden, wieder in Wasser getaucht, so erscheint im Augenblicke des Eintauchens die Spannung des Wassers gegen dasselbe, ähnlich wie unter gleichen Umständen beim Kupfer (S. 622), beträchtlich in negativem Sinne erhöht; sie stieg in einem Versuche bis $-0{,}39$ (*Zn Cu*); diese hohe negative Spannung verminderte sich aber, ebenso wie beim Kupfer, und betrug nach zehn Minuten nur noch $-0{,}25$ (*Zn Cu*).

Durch Bewegung scheint die Spannung zwischen Wasser und bereits zehn Minuten lang eingetauchtem Neusilber nicht geändert zu werden; sollte eine solche vorhanden sein, so ist sie jedenfalls geringer als 0,01 (*Zn Cu*).

7. Verhalten des Wassers gegen Messing.

a. Verhalten des frisch geputzten Metalles.

Aus demselben dicken Messingbleche, welches die Bd. IX. S. 48 zur Bestimmung des Ortes dieser Legirung in der Spannungsreihe benutzte Condensatorplatte geliefert hatte, wurden zwei Stäbchen geschnitten, um sie für die Ermittelung der Spannung zwischen Wasser und diesem Messing zu verwenden.

Sowohl aus Beobachtungen, bei welchen eines dieser Stäbchen mit polirter Oberfläche in das Wasser der seitlich an der Trichtervorrichtung befindlichen Röhre getaucht wurde, als auch aus den Messungen der Spannungen eines aus Kupfer, Wasser und Messing gebildeten Elementes ergab sich im Mittel für die Spannung des Wassers gegen polirtes Messing beim Eintauchen $= +0{,}08$ (*Zn Cu*)

zehn Minuten nach dem „ $= -0{,}28$ „

während die Spannung dieses Wassers gegen Kupfer zehn Minuten nach dem Eintauchen — 0,08 (*Zn Cu*) betrug.

Die Aenderung der Spannung tritt gleich nach dem Eintauchen des polirten Metalles sehr stark ein, so dass die Aenderung innerhalb $^3/_4$ Minute bis 0,21 (*Zn Cu*) steigt, die Spannung des Wassers gegen Messing innerhalb dieser Zeit also bereits den Werth — 0,13 (*Zn Cu*) erreicht.

Indess ist die Aenderung innerhalb zehn Minuten noch nicht ganz vollendet, sondern schreitet noch etwas vorwärts. Ein Element aus polirtem Kupfer und polirtem Messing zeigt eine halbe Stunde nach dem Eintauchen nur eine sehr geringe Spannung, und eine Stunde nach demselben keine Spannung mehr. Da nun die Spannung eines solchen Elementes, wenn das polirte Messing zehn Minuten nach dem Kupfer eingetaucht wird, im Momente des Eintauchens = + 0,38 (*Zn Cu*) ist, so beträgt die Gesammtänderung der Spannung zwischen Wasser und polirtem Messing 0,38 (*Zn Cu*).

Aus der vorstehenden Angabe, dass eine Stunde nach dem Eintauchen in Wasser das Messing dem Kupfer gleich erscheint, folgt, dass die Spannung des Wassers gegen Messing um diese Zeit gerade um die Spannung des Kupfers gegen Messing, also um 0,22 (*Zn Cu*) grösser ist, als die des Wassers gegen Kupfer.

Die beim Eintauchen des gefeilten Messings in Wasser eintretenden Erscheinungen gleichen den beim Eintauchen des Neusilbers berichteten Vorgängen. Beim Eintauchen selbst ist die positive Spannung des Wassers gegen gefeiltes Messing nur wenig geringer als gegen polirtes; in den darauf folgenden nächsten Minuten erfolgt aber die Aenderung in dieser Spannung, ebenso wie bei Gold, Palladium und Neusilber, langsamer als beim polirten Metall; nach zwei Minuten ist die negative Spannung des Wassers gegen gefeiltes Messing um ungefähr 0,06 (*Zn Cu*) kleiner als die zu gleicher Zeit zwischen Wasser und polirtem Messing vorhandene Spannung. Auf diesem Werthe erhält sich die Spannung zwischen Wasser und gefeiltem Messing mehrere Minuten fast ungeändert, und beginnt dann erst langsam bis zu der zuvor beim polirten Messing angegebenen Grösse zu steigen.

Eben diese Erscheinungen traten bei einer anderen Messingsorte, bei zwei runden einem dicken Messingdrahte entnommenen Stäbchen ein. Zum besseren Verständniss des Vorstehenden mögen hier einige mit diesen Stäbchen erhaltene specielle Resultate folgen.

Digitized by Google

1	Minute	nach	dem	Eintauchen	$= +0,12$	$(Zn\,Cu)$
3	,,	,,	,,	,,	$= +0,07$	,,
5	,,	,,	,,	,,	$= +0,09$	,,
10	,,	,,	,,	,,	$= +0,10$	,,
15	,,	,,	,,	,,	$= +0,11$	,,
38	,,	,,	,,	,,	$= +0,06$	,,
1	Stunde	,,	,,	,,	$= 0,00$	,,

Die Ausschläge des Elektrometers erfolgten, wie die Zeichen lehren, in dem Sinne, als ob man zuerst anstatt des polirten, später aber anstatt des gefeilten Messings ein Zinkstück eingetaucht hätte.

b. Verhalten des mit Luft oder Wasser in Berührung gewesenen oder bewegten Messings.

Wenn Messing nach dem Poliren einige Zeit an der Luft gestanden hat, so erscheint beim Eintauchen sofort eine negative Spannung des Wassers gegen Messing; nach 14tägigem Aussetzen an die Luft betrug sie $-0,11$ $(Zn\,Cu)$, nach 6wöchentlichem war sie bis $-0,16$ $(Zn\,Cu)$ gewachsen. Im Verlauf von zehn Minuten nach dem Eintauchen stieg dieselbe in den beiden Versuchen resp. bis $-0,22$ und $-0,26$ $(Zn\,Cu)$.

Ist polirtes Messing zehn Minuten lang in Wasser getaucht und dann wieder einige Zeit der Luft ausgesetzt worden, so tritt beim Eintauchen eine Spannung des Wassers gegen das genannte Metall in der Höhe von $-0,20$ $(Zn\,Cu)$ auf, die nach zehn Minuten bis $-0,28$ $(Zn\,Cu)$ steigt. Als ein Messingstück längere Zeit in Wasser getaucht gewesen und dann fast drei Wochen wieder an der Luft gestanden hatte, zeigte sich dieselbe Erscheinung wie beim Kupfer; es trat beim Eintauchen eine Spannung des Wassers gegen Messing $= -0,40$ $(Zn\,Cu)$ ein, die innerhalb zehn Minuten bis zu $-0,28$ $(Zn\,Cu)$ herabsank.

Ebenso wie beim Neusilber scheint durch Bewegung die Spannung zwischen Wasser und bereits zehn Minuten lang eingetauchtem Messing nicht geändert zu werden.

8. Verhalten des Wassers gegen Eisen.

a. Verhalten des frisch geputzten Metalles.

Leider waren bei Anfertigung der Bd. IX. S. 41 beschriebenen Eisenplatte die Abfälle nicht aufbewahrt worden, so dass ich zur Be-

Digitized by Google

Kupferstückes ein polirtes Eisenstäbchen eingetaucht, so ist die Spannung dieses Elementes beim Eintauchen des Eisens $= +0{,}34$ $(Zn\,Cu)$, und zehn Minuten später $= +0{,}51$ $(Zn\,Cu)$. Wird nun die Spannung zwischen Wasser und Kupfer $= -0{,}08$ $(Zn\,Cu)$, und $(Fe\,Cu) = +0{,}16$ $(Zn\,Cu)$ gesetzt, so folgt aus den zuvor angeführten Zahlen die Spannung zwischen Wasser und Eisen im Momente des Eintauchens $= +0{,}16$ $(Zn\,Cu)$ und zehn Minuten später $= +0{,}27$ $(Zn\,Cu)$: Werthe, welche mit den S. 647 gemachten Angaben nahe übereinstimmen.

Uebrigens ist, wie man nach dem eben Gesagten leicht vermuthen wird, das Wachsen der positiven Spannung zwischen Wasser und Eisen innerhalb zehn Minuten noch keineswegs beendigt, und hängt überhaupt die Schnelligkeit, mit welcher jenes Wachsen eintritt, gar sehr von der Beschaffenheit der polirten Metallfläche und des Wassers ab. Als z. B. zu einer anderen Zeit in Wasser, in welches bereits zehn Minuten lang ein Kupferstück eingetaucht war, das zu den früheren Messungen benutzte, jetzt wieder frisch polirte Eisenstäbchen eingesenkt wurde, fand ich die Spannung dieses Elementes

		beim Eintauchen	$= +0{,}33$ $(Zn\,Cu)$
10 Minuten	nach dem	„	$= +0{,}40$ „
22 „	„	„	$= +0{,}43$ „
1 Stunde	„	„	$= +0{,}49$ „ etc.

woraus ein viel langsameres und selbst innerhalb einer Stunde geringeres Steigen als zuvor in zehn Minuten folgt. Bei noch längerer Berührung des Eisens mit dem Wasser würde die Spannung noch etwas gestiegen sein.*)

Da, wie bereits erwähnt, die mit dem Wasser in Berührung gebrachten Eisenstäbchen nicht von derselben Masse stammten, welcher die eiserne Condensatorplatte entnommen war, so hielt ich es für nothwendig, noch eine andere Eisensorte mit den bisher benutzten Stäbchen zu vergleichen. Als ein aus einer beliebigen Eisenmasse stammendes Eisenstäbchen gleichzeitig mit dem zuvor benutzten in Wasser getaucht wurde, zeigte dies Element im Momente des Eintauchens so gut wie keine Spannung; später entwickelte sich aber eine solche, die innerhalb

*) Die grössere oder geringere Geschwindigkeit in der Aenderung der Spannung des Wassers gegen das Eisen hängt unmittelbar von der Geschwindigkeit des Eintritts und der Zunahme der Oxydation ab, wie dies auch die weiter unten berichteten Beobachtungen am Stahl nachweisen.

Digitized by Google

allmälich verringert, und sogar in eine beträchtlich hohe negative verwandelt.

Die Spannung des Wassers gegen ein 14 Tage der Luft ausgesetztes Eisen betrug beim Eintauchen — 0,10 (*Zn Cu*), nach $^3/_4$ Minute + 0,15 (*Zn Cu*) u. s. w. Die Spannung des Wassers gegen ein vier Wochen mit der Luft in Berührung gewesenes Eisen war

im Momente des Eintauchens	— 0,16	(*Zn Cu*)
$^3/_4$ Minute nach dem Eintauchen	+ 0,06	,,
$1^1/_2$,, ,, ,, ,,	+ 0,13	,,
.	.	
.	.	
20 ,, ,, ,, ,,	+ 0,25	,,

Ist das Eisen früher bereits einige Zeit mit Wasser in Berührung gewesen, so erscheint die anfängliche negative Spannung noch grösser. Nachdem das zu dem vorstehenden ersten Versuche benutzte Eisenstäbchen nach dem Herausheben aus dem Wasser, in welches es ungefähr eine Viertelstunde eingetaucht gewesen war, 14 Tage lang an der Luft gestanden und sich mit einzelnen Roststreifen bedeckt hatte, fand ich die Spannung des Wassers gegen dasselbe

beim Eintauchen	— 0,23	(*Zn Cu*)
$^3/_4$ Minute nach dem ,,	— 0,11	,,
$1^1/_2$,, ,, ,, ,,	— 0,03	,,
$2^1/_4$,, ,, ,, ,,	+ 0,05	,,
.	.	
.	.	
10 ,, ,, ,, ,,	+ 0,19	,,
20 ,, ,, ,, ,,	+ 0,19	,,

Nach Beendigung dieser Versuchsreihe wurde das Eisenstäbchen wieder 14 Tage lang der Luft ausgesetzt; die Spannung des Wassers gegen dasselbe betrug beim Eintauchen — 0,29 (*Zn Cu*)

$^3/_4$ Minute nach dem ,,	— 0,21	,,
$1^1/_2$,, ,, ,, ,,	— 0,17	,,
.	.	
.	.	
10 ,, ,, ,, ,,	+ 0,17	,,

Zwei bereits früher mit dem Wasser einige Zeit in Berührung gewesene Eisenstäbchen wurden von Neuem eingetaucht, und erschienen nach mehreren Minuten in ihrem Verhalten gegen Wasser genau gleich. Als nun das eine derselben in Umdrehung gesetzt wurde, entstand eine Spannung 0,08 (*Zn Cu*) in dem Sinne, als ob an Stelle des bewegten

Digitized by Google

einer bis zwei Minuten auf + 0,17 (*Zn Cu*), welcher Werth auch noch zehn Minuten fortbestand. Im Augenblicke des Eintauchens war also die Spannung des Wassers gegen Schmiedeeisen und gegen Gusseisen gleich gross (nach S. 647 + 0,09 (*Zn Cu*)); dagegen wuchs bei fortdauernder Berührung die positive Spannung des Wassers gegen Gusseisen rascher als gegen Schmiedeeisen, so dass zehn Minuten nach dem Eintauchen erstere + 0,44 (*Zn Cu*) betrug, wenn letztere nach S. 647 = 0,27 (*Zn Cu*) gesetzt wird.

Zu sehr nahe denselben Werthen führte die Messung der Spannung eines Elementes aus Kupfer, Wasser und Gusseisen. Als zehn Minuten nach dem Einsenken eines Kupferstückes in Wasser ein frisch polirtes Stück Gusseisen eingetaucht wurde, fand ich die Spannung + 0,33 (*Zn Cu*); dieselbe stieg in zehn Minuten bis + 0,70 (*Zn Cu*). Hieraus folgt die Spannung des Wassers gegen Gusseisen beim Eintauchen + 0,09 (*Zn Cu*) und zehn Minuten später + 0,46 (*Zn Cu*).

d. Verhalten des Wassers gegen Stahl.

Die zu den folgenden Messungen verwandten Stahlstäbe bestanden aus rundem Gussstahl von fast 4 mm Dicke. Einige derselben wurden in dem Zustande, welchen sie durch ihre Verfertigung angenommen hatten, belassen, andere dagegen wurden gehärtet (glashart).

Die Spannung des Wassers gegen glasharten polirten Stahl fand ich beim Eintauchen der Spannung des Wassers gegen polirtes Eisen nahe gleich;*) sie betrug je nach den Umständen + 0,06 bis + 0,09 (*Zn Cu*). Sofort nach dem Eintauchen begann aber diese positive Spannung abzunehmen, kam binnen wenigen Minuten fast zum Verschwinden oder ging sogar in eine schwache negative über. Dieser Zustand dauerte fort, so lange der Stahl blank erschien; so blieb die Spannung z. B. in einer Versuchsreihe während 1¼ Stunde = — 0,02 (*Zn Cu*), und war nach 18 Stunden, in welcher Zeit der Stahlstab sich schwach zu oxydiren begonnen hatte, bis + 0,08 wieder gestiegen.

*) Die Stellung des gehärteten Stahles (überhaupt des Gussstahles) in der Spannungsreihe war nicht bestimmt worden; ich habe dieselbe namentlich auch mit Rücksicht auf sein Verhalten beim Eintauchen in Wasser gleich der des Eisens genommen; die obigen Werthe sind also erhalten, indem ich die Spannung des Stahles gegen Kupfer = + 0,16 (*Zn Cu*) setzte.

Digitized by Google

Das gefeilte Wismuth verhält sich beim Eintauchen dem polirten nicht gleich, sondern das Wasser zeigt gleich beim Eintauchen des gefeilten Metalles eine um 0,10 bis 0,12 (*Zn Cu*) grössere negative Spannung als beim Eintauchen des polirten. Am directesten gewinnt man dies Resultat durch gleichzeitiges Eintauchen eines polirten und eines gefeilten Wismuthstückes in destillirtes Wasser. Nach S. 603 beträgt die Spannung einer gefeilten Wismuthplatte gegen Kupfer nur 0,18 (*Zn Cu*), ist also um 0,12 (*Zn Cu*) geringer als die des polirten Wismuths gegen Kupfer.

Sehr bald nach dem Eintauchen eines aus polirtem und gefeiltem Wismuth bestehenden Elementes wird die Spannung desselben gleich Null, so dass also auch die Spannung des Wassers gegen gefeiltes Wismuth zehn Minuten nach dem Eintauchen — 0,20 (*Zn Cu*) beträgt.

b. Verhalten des mit Luft oder Wasser in Berührung gewesenen oder bewegten Wismuths.

Durch Aussetzen des Wismuths an die Luft wird die negative Spannung des Wassers gegen dasselbe beträchtlich erhöht. Als ein Wismuthstäbchen 14 Tage lang an der Luft gestanden hatte, betrug die Spannung des Wassers gegen dasselbe im Momente des Eintauchens — 0,16 (*Zn Cu*); gegen ein sechs Wochen an der Luft gestandenes Wismuthstäbchen fand ich dieselbe beim Eintauchen — 0,18 (*Zn Cu*), und zehn Minuten nach dem Eintauchen war diese Spannung in beiden Fällen bis — 0,21 (*Zn Cu*) gestiegen.

Noch weiter erhöht wird die negative Spannung, wenn das Wismuth zuvor einige Zeit in Wasser eingetaucht und dann wieder der Luft ausgesetzt worden ist. Unter solchen Umständen betrug die Spannung des Wassers gegen Wismuth im Momente des Eintauchens — 0,26 (*Zn Cu*), und behielt diesen Werth bis zehn Minuten nach dem Eintauchen fast ungeändert bei. Gegen ein anderes zuvor in Wasser getauchtes und dann einige Zeit der Luft ausgesetztes Wismuthstück zeigte das Wasser beim Eintauchen die Spannung — 0,25 (*Zn Cu*); dieselbe nahm in einer halben Stunde bis — 0,22 (*Zn Cu*) ab.

Durch Bewegung des zehn Minuten lang eingetauchten polirten Wismuths wird die Spannung des Wassers gegen dasselbe nicht geändert.

Digitized by Google

wesen, und in noch höherem Grade, wenn das Metall zuvor zehn Minuten in Wasser getaucht gewesen ist und darauf wieder an der Luft gestanden hat. Sofort nach dem Eintauchen nimmt aber diese negative Spannung ab, so dass sie je nach der Grösse des Anfangswerthes sich dem Verschwinden nähert oder auch selbst in eine sehr schwache positive übergeht. Nach wenigen Minuten beginnt schliesslich die negative Spannung wieder zu wachsen und sich dem Werthe — 0,06 (*Zn Cu*) zu nähern.

So war bei einem polirten und sechs Tage lang der Luft ausgesetzten Antimon die Spannung des Wassers gegen dasselbe

beim Eintauchen		— 0,01	(*Zn Cu*)
¾ Minute nach dem	„	+ 0,01	„
1½ „ „ „	„	0,00	„
10 „ „ „	„	— 0,04	„

Gegen ein gleich lange der Luft ausgesetztes gefeiltes Antimon zeigte Wasser die Spannung

beim Eintauchen		— 0,04	(*Zn Cu*)
¾ Minute nach dem	„	— 0,02	„
1½ „ „ „	„	— 0,02	„
10 „ „ „	„	— 0,05	„

Als beide Metallstücke nach dem Herausheben aus dem Wasser wieder drei Tage an der Luft gestanden hatten, betrug die Spannung des Wassers im Momente des Eintauchens gegen das polirte Metall — 0,06 (*Zn Cu*), und gegen das gefeilte Metall — 0,08 (*Zn Cu*). Beide Spannungen nahmen in einer Minute bis — 0,01 (*Zn Cu*) ab; nach 10 Minuten betrugen dieselben resp. — 0,01 und — 0,03 (*Zn Cu*).

Eine Bewegung des Antimons im Wasser ändert die Spannung des Wassers gegen dieses Metall nicht.

11. Verhalten des Wassers gegen Zinn.

a. Verhalten des frisch geputzten Metalles.

Die zu den nachfolgenden Versuchen benutzten Stäbchen waren den Zinnstangen entnommen, welche das Material zum Guss der oben S. 600 beschriebenen Condensatorplatte geliefert hatten.

Digitized by Google

tauchen die Spannung des Wassers gegen das genannte Metall negativ, und zwar um so stärker, je länger das Metall mit Luft und Wasser in Berührung gewesen ist. Die zehn Minuten nach dem Eintauchen vorhandene negative Spannung ist ebenfalls beträchtlich grösser als in gleichem Zeitmomente bei frisch polirtem Metall; dagegen ist der Betrag der innerhalb der ersten zehn Minuten in dieser Spannung eintretenden Aenderung geringer als bei dem frisch polirten Metall.

Gegen ein polirtes und ein gefeiltes seit sechs Tagen der Luft ausgesetztes Zinnstück betrug die Spannung des Wassers beim Eintauchen resp. — 0,08 und — 0,09 (*Zn Cu*), und stieg in zehn Minuten bis resp. — 0,22 und — 0,20 (*Zn Cu*).

Nachdem beide Metallstücke nach dem Herausheben aus dem Wasser wieder drei Tage an der Luft gestanden, war die Spannung des Wassers gegen dieselbe beim Eintauchen resp. — 0,22 und — 0,21 (*Zn Cu*), und stieg in zehn Minuten bis — 0,27 (*Zn Cu*).

Nach noch längerer Berührung mit Luft und Wasser steigt die negative Spannung des Wassers gegen das Metall noch höher. Gegen gefeiltes Zinn, das sechs Wochen an der Luft gestanden, betrug die Spannung des Wassers beim Eintauchen — 0,29 (*Zn Cu*), und stieg in zwanzig Minuten bis — 0,40 (*Zn Cu*).

Als ein Zinnstück einen Tag in Wasser gestanden und darauf zwei Tage noch der Luft ausgesetzt gewesen war, ergab sich die Spannung des Wassers gegen dasselbe beim Eintauchen = — 0,27 (*Zn Cu*) und stieg dann in zehn Minuten bis — 0,36 (*Zn Cu*). Gegen ein vier Tage lang in Wasser gestandenes Zinnstück fand ich die Spannung des Wassers einige Zeit nach dem Eintauchen sogar bis gegen — 0,50 (*Zn Cu*) gestiegen.

Die Bewegung eines zehn Minuten lang eingetauchten Zinnstückes ändert die negative Spannung des Wassers gegen dasselbe entweder gar nicht oder vergrössert sie höchstens um 0,01 (*Zn Cu*).

12. Verhalten des Wassers gegen Blei.

a. Verhalten des frisch gefeilten Metalles.

Da das Blei sich seiner Weichheit halber nicht poliren lässt, so habe ich nur das Verhalten des gefeilten Bleis in Wasser untersucht. Die folgenden Angaben sind unter Zugrundlegung der Bd. IX. S. 51 über die

Digitized by Google

Die Spannung des Wassers gegen Kadmium erscheint bereits beim Eintauchen stark negativ; es war im Mittel mehrerer Versuche ($Aq\,Cd$) $= -0{,}16$ ($Zn\,Cu$). Diese negative Spannung wächst langsam und erreicht nach zehn Minuten den Werth $-0{,}24$ ($Zn\,Cu$); auch nach 22stündiger Berührung des Wassers mit dem Kadmium war sie nur bis $-0{,}27$ ($Zn\,Cu$) gestiegen. Die Aenderung, welche innerhalb der ersten zehn Minuten nach dem Eintauchen beobachtet wird, ist also nicht beträchtlich.

Gefeiltes Kadmium zeigt gegen Wasser im Momente des Eintauchens die Spannung von $-0{,}22$ ($Zn\,Cu$).

b. Verhalten des mit Luft oder Wasser in Berührung gewesenen oder bewegten Kadmiums.

Die Spannung des Wassers gegen ein polirtes, 14 Tage lang der Luft ausgesetzt gewesenes Kadmiumstäbchen betrug beim Eintauchen $-0{,}20$ ($Zn\,Cu$) und stieg dann in 10 Minuten bis $-0{,}25$ ($Zn\,Cu$).

Als dasselbe Stäbchen nach dem Herausheben aus dem Wasser mehrere Wochen der Luft ausgesetzt gewesen, fand ich beim Eintauchen die Spannung des Wassers gegen dasselbe $= -0{,}16$ ($Zn\,Cu$), und diese Spannung blieb im Laufe der nächsten zehn Minuten ungeändert.

In einer anderen Versuchsreihe betrug die Spannung des Wassers gegen ein polirtes und ein gefeiltes Kadmiumstück, welche beide sechs Tage der Luft ausgesetzt gewesen waren, beim Eintauchen resp. $-0{,}20$ und $-0{,}17$ ($Zn\,Cu$), und stieg in zehn Minuten resp. bis $-0{,}22$ und $-0{,}27$ ($Zn\,Cu$), und bei der gefeilten Oberfläche in ½ Stunde bis $-0{,}29$ ($Zn\,Cu$). Nachdem beide Metallstücke nach dem Herausheben aus dem Wasser wieder drei Tage an der Luft gestanden hatten, betrug die Spannung des Wassers gegen dieselben beim Eintauchen resp. $-0{,}18$ und $-0{,}21$ ($Zn\,Cu$), und zehn Minuten später resp. $-0{,}23$ und $-0{,}21$ ($Zn\,Cu$).

Als das polirte Stück Kadmium einen Tag lang im Wasser gestanden hatte und dann noch zwei Tage der Luft ausgesetzt worden, wodurch seine Oberfläche sich stellenweis stark oxydirt hatte, fand ich beim Eintauchen die Spannung des Wassers $-0{,}28$ ($Zn\,Cu$); in zehn Minuten sank dieselbe bis $-0{,}18$ ($Zn\,Cu$). Gegen ein auf gleiche Weise behandeltes gefeiltes Kadmiumstück, das nur streifenweis und im Ganzen weniger oxydirt erschien als das polirte, betrug die Spannung des Was-

Digitized by Google

nute in + 0,02 (*Zn Cu*) übergegangen war; innerhalb zehn Minuten stieg diese positive Spannung noch weiter bis + 0,07 (*Zn Cu*).

Nach den vorstehenden Angaben lassen sich leicht die Spannungen berechnen, welche ein aus Kupfer, Wasser und Zink gebildetes Element in den verschiedenen Zeitpunkten zeigen muss. Wird gleichzeitig polirtes Kupfer und polirtes Zink in destillirtes Wasser getaucht, so wirken die Spannungen (*Aq Cu*) = + 0,09 und (*Aq Zn*) = — 0,16 (*Zn Cu*) der Spannung (*Zn Cu*) entgegen, und die resultirende Spannung beträgt + 0,75 (*Zn Cu*). Dagegen wirkt zehn Minuten nach dem Eintauchen nur die Spannung zwischen Wasser und Zink, die nahe wieder — 0,16 (*Zn Cu*) beträgt, der Spannung (*Zn Cu*) entgegen, während die Spannung zwischen Wasser und Kupfer, im Betrage von — 0,08 (*Zn Cu*) sich zu der Spannung (*Zn Cu*) addirt, so dass für diesen Zeitpunkt eine Spannung des Elementes = + 0,92 (*Zn Cu*) resultirt. Wenn die Beschaffenheit des Zinks und des Wassers derartig ist, dass die Spannung des Wassers gegen das Zink zehn Minuten nach dem Eintauchen noch etwas über — 0,20 (*Zn Cu*) bleibt, so ist natürlich die Spannung des Elementes Zink-Wasser-Kupfer etwas geringer, und steigt nur bis 0,84 (*Zn Cu*). Wird gleichzeitig polirtes Kupfer und gefeiltes Zink in Wasser getaucht, so wird die resultirende Spannung beim Eintauchen noch geringer als zuvor, sie beträgt nur gegen + 0,63 (*Zn Cu*).

b. Verhalten des mit Luft und Wasser in Berührung gewesenen und bewegten Zinks.

Gegen ein polirtes und ein gefeiltes Zinkstück, welche beide sechs Tage an der Luft gestanden hatten, betrug die Spannung des Wassers beim Eintauchen resp. — 0,32 und — 0,39 (*Zn Cu*), und nahm dann innerhalb zehn Minuten resp. bis — 0,26 und — 0,23 (*Zn Cu*) ab.

Nachdem beide Metallstücke nach dem Herausheben aus dem Wasser wieder drei Tage an der Luft gestanden, ergab sich die Spannung des Wassers gegen dieselben beim Eintauchen resp. zu 0,38 und 0,45 (*Zn Cu*); dieselbe sank innerhalb zehn Minuten bei beiden Metallen bis — 0,22 (*Zn Cu*). Ein noch längeres Eintauchen würde die negative Spannung noch weiter vermindert haben.

Wird ein Stück Zink, das zehn Minuten bereits in Wasser eingetaucht gewesen, aus dem Wasser herausgehoben, und unmittelbar darauf

Digitized by Google

mentlich in den Anfangswerthen zur Folge haben muss, und bei der daraus entspringenden Unsicherheit über den jeder einzelnen Rechnung zu Grunde zu legenden Werth der Spannungen ($AlZn$) oder ($AlCu$) scheint es mir angemessen, die unmittelbaren Beobachtungsdata mitzutheilen; ich erinnere nur noch daran, dass (nach S. 602) die Spannung ($AlCu$) bei möglichst polirtem Aluminium bis 1,20 ($ZnCu$) stieg.

Als zehn Minuten nach dem Einsenken eines polirten Kupferstäbchens ein gefeiltes Stück Aluminium in Wasser getaucht wurde, betrug die Spannung dieses Elementes

beim Eintauchen		+ 1,03	($ZnCu$)
¾ Minute	nach dem	+ 0,88	„
1½ „	„ „	+ 0,82	„
10 „	„ „	+ 0,59	„
20 „	„ „	+ 0,54	„
24 Stunden	„ „	+ 0,30	„ *)

Setzen wir nun die Spannung des Wassers gegen Kupfer $= -0{,}08$ ($ZnCu$), und $(AlCu) = 1{,}20$ ($ZnCu$), so ergeben sich aus den vorstehenden Messungen die Spannungen zwischen Wasser und Aluminium

beim Eintauchen		− 0,25	($ZnCu$)
¾ Minute	nach dem	− 0,40	„
1½ „	„ „	− 0,46	„
10 „	„ „	− 0,69	„
20 „	„ „	− 0,74	„
24 Stunden	„ „	− 0,98	„

In einem ähnlichen Versuche, wobei eine andere Sorte destillirten Wassers zur Verwendung kam, betrug die Spannung auf der Kupferseite des Elementes

beim Eintauchen		+ 0,94	($ZnCu$)
¾ Minute	nach dem	+ 0,79	„
10 „	„ „	+ 0,37	„
2 Stunden	„ „	+ 0,28	„
.		.	
.		.	

Die Aenderungen in der Spannung zwischen Wasser und Aluminium erfolgten also in diesem Wasser schneller, und wahrscheinlich ist auch

*) Das Kupfer war zehn Minuten vor dieser Messung frisch polirt und eingetaucht worden, während das Aluminium unausgesetzt mit dem Wasser in Berührung geblieben.

Digitized by Google

Die eben angeführte Spannung beim Eintauchen änderte sich nicht, als der Versuch nach 24 Stunden wiederholt wurde, während welcher Zeit das gefeilte Aluminium unausgesetzt mit dem Wasser in Berührung gestanden hatte; sie stimmt nahe mit dem oben erhaltenen Werthe überein, und scheint also nahe das Maximum der Aenderung zu sein, das zu beobachten möglich ist.

b. Verhalten des mit Luft oder Wasser in Berührung gewesenen oder bewegten Aluminiums.

Hat gefeiltes Aluminium längere Zeit an der Luft gestanden, so zeigt sich die Spannung des Wassers gegen dasselbe gleich beim Eintauchen sehr stark negativ. Dieselbe betrug bei einem Aluminiumstück, das nach dem Feilen 14 Tage der Luft ausgesetzt gewesen war, — 0,65 (*Zn Cu*) und stieg in zehn Minuten bis — 0,74 (*Zn Cu*).

Als eben dieses Stück nach dem Herausheben aus dem Wasser mehrere Wochen an der Luft gestanden hatte, betrug die Spannung des Wassers gegen dasselbe beim Eintauchen — 0,78 (*Zn Cu*) und wuchs in zehn Minuten bis — 0,87 (*Zn Cu*).

Bei einem anderen Aluminiumstück, das nach dem Feilen sechs Wochen mit der Luft in Berührung gewesen war, betrug die Spannung des Wassers gegen dasselbe beim Eintauchen — 0,82 (*Zn Cu*) und erreichte schon in zehn Minuten die Höhe von — 0,97 (*Zn Cu*), also den Werth, den gleich nach dem Feilen eingetauchtes Aluminium erst nach Verlauf von mehreren Stunden zeigte.

Ist ein gefeiltes Aluminiumstück einige Zeit in Wasser eingetaucht, so erfährt die Spannung des Wassers gegen Aluminium durch Bewegen des letzteren keine Aenderung.

16. Verhalten des Wassers gegen Kohle.

a. Verhalten des Cokes aus Gasretorten.

Dünne Stäbchen aus möglichst dichtem Gascoke wurden einige Zeit in Wasser gelegt, und dann durch längeres Aussetzen an die Luft wieder getrocknet.

Als zehn Minuten nach dem Einsenken eines frisch polirten Kupferstäbchens ein solches Cokestück in destillirtes Wasser getaucht wurde, so

Digitized by Google

betrug die Spannung dieses Elementes im Momente des Eintauchens in einem speciellen Falle — 0,24 (*Zn Cu*); nach ¾ Minuten war sie bis — 0,21 (*Zn Cu*) und nach 10 Minuten bis — 0,16 (*Zn Cu*) gesunken. In der nächsten halben Stunde zeigte sich keine weitere Abnahme.

Aus den vorstehenden Messungen folgt die Spannung zwischen Wasser und Kohle (Coke) beim Eintauchen = — 0,10 (*Zn Cu*), und für einen 10 Minuten späteren Zeitpunkt = — 0,02 (*Zn Cu*).

Aus einem ähnlichen Versuche mit einem anderen aus derselben Cokemasse stammenden Kohlenstück ergab sich die Spannung zwischen Wasser und Kohle zur Zeit des Eintauchens = — 0,18 (*Zn Cu*), und zehn Minuten später = 0,00.

Nachdem die beiden Kohlenstücke länger als ein halbes Jahr frei an der Luft gestanden hatten, fand ich beim Eintauchen des einen Stückes in Wasser die Spannung — 0,20 (*Zn Cu*) und beim Eintauchen des anderen — 0,14 (*Zn Cu*); zehn Minuten später zeigte das Wasser gegen beide die Spannung — 0,05 (*Zn Cu*).

Während Wasser gegen die edlen und selbst noch mehrere unedle Metalle beim Eintauchen derselben eine positive Spannung zeigt und später erst negativ wird, erscheint diese Spannung zwischen Wasser und Kohle (Coke) gleich beim Eintauchen stark negativ; diese negative Spannung nimmt aber nicht weiter zu, sondern wie beim Eisen und Zink vielmehr ab.

Eine Bewegung des Cokestückes im Wasser hatte auf die elektrische Spannung keinen Einfluss.

b. Verhalten des ceylanischen Graphits.

Aus einem grossen Stücke sehr reinen ceylanischen Graphits liess sich, wie bereits S. 602 bemerkt, wegen des stark krummblättrigen Gefüges keine Condensatorplatte von geeigneter Form und Oberfläche darstellen; es liess sich daher auch der Ort dieser Substanz in der Spannungsreihe nicht bestimmen. Dagegen konnte das Verhalten derselben gegen Wasser geprüft werden.

Wurde ein Stück dieses Graphits zehn Minuten nach dem Eintauchen eines frisch polirten Kupferstückes in das Wasser getaucht, so zeigte die Kette aus Kupfer, Wasser und Graphit beim Eintauchen des letzteren die Spannung — 0,24 (*Zn Cu*); innerhalb zehn Minuten sank dieselbe auf — 0,15 (*Zn Cu*). Diese Kette glich also in ihrer Spannung der zuvor aus Kupfer und Coke gebildeten.

Digitized by Google

17. Verhalten des Wassers gegen Thallium.

Da der Ort des Thalliums in der Spannungsreihe noch nicht bestimmt ist, so kann die nachfolgende Messung nur zur Bestimmung der Summe der Spannungen des Wassers gegen Thallium, und des Thalliums gegen das andere mit ihm in Berührung gestandene Metall dienen.

Ein Stückchen Thallium, das unter Glycerin aufbewahrt worden war und sich völlig blank erhalten hatte, wurde mehrfach mit Wasser abgewaschen, dann zwischen Fliesspapier getrocknet, und darauf möglichst schnell in Wasser getaucht. Das Wasser stand durch einen Heber mit dem Wasser eines anderen Glases, in welches einige Minuten zuvor ein frisch gefeiltes Bleistück eingetaucht war, in leitender Verbindung. Die Spannung des Elementes aus Blei, Wasser und Thallium betrug 2 Minuten nach dem Eintauchen des Thalliums $+ 0{,}17$ ($Zn\,Cu$), welcher Werth nach 10 Minuten fast unverändert wieder erhalten wurde. Es war, wie das Folgende lehrt, die durch die vorherige kurze Berührung mit der Luft entstandene Oxydschicht innerhalb 2 Minuten wieder beseitigt.

Dürfte man bei der sonstigen Aehnlichkeit des Bleis und Thalliums, besonders auch bei der Löslichkeit ihrer Oxyde in Wasser annehmen, dass die Spannung zwischen Wasser und Thallium, einige Zeit nach dem Eintauchen, der Spannung zwischen Wasser und Blei gleich sei, also $- 0{,}07$ ($Zn\,Cu$) betrage, so würde daraus die Spannung des Thalliums gegen Blei $+ 0{,}17$ ($Zn\,Cu$), oder gegen Kupfer $+ 0{,}73$ ($Zn\,Cu$) oder gegen Zink $+ 0{,}27$ ($Zn\,Cu$) folgen. Unter Voraussetzung der Richtigkeit der eben gemachten Annahme würde also das Thallium in der Spannungsreihe (S. 604) auf 173 zu stehen kommen. Aber auch selbst wenn die gemachte Voraussetzung nicht in aller Strenge richtig wäre, bleibt doch mit Rücksicht auf das Verhalten sämmtlicher Metalle (mit Ausschluss des Eisens und Zinkes) die allgemeinere Behauptung bestehen, dass das Thallium in der Spannungsreihe zwischen Cadmium und Blei zu stellen ist.

Wenn das Thallium durch kurzes Aussetzen an die Luft auf seiner Oberfläche etwas oxydirt ist, so zeigt die oben genannte Kette aus Blei, Wasser und Thallium im Momente des Eintauchens eine Spannung $+ 0{,}06$ ($Zn\,Cu$). Hebt man das Thallium aus dem Wasser heraus und lässt es 10 Minuten lang, ohne es abzutrocknen, an der Luft stehen, so erscheint beim Eintauchen nur eine Spannung an der Bleiseite der genannten Kette $= + 0{,}01$ ($Zn\,Cu$). Durch die Oxydation wird also ebenso

Digitized by Google

wie beim Blei die negative Spannung des Wassers gegen das Thallium erhöht; dieselbe nimmt dann nach Maassgabe des Auflösens der oxydirten oder salzhaltigen Schicht ab, bis die Spannung des Elementes Blei-Wasser-Thallium auf + 17 (*Zn Cu*) gestiegen ist.

18. Verhalten des Wassers gegen Quecksilber.

Ein Trichter mit einer langen engen Röhre, deren unteres Ende zu einer feinen Spitze ausgezogen und aufwärts gebogen war, wurde mit dieser Spitze in die Mitte eines Glases gestellt, darauf Quecksilber in denselben gegossen, und während dies aus der Spitze ausfloss, das Glas mit Wasser gefüllt. Das Wasser dieses Glases stand mit dem Wasser eines zweiten Glases, in welches 10 Minuten zuvor ein polirtes Kupferstück eingetaucht war, durch einen mit Wasser gefüllten Heber in leitender Verbindung. In das Quecksilber des Trichters tauchte zur Vermittelung der Leitung ein Platindraht.

Da die Spitze der Röhre nach oben gebogen war und sich mitten im Glase befand, so fielen die aus ihr hervorquellenden Quecksilbermassen sehr schnell in Tropfen herunter; bei raschem Ausfliessen konnte also die Oberfläche des Quecksilbers in oder über der Spitze niemals lange mit dem Wasser in Berührung gewesen sein, da die hinabgesunkenen Massen mit dem Quecksilber der Spitze nicht mehr zusammenhingen. Während eines solchen raschen Ausfliessens beobachtete ich eine Spannung des Elementes aus Kupfer, Wasser und Quecksilber = — 0,06 (*Zn Cu*) (auf Seite des Kupfers). Hörte das Fliessen des Quecksilbers auf, so stieg diese negative Spannung sehr rasch bis gegen — 0,12 (*Zn Cu*) und dann langsamer, so dass sie in einigen Minuten den Werth — 0,20 (*Zn Cu*) erreichte. In einer anderen Versuchsreihe war die Spannung bei sehr raschem Fliessen noch etwas geringer als — 0,06 (*Zn Cu*); als dann das Glas soweit mit Quecksilber gefüllt war, dass die umgebogene Spitze des Trichters von dem flüssigen Metall bedeckt wurde, und also die gesammte Oberfläche des Quecksilbers die positive Polplatte bildete, stieg nach längerer Berührung dieser Fläche mit Wasser die Spannung des Elementes auf — 0,30 (*Zn Cu*).

Obwohl oben S. 604 ein Grenzwerth für die Stellung des Quecksilbers in der Spannungsreihe angegeben wurde, so wage ich doch bei der grossen Veränderlichkeit des Quecksilbers, das auch nicht absolut rein

Digitized by Google

war (vergl. Bd. IX. S. 40), nicht, aus den vorstehenden Messungen einen Schluss auf die Spannung zwischen Wasser und Quecksilber zu ziehen.

19. Elektrische Ströme durch ungleichzeitiges Eintauchen zweier Metalle in destillirtes Wasser.

Ein Theil der im Vorstehenden berichteten Messungen, nämlich alle diejenigen, bei denen gleichzeitig zwei Metallstücke sich in Wasser befanden, hätte anstatt mittelst des Condensators und Elektrometers auch mittelst eines Galvanometers ausgeführt werden können. Sind nämlich in der durch das Galvanometer geschlossenen Kette ausserordentlich grosse Widerstände vorhanden, so haben bei frisch geputzten Platten die äusserst geringen chemischen Zersetzungen keinen sehr merklichen Einfluss auf die elektrischen Spannungen, ja bei einem Theile derartiger Beobachtungen würden Polarisationserscheinungen gar nicht vorhanden sein können, weil die Kette zuvor nicht geschlossen gewesen.

Dies Letztere ist namentlich der Fall bei Beobachtungen über Ströme, welche durch ungleichzeitiges Eintauchen von Metallen in verschiedene Flüssigkeiten erzeugt werden; Versuche, die bisher namentlich mit Säuren, Alkalien und Salzlösungen in grosser Zahl angestellt sind, jedoch ohne dass dabei der eigentliche Vorgang genügend erkannt worden wäre. Mit Wasser sind dagegen solche Versuche an mehreren Metallen von Schröder*) ausgeführt worden, und hat derselbe auch auf die richtige Ursache der Entstehung jener Ströme hingewiesen.

Was nun diese bei ungleichzeitigem Eintauchen von Metallen in destillirtes Wasser auftretenden elektrischen Ströme anlangt, so lassen sich alle dabei irgend vorkommenden Erscheinungen sofort aus den im Vorhergehenden berichteten Messungen über die elektrischen Spannungen des Wassers gegen die Metalle sowohl beim Eintauchen als auch in den darauffolgenden Minuten vollständig, nicht nur in Bezug auf die Richtung, sondern auch in Bezug auf die Stärke der elektromotorischen Kraft herleiten.

Umgekehrt würde man allerdings bei gegebenem Leitungswiderstande der Kette aus der an einem passenden Galvanometer gemessenen Stromintensität auch die Stärke der elektromotorischen Kraft fin-

*) Pogg. Ann. Bd. 54 S. 57 ff.

Digitized by Google

den, und dieselbe nach Ausführung der nöthigen vergleichenden Versuche in der von mir gewählten Einheit ($Zn\,Cu$) ausdrücken können; und es scheint die Empfindlichkeit und Genauigkeit der galvanometrischen Apparate eine solche Bestimmung gar sehr zu empfehlen. Diesem Verfahren steht aber entgegen, 1) dass die Stärke der elektromotorischen Kräfte vom Augenblicke des Eintauchens an in sehr hohem Grade sich ändert, und der Ausschlag des Galvanometers nicht die in einem bestimmten Augenblicke vorhandene elektromotorische Kraft, sondern nur eine Art Mittel aus den während einer gewissen Zeit, z. B. während der Dauer einer Schwingung thätig gewesenen sehr veränderlichen elektromotorischen Kräften misst, und dass 2) selbst durch geringe Schwankungen in der Temperatur die Genauigkeit der Messungen beeinträchtigt werden kann, indem solche Schwankungen nicht unerhebliche Aenderungen im Leitungswiderstande des destillirten Wassers erzeugen. So verringerte sich z. B. bei der Messung des constanten Stromes eines Elementes aus Zink, Kupfer und destillirtem Wasser, als die Kette durch ein Sauerwald'sches Galvanometer von 30000 Windungen sehr dünnen Drahtes geschlossen war, aber der Widerstand des in einer ziemlich weiten Uförmigen Röhre befindlichen destillirten Wassers doch den Widerstand des Multiplicatordrahtes noch beträchtlich übertraf, durch ein Sinken der Temperatur dieses Wassers von 23° auf 14,7° R. der Ausschlag des ebengenannten mit einer möglichst astatischen Doppelnadel versehenen Instrumentes von 31° bis auf 24°. Um etwaige Störungen durch Polarisationen auszuschliessen, wurden bei jeder Messung die beiden Metallstücke frisch polirt, 10 Minuten nach dem Eintauchen erst die Ketten geschlossen und die Ablenkungen beobachtet.

Aus den eben erörterten Gründen ist das Galvanometer nur als Controle in Bezug auf die Richtung der zu erwartenden Ströme benutzt worden.

20. Ueber Umkehrung der Stromrichtung einer Kette bald nach dem Eintauchen der Metalle.

Als eine besondere Eigenthümlichkeit ist öfter die Umkehrung der Stromrichtung gewisser Ketten bald nach dem Eintauchen ihrer Metalle in eine Flüssigkeit hervorgehoben worden. So erwähnt z. B. Henrici*), dass bei einer aus Zinn, Eisen und destillirtem Wasser gebildeten Kette

*) Henrici, über die Elektricität der galvanischen Kette S. 91.

Digitized by Google

der gleich nach dem Eintauchen in einer dem Metallcontacte entsprechenden Richtung eintretende elektrische Strom in einiger Zeit seine Richtung umkehrte.

Alle derartigen Erscheinungen, so weit sie nach dem Eintauchen der Metalle in destillirtes Wasser auftreten, finden durch die im Vorstehenden mitgetheilten Messungen ihre vollständige Erklärung. Aus jenen Messungen liess sich sogar, wenn es erforderlich wäre, ein vollständiges Verzeichniss aller mit destillirtem Wasser als flüssigem Leiter gebildeten Ketten, welche Umkehrungen in der Stromrichtung zeigen, zusammenstellen; es sind ja auch bei Mittheilung der Beobachtungen bereits mehrere Beispiele solcher Umkehrungen vorgekommen (vergl. z. B. S. 645. 657).

Was nun speciell die oben von Henrici erwähnte Kette aus Zinn, Eisen und Wasser betrifft, so ist beim Eintauchen

nach S. 657 die Spannung $(Aq\,Sn) = +0{,}04\ (Zn\,Cu)$
nach S. 647 „ „ $(Aq\,Fe) = +0{,}09$ „
und nach S. 604 „ „ $(Sn\,Fe) = +0{,}33$ „

Daraus folgt die Spannung

$$(Fe\,Aq) + (Aq\,Sn) + (Sn\,Fe) = +0{,}28\ (Zn\,Cu).$$

Dagegen ist 10 oder 20 Minuten nach dem Eintauchen

nach S. 657 die Spannung $(Aq\,Aq') + (Aq'\,Sn') + (Sn'\,Sn) = -0{,}15\ (Zn\,Cu)$,
nach S. 647 „ „ $(Aq\,Aq') + (Aq'\,Fe') + (Fe'\,Fe) = +0{,}27$ „
während $(Sn\,Fe) = +0{,}33$ „
bleibt.

Daraus folgt die Spannung

$$(Fe\,Fe') + (Fe'\,Aq') + (Aq'\,Sn') + (Sn'\,Sn) + (Sn\,Fe) = -0{,}09\ (Zn\,Cu).$$

Hiernach geht also in der That die im Momente des Eintauchens von Zinn und Eisen in destillirtes Wasser vorhandene elektromotorische Kraft $+0{,}28\ (Zn\,Cu)$ innerhalb eines Zeitraumes von 10 bis 20 Minuten in $-0{,}09\ (Zn\,Cu)$ über.

21. Mögliche Combinationen der drei in einer aus zwei Metallen und destillirtem Wasser gebildeten Kette vorhandenen elektromotorischen Kräfte.

In Betreff der Resultirenden aus den drei in einer aus zwei Metallen und Wasser gebildeten Kette vorhandenen elektromotorischen Kräften sind folgende Combinationen möglich, und treten auch wirklich ein:

Digitized by Google

1) Alle drei elektromotorischen Kräfte wirken in derselben Richtung, und die Resultirende ist also gleich ihrer Summe.

2) Zwei dieser Kräfte wirken in einer, die dritte aber in entgegengesetzter Richtung, so dass die Resultirende gleich der Differenz zwischen der Summe der beiden ersten und zwischen der dritten wird. Dabei kann nun die dritte den beiden andern entgegenwirkende Kraft

a) die Spannung zwischen dem Wasser und dem einen Metalle, und *α*) grösser oder *β*) kleiner als die Summe der beiden anderen sein; oder sie kann

b) die Spannung zwischen den beiden Metallen, und ebenfalls wieder *α*) grösser oder *β*) kleiner als die Summe der beiden anderen sein.

Es mag genügen für jeden der vorstehenden Fälle ein Beispiel anzuführen, und zwar will ich sämmtliche Ketten so wählen, dass die Metalle bereits zehn Minuten lang in Wasser eingetaucht angenommen werden. Die sogleich namhaft zu machenden Spannungen des Wassers gegen die Metalle beziehen sich also auf diesen Zeitpunkt.

ad 1. In einer Kette aus Kupfer-Wasser-Eisen-Kupfer wirken alle drei elektromotorischen Kräfte in demselben Sinne; denn man hat Kupfer-Wasser $= +0{,}09$ (*Zn Cu*), Wasser-Eisen $= +0{,}27$ (*Zn Cu*) und Eisen-Kupfer $= +0{,}16$ (*Zn Cu*).

ad 2. *a*. *α*. Die Spannung zwischen dem einen Metall und Wasser ist grösser als die Summe der beiden übrigen entgegengesetzt gerichteten Spannungen in einer Kette aus Zink-Wasser-Aluminium-Zink; denn man hat Zink-Wasser $= +0{,}16$ (*Zn Cu*), Wasser-Aluminium $= -0{,}74$ (*Zn Cu*), und Aluminium-Zink $= +0{,}20$ (*Zn Cu*).

ad 2. *a*. *β*. Die Spannung zwischen dem einen Metall und dem Wasser ist kleiner als die Summe der beiden übrigen entgegengesetzt gerichteten Spannungen in einer Kette aus Platin-Wasser-Blei-Platin; denn man hat Platin-Wasser $= +0{,}14$ (*Zn Cu*), Wasser-Blei $= -0{,}07$ (*Zn Cu*), Blei-Platin $= +0{,}79$ (*Zn Cu*).

ad 2. *b*. *α*. Die Spannung zwischen den beiden Metallen ist grösser als die Summe der beiden übrigen entgegengesetzt gerichteten Spannungen in einer Kette aus Zink-Wasser-Eisen-Zink; denn man hat Zink-Wasser $= +0{,}16$ (*Zn Cu*), Wasser-Eisen $= +0{,}27$ (*Zn Cu*), Eisen-Zink $= -0{,}84$ (*Zn Cu*).

ad 2. *b*. *β*. Die Spannung zwischen den beiden Metallen ist kleiner als die Summe der beiden übrigen entgegengesetzt gerichteten Spannun-

Digitized by Google

gen in einer Kette aus Messing-Wasser-Eisen-Messing; denn man hat Messing-Wasser $= +0{,}28$ (*Zn Cu*), Wasser-Eisen $= +0{,}27$ (*Zn Cu*) und Eisen-Messing $= -0{,}06$ (*Zn Cu*).

22. Verhalten des Wassers gegen die Metalle im Allgemeinen.

In der vorliegenden Untersuchung habe ich es für absolut nothwendig gehalten, durchweg eine völlig scharfe Trennung zwischen den Ergebnissen der reinen Beobachtung und den daraus gezogenen Folgerungen eintreten zu lassen. Ich habe daher im Vorstehenden an die Mittheilung der Beobachtungen nirgends theoretische Erörterungen geknüpft; dagegen will ich im Nachfolgenden den Versuch machen, aus den angeführten Beobachtungen, soweit dies bis jetzt möglich, allgemeine Resultate über das Verhalten des Wassers gegen die Metalle herzuleiten.

Die Fragen, deren Beantwortung gefordert wird, sind: 1) Welche Spannungen zeigt das Wasser gegen die blank geputzten Metalle im ersten Momente seiner Berührung mit denselben, und 2) welches sind die Ursachen, wodurch die Aenderungen in diesen ursprünglichen Spannungen hervorgerufen werden?

A. Die Spannungen des Wassers gegen die blank polirten Metalle im ersten Momente seiner Berührung mit denselben.

Werden die Metalle nach ihrer Stellung in der Spannungsreihe geordnet, so sind beim Eintauchen die Spannungen des Wassers gegen die verschiedenen polirten Metalle (mit Ausschluss des Bleies, welches selbst bei kurzem Aussetzen an die Luft sich oxydirt) folgende:

Wasser gegen	Platin	$+0{,}14$	(*Zn Cu*)
„ „	Silber	$+0{,}08$	„
„ „	Palladium	$+0{,}04$	„ *)
„ „	Gold	$+0{,}10$ bis $0{,}15$	(*Zn Cu*)
„ „	Kupfer	$+0{,}09$	(*Zn Cu*)
„ „	Eisen	$+0{,}09$	„

*) Der Palladiumdraht liess sich wegen seiner Dünnheit nur schlecht poliren, weshalb nur eine geringe positive Spannung beobachtet werden konnte (S. 639).

Digitized by Google

Wasser gegen	Messing	+ 0,08	(*Zn Cu*)
„ „	Neusilber	+ 0,08	„
„ „	Wismuth	— 0,03	„
„ „	Antimon	+ 0,03	„
„ „	Zinn	+ 0,04	„
„ „	Kadmium	— 0,16	„
„ „	Zink	— 0,16	„
„ „	Aluminium	— 0,12	„

Aus dieser Zusammenstellung geht allerdings hervor, dass die unmittelbare Beobachtung ein sehr verschiedenes Verhalten des Wassers gegen die Metalle ergibt, indem vom negativen Ende der Spannungsreihe nach dem positiven hin die anfänglich nicht unbeträchtlichen positiven Spannungen abnehmen und am positiven Ende sogar in erhebliche negative übergehen; indess wird eine genauere Erwägung der beim Eintauchen der verschiedenen Metalle in Wasser auftretenden Vorgänge es sehr wahrscheinlich machen, dass das Verhalten des Wassers gegen sämmtliche Metalle im Momente des Eintauchens (nahe) dasselbe ist.

Bereits oben S. 611 habe ich nämlich hervorgehoben, dass, wenn auch die Messung der Spannung des Wassers gegen die Metalle noch während des Eintauchens selbst geschah, doch die erhaltenen Werthe im Allgemeinen nicht als die wahren Grössen der beim ersten Zusammentreffen des flüssigen Leiters mit den Metallen auftretenden Spannungen betrachtet werden dürfen, sondern nur als Grenzwerthe anzusehen sind, jenseits deren der wahre Werth jener Anfangsspannung liegt, indem bereits noch während des Eintauchens die zuerst mit dem Wasser in Berührung gekommenen Theile der Metalle eine Aenderung erlitten haben können. Die mitgetheilten Beobachtungen weisen direct nach, wie schnell diese Aenderungen eintreten, und wie sie durch das Vorhandensein einer mangelhaften Politur noch besonders begünstigt werden. Dies letztere gilt selbst von Metallen, wie Platin und Kupfer, bei denen durch Behandeln mit der Feile (wie beim Kupfer S. 612 speciell erwiesen wurde) keine Verunreinigung oder Oxydation der Oberfläche eintritt, die aber dessenungeachtet in gefeiltem Zustande gleich beim Eintauchen in Wasser eine entgegengesetzte Spannung als im polirten zeigen; denn während Wasser gegen polirtes Platin und Kupfer beim Eintauchen die Spannungen von resp. + 0,14 und + 0,09 (*Zn Cu*) darbot, nahm dasselbe

Digitized by Google

gegen die gefeilten Metalle die resp. Spannungen — 0,10 und — 0.06 (*Zn Cu*) an *).

Wenn aber selbst bei Metallen, wie dem Platin, die Aenderungen seiner Spannung gegen Wasser in beträchtlichem Grade und mit nicht unerheblicher Geschwindigkeit eintreten, so werden dieselben bei den unedlen Metallen, die dem positiven Ende der Spannungsreihe näher stehen und sich meistens auch schlecht poliren lassen, einen noch weit schnelleren Verlauf nehmen, und infolge dessen müssen die beim Eintauchen beobachteten Werthe sehr beträchtlich von den bei der ersten Berührung des Wassers mit den Metallen vorhandenen Spannungen abweichen.

Betrachten wir nun die Spannungen des Wassers gegen die am negativen Ende der Spannungsreihe stehenden Metalle, so erscheinen dieselben sämmtlich positiv. Mit Rücksicht auf das Vorstehende würde man aber auch der Ansicht, dass die etwas niedrigeren Werthe dieser Spannungen bei Silber, Kupfer, Eisen, Messing und Neusilber in einer bereits im Momente des Eintauchens eintretenden geringen Aenderung begründet seien, ein wesentliches Bedenken nicht entgegensetzen können; es würden also die genannten Metalle, falls man die unveränderte Anfangsspannung des Wassers zu messen vermöchte, dem Golde und Platin sich gleich verhalten.

Bei den näher am positiven Ende der Spannungsreihe stehenden Metallen weicht allerdings, wie bereits hervorgehoben, die direct beobachtete Spannung des Wassers beim Eintauchen sehr beträchtlich von der Spannung des Wassers gegen die edlen Metalle ab; dagegen sind die unmittelbar nach dem Eintauchen eintretenden Vorgänge von dem beim Eintauchen des Kupfers, Silbers u. s. w. beobachteten qualitativ nicht verschieden, und werden auch (mit Ausschluss gewisser Erscheinungen beim Zink und Eisen) durch dieselbe Ursache hervorgerufen.

---

*) Die Aenderungen in der Spannung zwischen dem Wasser und den Metallen verlaufen bereits sehr schnell; noch viel schneller dagegen gehen dieselben vor sich, wenn das Wasser durch andere Flüssigkeiten, auch wenn sie die eingetauchten Metalle direct chemisch nicht angreifen, ersetzt wird. Dieser Umstand, dass im Wasser diese Aenderungen noch verhältnissmässig am langsamsten erfolgen, hat mich vor Allem bestimmt, in diesem zweiten Theile meiner Untersuchungen über die elektromotorischen Kräfte zunächst das Verhalten des Wassers gegen die Metalle zu betrachten.

Digitized by Google

Der nächstfolgende Abschnitt wird nämlich zeigen, dass die Aenderungen in der Spannung des Wassers gegen die Metalle von einem Zutritte des Sauerstoffs zu der metallischen Oberfläche abhängen. Nun wächst aber gerade mit der Annäherung der Metalle an das positive Ende der Spannungsreihe einerseits die Neigung Sauerstoff aufzunehmen, so wie andererseits nach Bd. IX. S. 51 die Grösse der durch die Aufnahme dieses Gases in der Stellung der Metalle bewirkten Aenderung; es müssen daher gleich in den ersten Momenten des Eintauchens beträchtliche Aenderungen in der Spannung zwischen Wasser und diesen Metallen eintreten, so dass selbst die 1/5 bis 1/4 Secunde nach dem Eintauchen vorgenommene Beobachtung nur einen bereits stark veränderten Werth zu erfassen vermag. Die Beobachtungen widersprechen also der Annahme, dass auch die Spannung des Wassers gegen die unedlen Metalle beim ersten Zusammentreffen positiv und gleich der für die edlen Metalle gefundenen sei, durchaus nicht, sondern machen sie vielmehr sehr wahrscheinlich. Diese Annahme wird durch die im folgenden Abschnitte geführte Untersuchung über die Ursache der Aenderungen in der Spannung des Wassers gegen die Metalle noch eine weitere Stütze erhalten.

B. Ueber die Ursache der Aenderungen in der elektrischen Spannung zwischen dem Wasser und den Metallen.

a. Unedle Metalle.

Um die Ursache, welche die Aenderungen in der Spannung zwischen dem Wasser und den Metallen erzeugt, mit möglichster Klarheit darzulegen, will ich von dem Verhalten des Kupfers ausgehen, weil gerade für dieses Metall die umfassendsten und sorgfältigsten Messungen vorliegen.

Oben S. 606 ist erwähnt worden, dass auf der Oberfläche des Kupfers vom Augenblicke des Eintauchens in das Wasser an Veränderungen eintreten, und nach S. 620 sind diese Veränderungen von derselben Art, wie sie beim Liegen des Kupfers an der Luft sich bilden, indem ein polirtes und dann einige Zeit der Luft ausgesetzt gewesenes Kupfer gleich beim Eintauchen nahe dieselbe Spannung zeigt, welche ein frisch polirtes Kupfer nach zehn Minuten dauernder Berührung mit dem Wasser darbietet. Nach S. 621 war nun eine 19 Tage an der Luft gelegene Kupferplatte gegen eine frisch polirte um 0,15 (*Zn Cu*) negati-

Digitized by Google

ver geworden; dies ist nahe der Betrag, um welchen sich frisch polirtes Kupfer nach seinem Eintauchen in das Wasser ändert (S. 613). Es ist also wohl gestattet, diese in der Spannung zwischen Wasser und Kupfer mit der Dauer der Berührung eintretende Veränderung dem Umstande zuzuschreiben, dass das Kupfer sich bei der Berührung mit Wasser gerade wie bei Berührung mit atmosphärischer Luft mit einer unendlich dünnen Schicht von Oxydul oder Oxyd bedeckt; dann ist jedoch die zehn Minuten nach dem Eintauchen beobachtete Spannung nicht mehr blos die Spannung des Wassers gegen Kupfer, sondern die Summe der Spannungen des Wassers gegen das oxydirte Kupfer und des oxydirten Kupfers gegen blankes Kupfer.

Unter diesen Umständen lässt sich die Spannung, welche das Wasser gegen die oxydirte Kupferoberfläche einnimmt, berechnen. Wird in der Leiterreihe Wasser-oxydirte Schicht-Kupfer das Kupfer auf Null gehalten, so zeigt nach den früheren Angaben das Wasser die Spannung $-0{,}08$ $(Zn\,Cu)$. Da nun die oxydirte Schicht bereits die Spannung $-0{,}15$ $(Zn\,Cu)$ besitzt, so muss das Wasser gegen diese oxydirte Schicht die positive Spannung $+0{,}07$ $(Zn\,Cu)$ erhalten, wenn als Endresultat in dem dreigliedrigen Leiter das Wasser die Spannung $-0{,}08$ $(Zn\,Cu)$ annehmen soll. Sonach zeigt das Wasser auch gegen die oxydirte Schicht nahe dieselbe Spannung wie gegen das blanke Kupfer.

Es ist wohl nicht zu bezweifeln, dass die 19 Tage der Luft ausgesetzte Kupferplatte bei weiterem Liegen sich noch etwas mehr geändert haben würde; ein grösserer negativer Werth der oxydirten Schicht würde aber, wie man sieht, die positive Spannung des Wassers gegen die oxydirte Schicht um einen gleichen Betrag erhöhen, und sie der gegen das blanke Metall beobachteten nähern.

Im Vorstehenden habe ich angenommen, dass blankes Kupfer im Wasser sich mit einer oxydirten Schicht*) bedecke, und dass noch vor Ablauf von 10 Minuten dieselbe bereits vollständig gebildet sei. Es handelt sich hierbei nicht um eine dicke Lage, sondern um eine unendlich dünne Schicht, wie denn auch das Kupfer, wenn es nach 10 Minuten aus dem Wasser gehoben wird, an dem untergetaucht gewesenen Theile nicht wesentlich anders aussieht, als an dem ausserhalb des Wassers

*) Ich lasse es für jetzt unentschieden, ob der Sauerstoff, welcher an das Kupfer tritt, aus dem Wasser oder aus den im Wasser gelösten Gasen stammt.

Digitized by Google

gehaltenen. Auf die Bildung eines so dünnen Häutchens können daher auch die von v. Bonsdorff in seiner Abhandlung über die Oxydation der Metalle in der atmosphärischen Luft*) aufgestellten Sätze keine Anwendung finden. Dagegen wird es sich fragen, ob nicht durch feinere optische Hülfsmittel eine solche Aenderung auf der Metalloberfläche gleichfalls nachgewiesen werden kann.

Ich habe zuvor die Stellung der oxydirten Schicht, welche sich während der Berührung mit dem Wasser auf der Oberfläche des Kupfers bildet, aus dem Verhalten einer 19 Tage der Luft ausgesetzten Kupferplatte gegen eine frisch polirte hergeleitet, und den so erhaltenen Werth zur Rechnung benutzt; ein Verfahren, das, wie bereits angedeutet, jedenfalls nur angenäherte Werthe liefern kann. Zur Erzielung genauerer Resultate hätte ich das Verhalten einer Kupferoberfläche, wie sie nach 10 Minuten langer Berührung mit Wasser sich bildet, gegen eine frisch polirte Fläche untersuchen müssen, und es könnte scheinen, als ob ein solcher Zustand der Oberfläche sich sehr einfach herstellen liesse, wenn man die Kupferplatte nach frischem Poliren 10 Minuten lang mit einer Wasserschicht bedeckt und dann wieder von dieser befreit hätte.

Ich habe jedoch dieses Verfahren nicht eingeschlagen, da es mir nicht einwurfsfrei zu sein scheint. Das Wasser kann nämlich nur durch Abschütteln und Verdampfen des Restes an der Luft entfernt werden. Es steht nun zu befürchten, dass wenn die Platte nicht lange genug an der Luft gelegen, noch eine wenn auch nur unendlich dünne Wasserschicht an derselben hängen bleibt, und dass andererseits, wenn die Platte längere Zeit der Luft ausgesetzt gewesen, sich Salze bilden (S. 616 u. 622). In beiden Fällen würde also nicht die Spannung der oxydirten Schicht gegen blankes Metall, sondern ein durch den Wasser- oder Salzüberzug modificirter Werth derselben gemessen werden. Dazu kommt noch das weitere Bedenken, dass durchaus nicht feststeht, dass eine mit Wasser zehn Minuten lang bedeckt gewesene Kupferfläche, wenn sie sofort von Wasser vollständig befreit werden könnte, noch denselben Zustand behalten würde, wie während der Berührung mit dieser Flüssigkeit; denn daraus, dass ein Kupferstück, das zuerst 10 Minuten in Wasser getaucht und dann eine Stunde an der Luft gestanden, beim er-

*) Pogg. Annal. Bd. 41. S. 293 ff. und Bd. 42. S. 325 ff.

Digitized by Google

neuten Eintauchen dieselbe Spannung zeigt, welche es im Momente des Heraushebens aus dem Wasser besass, folgt keineswegs, dass die Oberfläche unmittelbar vor dem zweiten Eintauchen absolut ebenso beschaffen gewesen, wie im Momente des Heraushebens nach dem ersten Eintauchen. Zur Erklärung der angeführten Thatsache genügt schon die Annahme, dass die Kupferoberfläche durch die frühere Berührung mit dem Wasser einen ähnlichen Zustand wie durch Feilen erlangt habe, also eine solche Beschaffenheit, dass sie gleich beim Eintauchen in den Zustand tritt, wie er bei frisch polirter Fläche erst nach 10 Minuten langer Berührung mit Wasser gebildet ist. Beim Platin, das eine sehr grosse Aenderung in seiner Spannung gegen Wasser zeigt, verschwindet nach S. 629 in der That auch ein Theil der in Berührung mit Wasser eingetretenen Modification wieder durch das Trocknen der Oberfläche an der Luft.

Um nun nicht zu solchen der Willkühr einen gewissen Spielraum gewährenden Deutungen der Beobachtungen Veranlassung zu bieten, habe ich keine Versuche über die Aenderung des Ortes der verschiedenen Metalle durch vorhergegangene Benetzung mit Wasser ausgeführt, sondern werde im Folgenden die Bd. IX. S. 51 bezeichneten Veränderungen, welche die Metalle durch längeres Liegen an der Luft erlitten haben, an deren Stelle verwenden. Können diese Werthe auch nur als Annäherungen gelten, so haben sie doch den wesentlichen Vortheil, dass sie in völlig unbefangener Weise bereits vor einer Reihe von Jahren bestimmt wurden.

Bevor ich die Aenderungen in den Spannungen des Wassers gegen die verschiedenen Metalle in eine Tabelle zusammenstelle, will ich noch das am positiven Ende der Spannungsreihe stehende Aluminium einer speciellen Erörterung unterwerfen, weil bei ihm jene Aenderungen einen ungemein grossen Werth erreichen. Nach Bd. IX. S. 51 beträgt die Veränderung, welche eine Aluminiumplatte durch längeres Liegen an der Luft erlitten hatte, $-0{,}85$ (*Zn Cu*). In einem speciellen Versuche war (nach S. 665 dieses Bandes) die Spannung des Wassers gegen frisch polirtes Aluminium 10 Minuten nach dem Eintauchen $-0{,}74$ (*Zn Cu*) *).

*) Da schon beim Kupfer nach 10 Minuten langer Berührung mit Wasser die Bildung der oxydirten Schicht beendigt ist, so dürfte dasselbe auch vom Aluminium gelten; die weitere Zunahme der negativen Spannung während eines 24stündigen Eintauchens würde dann der Bildung von anderweiten Verbindungen (Salzen) zuzuschreiben sein.

Digitized by Google

Ist nun diese letzte Spannung infolge einer Oxydschicht entstanden, die gegen blankes Metall die Spannung $-0{,}85$ (*Zn Cu*) besitzt, so folgt daraus eine Spannung des Wassers gegen diese Oxydschicht $= +0{,}11$ (*Zn Cu*), also nahe dieselbe wie sie Wasser gegen Platin zeigt.

In ähnlicher Weise lassen sich nun auch für die zwischen dem Kupfer und Aluminium liegenden Metalle, in soweit die Aenderungen in den Spannungen zwischen ihnen und dem Wasser von einer sich bildenden Oxydschicht herrühren, die Spannungen des Wassers gegen diese oxydirten Schichten berechnen; ich stelle der Kürze und der besseren Uebersicht wegen die Resultate in einer Tabelle zusammen, und bemerke nur, dass wegen seines eigenthümlichen, später noch näher zu erörternden Verhaltens das Eisen in dieselbe nicht aufgenommen werden konnte, dass aus dem S. 686 angeführten Grunde als Spannung des Wassers gegen Zink die im bewegten Zustande des Metalles nach S. 686 vorhandene genommen ist, und dass für Zinn die Rechnung nicht möglich war, da keine Beobachtung über Aenderung einer Zinnplatte an der Luft vorlag, indem die Bd. IX. S. 51 gemachte Angabe sich auf eine an ihrer Oberfläche durch andere Metalle (Blei und Zink) verunreinigte Platte (s. oben S. 600) bezieht.

Die erste Spalte der folgenden Tabelle enthält die Namen der Metalle, während in der zweiten die Spannungen des Wassers gegen dieselben 10 bis 20 Minuten nach dem Eintauchen zusammengestellt sind. Die dritte Spalte gibt die Bd. IX. S. 51 verzeichneten Veränderungen einer frisch polirten Platte des betreffenden Metalles durch längeres Liegen an der Luft und in der vierten sind die aus den Zahlen der zweiten und dritten Spalte berechneten Werthe der Spannungen des Wassers gegen die oxydirte Schicht der Oberfläche aufgeführt.

Metalle.	Spannung zwischen Wasser und Metall, 10 bis 20 Minuten nach dem Eintauchen.	Aenderung einer polirten Metallfläche durch längeres Liegen an der Luft.	Berechnete Spannung des Wassers gegen die oxydirte Schicht.
Kupfer	$-0{,}08$ (*Zn Cu*)	$-0{,}15$ (*Zn Cu*)	$+0{,}07$ (*Zn Cu*)
Wismuth	$-0{,}20$,,	$-0{,}24$,,	$+0{,}04$,,
Antimon	$-0{,}06$,,	$-0{,}18$,,	$+0{,}12$,,
Blei	$-0{,}07$,,	$-0{,}21$,,	$+0{,}14$,,
Kadmium	$-0{,}27$,,	$-0{,}37$,,	$+0{,}10$,,
Zink	$-0{,}32$,,	$-0{,}43$,,	$+0{,}11$,,
Aluminium *)	$-0{,}74$,,	$-0{,}85$,,	$+0{,}11$,,

*) Oben (S. 604) sind die Orte des frisch geputzten Kadmiums und Aluminiums in der Spannungsreihe etwas anders gefunden, als Bd. IX. S. 51. Werden diese Zah-

Die letzte Spalte zeigt die Spannungen des Wassers gegen die oxydirten Schichten sämmtlicher Metalle positiv. Berücksichtigt man die grossen Unterschiede, welche in den Spannungen des Wassers gegen die Metalle einige Zeit nach dem Eintauchen vorhanden sind, so wie den Umstand, dass die Zahlen der dritten Spalte nicht völlig genau sein können, so dürfte man wohl der Annahme, dass die Spannungen des Wassers gegen die oxydirten Schichten der oben genannten Metalle gleich und dieselben wie gegen die blanken Oberflächen seien, eine Berechtigung nicht absprechen.

b. Edle Metalle.

Die Vorgänge bei dem Eintauchen der sogenannten edlen Metalle gleichen vollständig den z. B. beim Eintauchen des Kupfers in Wasser beobachteten, und wir sind daher auch gezwungen, sie derselben Ursache wie beim Kupfer, also einem Hinzutreten des Sauerstoffs, zuzuschreiben. Doch wird diese Ursache eine gewisse durch die chemischen Eigenschaften der edlen Metalle bedingte Modification erleiden müssen, die sich auch in den beobachteten Thatsachen selbst kund gibt.

Wird Kupfer einige Zeit in Wasser getaucht, dann herausgehoben und nach kurzer Zeit wieder eingetaucht, so zeigt das Wasser gegen dieses Kupfer beim zweiten Eintauchen nahe dieselbe negative Spannung wie vor dem Herausheben; diese Beobachtung, sowie die sonstigen chemischen Eigenschaften des Kupfers machen die Annahme, dass auf der Kupferoberfläche sich eine oxydirte Schicht gebildet habe, wahrscheinlich.

Anders verhält es sich mit dem Platin. Schon die sonst bekannten Eigenschaften desselben dürften das Eintreten einer festen Verbindung des Sauerstoffs mit dem Metalle während seiner Berührung mit dem Wasser, die Bildung eines eigentlichen Oxyds, sehr unwahrscheinlich machen. Dass eine solche in der That wenigstens nicht vollständig eintritt, geht aus den S. 629 mitgetheilten Versuchen hervor. Denn wird

---

lenwerthe der Berechnung der Veränderungen zu Grunde gelegt, so würden diese Aenderungen anstatt $-0{,}37$ und $-0{,}85$ ($Zn\,Cu$) resp. $-0{,}42$ und $-0{,}80$ ($Zn\,Cu$) betragen und die Zahlen $+0{,}10$ und $+0{,}11$ ($Zn\,Cu$) der letzten Spalte resp. in $+0{,}15$ und $+0{,}06$ ($Zn\,Cu$) übergehen. — Für Wismuth ist der Ort der frisch polirten Platte nach S. 604 bereits auf 130 angenommen, was die Aenderung durch längeres Liegen $= -0{,}24$ ($Zn\,Cu$) gibt, anstatt $-0{,}22$ ($Zn\,Cu$), wie Bd. IX. S. 51 berechnet.

Digitized by Google

Platin, welches zuvor einige Zeit mit Wasser in Berührung gewesen ist, mehrere Tage der Luft ausgesetzt, so zeigt das Wasser gegen dieses Platin bei seinem Eintauchen fast keine Spannung. Sonach verhält sich also dieses Platin verschieden sowohl von frisch polirtem als auch von dem bereits 20 Minuten eingetauchten Metalle; die Spannung des Wassers gegen frisch polirtes Platin beim Eintauchen beträgt nämlich + 0,14 (*Zn Cu*), und gegen 20 Minuten lang eingetauchtes Platin — 0,19 (*Zn Cu*). Aus diesen Zahlenangaben folgt, dass der Zustand der Platinoberfläche, wie er nach 20 Minuten dauernder Berührung mit Wasser bestanden, durch das Aussetzen an die Luft wenigstens zum Theil wieder verschwunden ist, dass also, wenn wir die Bildung jenes Zustandes dem Hinzutreten des Sauerstoffs zuschreiben, wenigstens ein Theil dieses Sauerstoffs sich wieder abgelöst haben muss; ja jene Beobachtungen sind selbst mit einer völligen Lostrennung des Sauerstoffs nach dem Herausheben aus dem Wasser vereinbar; sie verlangen dann nur, dass die Oberfläche in einem Zustande verbleibt, in welchem sie, ich möchte sagen, eine grössere Disposition zur Aufnahme des Sauerstoffs besitzt. Die Annahme des Zurückbleibens eines solchen Zustandes hat aber durchaus nichts Unwahrscheinliches, da das blosse Feilen auf der frischen Oberfläche eine viel stärkere derartige Disposition hervorzurufen vermag (S. 628).

Uebrigens liesse sich die Frage, ob der durch die Berührung des Platins mit Wasser eingetretene Zustand nach dem Verdampfen vollständig wieder verschwindet oder nicht, und welche Zeit dazu erfordert wird, grade bei diesem Metall durch eine entsprechende Behandlung einer Condensatorplatte (aus Platin) beantworten, indem auf den Ort, welchen sie in der Spannungsreihe einnimmt, wohl die zurückgebliebene sauerstoffhaltige Schicht, nicht aber jene Disposition zur leichteren Aufnahme des Sauerstoffs, wie dies die Versuche an der gefeilten Kupferplatte (S. 612) beweisen, Einfluss hat. Leider war es mir nicht möglich, mit der Bd. IX. S. 46 beschriebenen Platinplatte eine solche Untersuchung durchzuführen; diese Platte bestand nur aus einem dünnen auf eine dickere Kupferplatte gelötheten Platinbleche, welches durch vielfaches Abreiben mittelst Schmirgelpapier während der früheren Messungen bereits soweit geschwächt war, dass es wiederholte neue Reinigungen nicht ausgehalten hätte.

Je nach den Eigenschaften der sogenannten edlen Metalle wird nun

Digitized by Google

der Sauerstoff bei seinem Herantreten sich verschieden verhalten, entweder, wie beim Platin wahrscheinlich, nur an die Oberfläche sich anlegen, oder, wie beim Silber, mehr oder weniger sich auch mit dem Metalle verbinden. Dass beim Silber dieser letztere Vorgang eintritt, möchte ich aus der oben S. 633 angeführten Thatsache schliessen, dass nämlich die Spannung des Wassers gegen früher eingetauchtes und dann einige Tage der Luft ausgesetzt gewesenes Silber beim erneuten Eintauchen, ähnlich wie beim Kupfer, unter gleichen Verhältnissen, etwas höher ist als später.

Dass aber ein blosses Bedecken der Platinoberfläche mit einer unendlich dünnen Sauerstoffschicht hinreicht, um jene Oberfläche negativer erscheinen zu lassen, als eine frisch polirte, wird durch die Erscheinungen der sogenannten galvanischen Polarisation bewiesen, wo selbst der schwächste Strom, der durchaus unfähig ist, eine sichtbare Wasserzersetzung zu veranlassen, doch eine Aenderung in dem angegebenen Sinne hervorzurufen vermag.

Was freilich die Kraft anlangt, welche den Sauerstoff zur Oberfläche führt, so enthalte ich mich für jetzt eines jeden Ausspruches; bevor dies mit einiger Sicherheit überhaupt möglich wird, muss, wie schon oben erwähnt, das Verhalten des Sauerstoffs und Wasserstoffs gegenüber den Metallen mit hinreichender Genauigkeit erforscht sein.

Ein eigenthümliches Verhalten zeigt das geglühte Platin (und ebenso auch das Silber) bei seinem Eintauchen in das Wasser, indem das Wasser gleich beim Eintauchen gegen das Metall je nach der Stärke des vorhergegangenen Glühens eine mehr oder weniger hohe negative Spannung annimmt, sehr bald aber diese Spannung das sonst bei nicht geglühtem Platin auftretende Maximum übersteigt und dann allmälich wieder auf das genannte Maximum herabsinkt (S. 630). Wäre die Grösse der Aenderung bekannt, welche durch das Herantreten des Sauerstoffs an Platin überhaupt bewirkt werden kann, so würde sich vielleicht entscheiden lassen, ob der eben beschriebene eigenthümliche Vorgang durch die bekannte Eigenschaft des frisch geglühten Platins, das Sauerstoffgas stärker zu condensiren, hervorgerufen wird. Läge nämlich die höchste beobachtete negative Spannung des Wassers gegen geglühtes Platin ($-0{,}23$ ($Zn\,Cu$)) noch innerhalb der Grenze der Aenderungen, welche der Sauerstoff am Platin zu erzeugen vermag, so liesse sich jener Vorgang wohl in der Weise erklären, dass das geglühte Platin anfangs

Digitized by Google

stärker den Sauerstoff an sich zöge und condensirte, als später, wo diese Eigenschaft, sei es durch die Berührung mit dem Wasser und den in ihm gelösten Gasen oder auch von selbst sich wieder vermindert.

c. Eisen und Zink.

Sehr abweichend von den Vorgängen bei den übrigen Metallen ist das Verhalten des Zinkes und Eisens gegen Wasser. Beide unterscheiden sich in ihren chemischen Eigenschaften von den übrigen im Vorstehenden behandelten Metallen dadurch, dass sie für sich (?) oder unter Mitwirkung verdünnter Säuren das Wasser zerlegen und Wasserstoff entwickeln.

Das Zink gleicht in der ersten Minute seines Eintauchens noch den übrigen Metallen; entsprechend seiner Stellung in der Spannungsreihe nimmt das Wasser gegen dasselbe gleich beim Eintauchen eine beträchtliche negative Spannung, wie beim Kadmium, ein, und diese negative Spannung wächst in den folgenden Augenblicken, um sehr bald in eine Abnahme überzugehen.

Das Eisen verhält sich ähnlich; beim Eintauchen erscheint das Wasser positiv ($+ 0{,}09$ ($Zn\,Cu$)); diese positive Spannung nimmt in den nächsten Secunden ein wenig ab, um dann sofort wieder mit Schnelligkeit zu wachsen, so dass sie nach $1\frac{1}{2}$ Minuten bereits auf $+ 0{,}16$ ($Zn\,Cu$) und nach zehn Minuten bis $+ 0{,}27$ ($Zn\,Cu$) gestiegen ist. Beim gehärteten Stahl ist dies Verhalten deutlicher ausgeprägt; die positive Spannung des Wassers gegen denselben nimmt nach dem Eintauchen viel stärker als beim Eisen ab, geht sogar in eine schwache negative ($- 0{,}02$ ($Zn\,Cu$)) über, und verweilt auf dieser so lange als die mit Wasser in Berührung befindliche Metallfläche scheinbar blank bleibt; später erst beginnt dann die Spannung im positiven Sinne wieder zu wachsen. Ebenso wie beim Stahl hängt beim Eisen die Zunahme der positiven Spannung mit der Bildung von Eisenoxydhydrat zusammen; Aehnliches gilt auch vom Zink.

Was die Erklärung der beschriebenen Erscheinungen anlangt, so leuchtet ein, dass die Abnahme der positiven oder (was damit gleichbedeutend) Zunahme der negativen Spannung des Wassers in dem Zutritte des Sauerstoffes zur Metallfläche gerade wie bei den übrigen Metallen ihren Grund hat; dass dagegen die darauf blos beim Eisen und Zink eintretende Zunahme der positiven oder Abnahme der negativen

Digitized by Google

Spannung des Wassers nur mit der jenen beiden Metallen unter den untersuchten allein zukommenden Eigenschaft, das Wasser zu zerlegen, zusammenhängt, und sehr wahrscheinlich eine Wirkung des bei der Bildung der Oxydhydrate freiwerdenden Wasserstoffs ist.

Leider kennen wir noch nicht genau die Wirkung des Wasserstoffs auf die Metalle, ebensowenig wie die Spannung des Wasserstoffs oder wasserstoffhaltigen Wassers gegen reines Wasser; nur soviel wissen wir durch die Vorgänge der galvanischen Polarisation, dass ein mit Wasserstoff bedecktes Platin gegen gewöhnliches Platin positiv erscheint, eine Thatsache, die mit der so eben über die Vorgänge beim Zink und Eisen ausgesprochenen Ansicht im Einklange ist, indem das Platin durch das genannte Gas in derselben Weise verändert wird, wie das Zink und Eisen durch den bei der Bildung der Oxydhydrate entwickelten Wasserstoff. Vielleicht greift man nicht fehl, wenn man der aus dem Eisen und dem locker anhängenden Oxyde im Wasser gebildeten Kette eine Hauptwirkung bei der Entwickelung des Wasserstoffs zuschreibt.

Die oben angedeutete Erklärung des eigenthümlichen Verhaltens des Zinkes und Eisens dürfte durch die Vorgänge bei der Bewegung der Eisen- und Zinkstäbchen, wenn dieselben einige Zeit in Wasser eingetaucht gewesen sind, noch eine weitere Stütze erhalten. Nach S. 651 und 663 tritt nämlich durch diese Bewegung eine Aenderung der Spannung des Wassers gegen die beiden Metalle in negativer Richtung und zwar nahe um dieselbe Grösse (0,16 bis 0,17 (*Zn Cu*)) ein, d. h. beim Eisen nimmt die positive Spannung um die angegebene Grösse ab, beim Zink wächst die negative Spannung um diese Grösse. Die Spannung des Wassers gegen Zink zehn Minuten nach dem Eintauchen betrug nach S. 661 — 0,16 (*Zn Cu*); diese Spannung ist aber die bereits durch den Wasserstoff modificirte Spannung des Wassers gegen oxydirtes Zink. Nehmen wir nun an, dass durch die Bewegung des Zinks die Wasserstoffschicht gänzlich entfernt wird, so würde die während der Bewegung gemessene Spannung von — 0,32 (*Zn Cu*) die Summe der Spannungen des Wassers gegen die Oxydschicht und der Oxydschicht gegen das blanke Metall darstellen.*) Setzen wir sodann nach Bd. IX. S. 51 die Spannung des Zinks gegen die oxydirte Schicht = 0,43 (*Zn Cu*), so er-

*) Dies ist der bereits oben S. 681 für die Spannung zwischen Wasser und Zink einige Zeit nach dem Eintauchen benutzte Werth, während die Spannung $^3/_4$ Minute nach dem Eintauchen eines polirten Zinkstückes = — 0,27 (*Zn Cu*) gefunden war.

Digitized by Google

gibt sich für die Spannung des Wassers gegen oxydirtes Zink + 0,11 (*Zn Cu*), also nahe derselbe Werth wie gegen blankes Kupfer.

Gegen Eisen beträgt die Spannung des Wassers zehn Minuten nach dem Eintauchen + 0,27 (*Zn Cu*); durch Bewegung des Metalles sinkt sie nahe auf die beim Eintauchen selbst beobachtete zurück. Hiernach würde also die während der Bewegung vorhandene oberflächliche Schicht gegen das Innere des Metalles keine Spannung besitzen, was mit der beobachteten Thatsache zusammenhängt, dass die Abnahme der positiven Spannung gegen Eisen nur sehr kurze Zeit dauert und daher auch keinen beträchtlichen Werth erreicht. In wieweit das Vorhandensein mehrerer Oxydationsstufen beim Eisen hierbei von Einfluss ist, muss ich dahingestellt sein lassen.*)

d. Legirungen.

Auf S. 642 und 644 wurde angeführt, dass die Spannung an den Polen eines Elementes aus Kupfer-Wasser-Messing-Kupfer, und ebenso eines Elementes aus Kupfer-Wasser-Neusilber-Kupfer einige Zeit nach dem Eintauchen nahe gleich Null wird, und es könnte scheinen, als ob in diesem Verhalten der Legirungen gegenüber dem einen ihrer Bestandtheile eine eigenthümliche Beziehung liege. Meines Erachtens haben wir es hier nicht mit eigenthümlichen Gesetzen zu thun, sondern das angegebene Verhalten erklärt sich einfach auf Grund des Früheren.

Aus der Thatsache, dass die Spannungen an den Polen der beiden genannten Elemente genau oder nahe gleich Null sind, folgt nämlich die Spannung des Wassers in dem betrachteten Zeitpunkte gegen Messing $= -0{,}30$ (*Zn Cu*) und gegen Neusilber $= -0{,}33$ (*Zn Cu*). Diese Werthe sind aber nahe gleich der Spannung $-0{,}32$ (*Zn Cu*), welche das Wasser gegen Zink infolge der blossen Oxydation desselben unter Ausschluss von Wasserstoffentwickelung nach S. 686 annimmt. Jener der Null nahe oder gleiche Zustand wird also dadurch erzeugt, dass der leichter oxydirbare Bestandtheil der Legirung sich oxydirt; denn fügen wir zu der beim Eintauchen des Messings und Neusilbers beobachteten Spannung des Wassers + 0,08 (*Zn Cu*) die Spannung des Zinkoxyds gegen Zink

*) Auch bei den S. 667 geprüften Kohlenarten zeigte sich eine Abnahme der gleich beim Eintauchen stark negativen Spannung des Wassers; ich wage nicht zu entscheiden, ob diese Abnahme etwa in dem Eisen, das in dem Coke und Graphit in mehr oder weniger geringen Mengen vorhanden sein kann, ihren Grund hat.

Digitized by Google

$-0{,}43\,(Zn\,Cu)$ hinzu, so erhalten wir die Spannung $-0{,}35\,(Zn\,Cu)$, was mit den obigen durch die Beobachtung gegebenen Werthen nahe übereinstimmt; der kleinere Werth der Beobachtung könnte in dem gleichzeitig vorhandenen Kupfer, bei welchem durch die oxydirende Schicht eine geringere Veränderung als beim Zink hervorgebracht wird. seine Erklärung finden. Während jedoch sonst das Zink für sich das Wasser weiter zerlegt, und infolge dessen die negative Spannung des Wassers gegen dasselbe sich verringert, tritt bei dem Zinke der Legirung diese Zerlegung nicht ein.*)

e. Gefeilte Oberflächen.

Während bei den edlen Metallen und selbst beim Kupfer (S. 612) das Feilen der Oberfläche ihren Ort in der Spannungsreihe nicht merklich ändert, rücken bei gleicher Behandlung ihrer Oberfläche die Metalle vom Wismuth bis zum Aluminium (S. 604) zum Theil in beträchtlichem Grade nach dem negativen Ende hin; es geschieht dies infolge einer Oxydation, die unterstützt durch die beim Feilen erzeugte höhere Temperatur an der durch diese Operation zerrissenen Oberfläche viel rascher eintritt als an den polirten Flächen derselben Metalle.

Eben dieser Umstand, dass die Theilchen einer gefeilten Oberfläche infolge ihrer Zerrissenheit einem umgebenden flüssigen oder gasförmigen Medium viel mehr Angriffspunkte darbieten, als die obersten Theilchen einer polirten Schicht, deren Dichtigkeit vielleicht sogar infolge ihrer Behandlung noch etwas zugenommen hat, macht sich aber selbst bei den edlen Metallen, namentlich dem Silber und Platin, wenn sie in Wasser getaucht werden, dadurch geltend, dass die Aenderungen auf ihren Oberflächen unmittelbar nach dem Eintauchen so schnell eintreten, dass die Spannung des Wassers gegen sie im Augenblicke des Eintauchens bereits negativ erscheint, und schneller als bei polirtem Metall das negative Maximum erreicht.

Haben die gefeilten Oberflächen wie z. B. beim Wismuth durch den Act des Feilens eine Art Oxydation erlitten, so wird hierdurch die negative Spannung des Wassers im Momente des Eintauchens noch erhöht; so war beim Wismuth die negative Spannung des Wassers gegen das gefeilte

*) Das zu der Condensatorplatte verwandte Messing bestand nach Bd. IX. S. 48 aus ungefähr 2 Theilen Kupfer und 1 Theil Zink; eine solche Legirung fällt aber auch die Kupfersalze nicht; dies tritt erst bei viel höherem Zinkgehalte ein.

Digitized by Google

Metall grösser als gegen das polirte, und zwar nahe um ebensoviel, als jenes (das gefeilte) nach S. 603 dem negativen Ende der Spannungsreihe sich genähert hatte. Beim gefeilten Zink erscheint sogleich beim Eintauchen fast das Maximum der negativen Spannung; aber dieselbe Oberflächenbeschaffenheit, welche das rasche Steigen der negativen Spannung des Wassers bedingt, veranlasst auch unmittelbar darauf bei diesem Metall und ebenso beim Eisen ein schnelleres und stärkeres Wachsen nach der positiven Seite hin.

Die beiden S. 686 in Bezug auf ihre Spannung gegen Wasser behandelten Legirungen, das Messing und das Neusilber, zeigen im gefeilten Zustande ein von den zuvorgenannten Metallen abweichendes Verhalten: während bei den letzteren die Spannung des Wassers gegen die gefeilten Metalle schneller als bei polirten Oberflächen auf dem negativen Maximum anlangt, wird umgekehrt beim Messing und Neusilber dieses Maximum viel langsamer erreicht (S. 642 und 644). Der Grund dieser Erscheinung liegt in der Zusammensetzung dieser Metalle.

Betrachten wir speciell die Spannungen eines Elementes aus Kupfer, das bereits zehn Minuten lang eingetaucht ist, destillirtem Wasser und Messing (S. 645), so finden wir beim Eintauchen von gefeiltem Messing eine Spannung + 0,37 (*Zn Cu*), die in 1½ Minute bis + 0,19 (*Zn Cu*) gesunken ist, in der Nähe dieses Werthes einige Zeit verweilt, und dann langsam bis gegen Null herabgeht. Das erstere rasche Sinken entspricht hiernach ungefähr dem Betrage, um welchen das Kupfer durch Eintauchen in Wasser (Oxydation) sich ändert, während die gesammte Aenderung, wie sie nach 1¼ Stunde vollendet ist, dem Werthe gleichkommt, um welchen das Zink durch Oxydation seinen Ort in der Spannungsreihe ändert. Es hat also den Anschein, als ob das Kupfer, da es in grösserer Menge vorhanden ist, als das Zink, letzteres Metall anfänglich zum Theil schützt.

Eine ähnliche Bewandtniss dürfte es mit dem Verhalten des gefeilten Neusilbers gegen Wasser haben.

Merkwürdigerweise zeigen aber auch gefeiltes Gold (S. 636), Palladium und Zinn (S. 657) ein analoges Verhalten gegen Wasser, wie gefeiltes Messing und Neusilber. Obgleich das Wasser beim Eintauchen des gefeilten Zinnes bereits negativ erscheint, während es gegen polirtes Metall noch eine positive Spannung annimmt, so wächst doch später die negative Spannung des Wassers gegen gefeiltes Zinn langsamer als gegen

Digitized by Google

polirtes*); bei dem Golde und dem Palladium tritt sogar unter geeigneten Umständen im Wachsen der negativen Spannung des Wassers gegen dieselben nicht blos wie bei dem Messing ein Stillstand, sondern selbst eine Rückkehr nach der positiven Seite ein, die schliesslich nach einiger Zeit wieder in eine Bewegung nach der negativen Seite hin übergeht. Da auch chemisch reines Gold diese Erscheinung darbot, so ist natürlich an eine Erklärung derselben wie beim Messing nicht zu denken.

f. Ueber die Spannungen des Wassers gegen längere Zeit mit Wasser und Luft in Berührung gewesene Metallflächen.

Wenn unedle Metalle einige Minuten in Wasser getaucht und dann längere Zeit der Luft ausgesetzt werden, so zeigt das Wasser im Momente des Eintauchens dieser Metalle gewöhnlich eine beträchtliche negative Spannung, die bald nach dem Eintauchen abnimmt, und sich der bei frisch polirten Metallen zehn bis zwanzig Minuten nach dem Eintauchen beobachteten mehr oder weniger nähert. Dieser Vorgang hängt unzweifelhaft mit dem Umstande zusammen, dass sich auf den befeuchteten und dann der Luft ausgesetzten Metallflächen Salze (etwa kohlensaure), wenn auch öfter (wie beim Kupfer) in kaum sichtbarer Schicht gebildet haben, und solche sich dann beim Eintauchen lösen. Am deutlichsten erscheint dieser Vorgang beim Blei und Thallium, deren stark an der Luft angelaufene Oberflächen nach dem Eintauchen in Wasser wieder heller (wenngleich noch mit einer oxydirten Schicht bedeckt) erscheinen.

Einer gleichen Ursache (der Bildung von Salzen) verdanken auch diejenigen Aenderungen in der Spannung des Wassers gegen unedle Metalle, welche nach tagelanger Berührung mit lufthaltigem Wasser z. B. beim Kupfer (S. 616) eintreten, ihre Entstehung.

Eine genauere Erörterung dieser Vorgänge, die bisweilen wie beim Antimon (S. 655) einen sehr eigenthümlichen Verlauf nehmen, ist indess jetzt noch nicht möglich, weil eine solche die Kenntniss des elektrischen Verhaltens der verschiedenen Salze einerseits gegen Wasser und andererseits gegen die Metalle und ihre Oxyde erfordert.

*) Selbst nach tagelangem Eintauchen verhält sich das Wasser gegen ein gefeiltes Zinn noch weniger negativ, als gegen ein ebenso lange vom Wasser berührtes polirtes.

Digitized by Google

23. Ueber eine Fehlerquelle in dem früher zur Bestimmung der elektromotorischen Kräfte zwischen Wasser und Metallen angewandten Verfahren.

Im Vorstehenden habe ich gezeigt, dass das Wasser gegen sämmtliche Metalle im Momente der ersten Berührung positiv wird, wenn auch diese positiven Spannungen bei den unedlen Metallen nicht mehr beobachtet werden können.

Scheinbar gelangt Buff in seiner Abhandlung »Ueber die elektrische Action zwischen Metallen und Flüssigkeiten« (Annal. der Chem. und Pharmacie Bd. 42 S. 6) wenigstens in Bezug auf die Richtung der Spannung zwischen Wasser und Metallen zu demselben Resultate, indem er sagt: »Versuche mit diesem Apparate zeigten, dass reines Wasser beim Contacte mit den genannten Metallen (Platin, übergoldetes Messing, Kupfer, Eisen und Zink) positiv elektrisch wird, während die Metalle selbst eine negative Ladung annehmen.« Es bezieht sich jedoch dies von Buff angegebene Resultat nicht auf den ersten Moment der Berührung; später aber werden, wie wir gesehen haben, alle Metalle (mit Ausschluss des Eisens) positiv und das Wasser negativ; die von Buff gemachte Angabe ist also mit den von mir beobachteten Thatsachen (mit Ausnahme der Vorgänge beim Eisen) im Widerspruch. Da Buff über die Oberflächenbeschaffenheit seiner Metallplatten, sowie des mit dem Wasser in Berührung gebrachten Drahtendes, über die Dauer der Berührung und über die Art der Ableitung gar keine Mittheilung gemacht hat, so ist es unmöglich, die Resultate Buff's mittelst der Rechnung (auf Grundlage der von mir gefundenen Zahlenwerthe) in ihre so zu sagen einzelnen Bestandtheile (in die einzelnen Spannungen an den verschiedenen Contactstellen) zu zerlegen.

Wenn bei physikalischen Untersuchungen die eigenen mit vollkommeneren Instrumenten ausgeführten Beobachtungen Resultate geben, welche den bereits früher mit ungenügenderen Mitteln von anderen Forschern erhaltenen widersprechen, so halte ich es für geboten, die Ursache, welche bei den früheren Arbeiten zu einem falschen Resultate geführt hat, nachzuweisen, und ich glaubte mich auch im vorliegenden Falle dieser Forderung nicht entziehen zu dürfen. Da jedoch die Versuche Buff's wegen mangelnder Angabe der in Rechnung zu ziehenden Einzelheiten, wie bereits erwähnt, zu einer solchen Nachweisung sich nicht

Digitized by Google

eigneten, so stellte ich bei meinem Apparate eine ähnliche Anordnung her, wie sie Buff angewendet hat. Buff legte nämlich auf eine unmittelbar auf den Stift des Elektrometers aufgeschraubte metallene Condensatorplatte eine Glasplatte, die auf ihrer oberen Fläche mit einem Blatt Fliesspapier bedeckt war. Das Fliesspapier war mit Wasser befeuchtet, und wurde dann durch einen Draht aus demselben Metall wie die (untere) Condensatorplatte mit dieser letzteren in leitende Verbindung gesetzt. Sobald nach Aufhebung dieser Verbindung die Glasplatte abgehoben wurde, erzeugte die in der (unteren) Condensatorplatte freiwerdende Elektricität einen Ausschlag des Goldblättchens.

Um nun mittelst eines mit Wasser befeuchteten Papiers Messungen über die Spannungen zwischen dem Wasser und den Metallen an meiner Vorrichtung auszuführen, bedeckte ich die untere kupferne Condensatorplatte mit einer gleichgrossen Scheibe schwedischen Filtrirpapiers, befeuchtete diese Scheibe mit destillirtem Wasser, und mass dann in der gewöhnlichen Weise durch Annähern, Ableiten, und Entfernen der oberen Condensatorplatte die Spannungen des aus dem Wasser und dem Kupfer mit seinen zwei verschiedenen Oberflächen gebildeten Elementes. Diese Anordnung gleicht offenbar der von Buff gewählten, nur besitzt sie noch den Vorzug, dass die isolirende Glasplatte Buff's bei mir durch die Luftschicht ersetzt und somit jede Störung durch Reibung beim Abheben der Glasplatte von der Condensatorplatte vermieden ist.

Bei einem solchen Versuche fand ich in der oberen Condensatorplatte eine negative Ladung, und es war also ganz in dem Sinne, wie Buff angibt, das Wasser (oder richtiger gesagt die feuchte Papierscheibe) positiv und das Kupfer negativ geworden. Diese Beobachtung wies aber auch sofort mit aller Bestimmtheit auf die Ursache, welche das Kupfer negativ anstatt positiv erscheinen liess, hin; dieselbe lag in dem zur Aufnahme der Flüssigkeit dienenden Papier. Dass in ihm allein der Grund der von Buff gefundenen Resultate (wenigstens beim Kupfer) liegt, konnte nun in schlagender Weise leicht durch folgendes Verfahren nachgewiesen werden.

In die Trichtervorrichtung mit seitlicher communicirender Röhre wurde Wasser, das bereits vor vier Monaten destillirt worden, gegossen, und in die seitliche Röhre ein Kupferstück eingetaucht. Zehn Minuten nach dem Eintauchen betrug die Ladung der oberen Condensatorplatte + 0,95 Skth. Darauf wurde eine kreisförmige Scheibe schwedischen

Digitized by Google

Filtrirpapiers von genau gleichem Durchmesser mit dem Rande des Trichters auf die in demselben befindliche Flüssigkeit vollkommen glatt aufgelegt. Dies gelingt sehr leicht, wenn das Papier zwischen Glasplatten zuvor eben gepresst und dann von einer Stelle des Randes aus aufgelegt wird. Wurde die obere Condensatorplatte dieser Papierscheibe bis auf 10 Theilstriche des Ocularmikrometers genähert, so erhielt dieselbe jetzt die Ladung $-0{,}10$ Skth. Nun war zur Zeit dieser Versuche die Beschaffenheit der oberen Condensatorplatte derartig, dass sie gegen eine untere frisch polirte Kupferplatte die Ladung $+0{,}15$ Skth. zeigte, während die Spannung $(Zn\,Cu)$ 8,1 Skth. betrug. Daraus folgt die Spannung des (nicht mit Papier bedeckten) Wassers gegen Kupfer, zehn Minuten nach dem Eintauchen, in Skalentheilen $= 0{,}95 - 0{,}15 = 0{,}80$ Skth. oder (mit Berücksichtigung des Werthes für $(Zn\,Cu)$) $= -0{,}10\,(Zn\,Cu)$. Durch das Hinzufügen der Papierscheibe wurde nun der Ausschlag $-0{,}95$ in $+0{,}10$ Skth. umgewandelt; die Summe der Spannungen des feuchten Papieres gegen Wasser und des Wassers gegen Kupfer gab also eine Ladung von $0{,}10 + 0{,}15 = 0{,}25$ Skth. oder $+0{,}03\,(Zn\,Cu)$, so dass also die Spannung des feuchten Papieres gegen das Wasser $+0{,}13\,(Zn\,Cu)$ betrug.

Es mag hier unentschieden bleiben, ob dieser Einfluss des Papiers nur von den in ihm befindlichen Salzen abhängt (die von einem kreisförmigen Stück von 95mm Durchmesser hinterlassene Asche wog 2 Milligr.) oder ob die feuchte Papierfaser einen Leiter von specifischer Natur in elektromotorischer Hinsicht darstellt; so viel geht aber aus den mitgetheilten Versuchen hervor, dass das Verfahren, das Wasser vom Papier aufsaugen zu lassen, zur Bestimmung der elektromotorischen Kräfte zwischen Wasser und den Metallen durchaus ungeeignet ist, indem die beobachtete Spannung des Wassers gegen das Metall durch jene Hinzufügung des Papiers in sehr beträchtlichem Grade geändert und zwar um $0{,}13\,(Zn\,Cu)$ nach der positiven Seite hin verschoben wird.

Digitized by Google

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

Digitized by Google

H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 24 Ngr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Erste Abhandlung: über die Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 2 Thlr.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. No. II. Mit 13 Tafeln. 1857. 1 Thlr. 10 Ngr.

SECHSTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Vierter Band. Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. Preis 7 Thlr. 15 Ngr.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Zweite Abhandlung. 1857. 1 Thlr. 10 Ngr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung: über die thermoelektrischen Eigenschaften des Boracites. 1857. 24 Ngr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Dritte Abhandlung: über Elektricitätserregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen. 1858. 16 Ngr.

P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Tafeln. 1858. 2 Thlr.

G. T. FECHNER, Über ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 20 Ngr.

W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Dikotyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zellentheilung wachsendem Endosperm. Mit 27 Tafeln. 1859. 2 Thlr. 20 Ngr.

SIEBENTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Fünfter Band. Mit 30 Tafeln. hoch 4. 1861. Preis 8 Thlr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung: über das Verhalten der Weingeistflamme in elektrischer Beziehung. 1859. 20 Ngr.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Dritte Abhandlung. 1859. 2 Thlr. 12 Ngr.

G. T. FECHNER, Über einige Verhältnisse des binocularen Sehens. 1860. 1 Thlr. 26 Ngr.

G. METTENIUS, Zwei Abhandlungen: I. Beiträge zur Anatomie der Cycadeen. Mit 5 Tafeln. II. Über Seitenknospen bei Farnen. 1860. 1 Thlr.

W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Tafeln. 1861. 2 Thlr. 20 Ngr.

ACHTER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Dritter Band. Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1861. Preis 8 Thlr.

H. C. VON DER GABELENTZ, die Melanesischen Sprachen nach ihrem grammatischen Bau und ihrer Verwandtschaft unter sich und mit den Malaiisch-Polynesischen Sprachen. 1860. 2 Thlr. 20 Ngr.

G. FLÜGEL, die Classen der Hanefitischen Rechtsgelehrten. 1860. 24 Ngr.

JOH. GUST. DROYSEN, das Strafendorffische Gutachten. 1860. 24 Ngr.

H. C. VON DER GABELENTZ, über das Passivum. Eine sprachvergleichende Abhandlung. 1860. 28 Ngr.

TH. MOMMSEN, die Chronik des Cassiodorus Senator v. J. 519 n. Chr. 1861. 1 Thlr. 10 Ngr.

OTTO JAHN, über Darstellungen griechischer Dichter auf Vasenbildern. Mit 8 Tafeln. 1861. 2 Thlr.

NEUNTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Sechster Band. Mit 10 Tafeln. hoch 4. 1864. Preis 6 Thlr. 12 Ngr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfte Abhandlung. Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Erster Theil. 1861. 16 Ngr.

W. G. HANKEL, Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. 1862. 12 Ngr.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Erste Abhandlung. 1862. 3 Thlr.

G. METTENIUS, über den Bau von Angiopteris. Mit 10 Tafeln. 1863. 1 Thlr. 14 Ngr.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. 1864. 1 Thlr.

ZEHNTER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Vierter Band. Mit 2 Tafeln. hoch 4. 1865. Preis 6 Thlr.

J. OVERBECK, Beiträge zur Erkenntniss und Kritik der Zeusreligion. 1861. 28 Ngr.

G. HARTENSTEIN, Locke's Lehre von der menschlichen Erkenntniss in Vergleichung mit Leibnitz's Kritik derselben dargestellt. 1861. 1 Thlr. 10 Ngr.

WILHELM ROSCHER, Die deutsche Nationalökonomik an der Gränzscheide des sechzehnten und siebzehnten Jahrhunderts. 1862. 20 Ngr.

JOH. GUST. DROYSEN, Die Schlacht von Warschau 1656. Mit 1 Taf. 1863. 1 Thlr. 14 Ngr.

AUG. SCHLEICHER, Die Unterscheidung von Nomen und Verbum in der lautlichen Form. 1865. 24 Ngr.

J. OVERBECK, über die Lade des Kypselos. Mit 1 Tafel. 1865. 28 Ngr.

ELFTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Siebenter Band. Mit 5 Tafeln. hoch 4. 1865. Preis 5 Thlr. 20 Ngr.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Zweite Abhandlung. 1864. 3 Thlr.

G. METTENIUS, Ueber die Hymenophyllaceae. Mit 5 Tafeln. 1864. 1 Thlr. 6 Ngr.

P. A. HANSEN, Relationen einestheils zwischen Summen und Differenzen und andentheils zwischen Integralen und Differentialen. 1865. 20 Ngr.

W. G. HANKEL, elektrische Untersuchungen. Sechste Abhandlung. Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Zweiter Theil. 1865. 28 Ngr.

Leipzig, Juni 1865. **S. Hirzel.**

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE
DER
KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.
KLEINERE ABHANDLUNGEN.

BERICHTE über die Verhandlungen der Königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Erster Band. Aus den Jahren 1846 und 1847. Mit Kupfern. gr. 8. 12 Hefte.

—— Zweiter Band. Aus dem Jahre 1848. Mit Kupfern. gr. 8. 6 Hefte.
Vom Jahre 1849 an sind die Berichte der beiden Classen getrennt erschienen.

—— Mathematisch-physische Classe. 1849 (3) 1850 (3) 1851 (2) 1852 (2) 1853 (3) 1854 (3) 1855 (2) 1856 (2) 1857 (3) 1858 (3) 1859 (4) 1860 (3) 1861 (2) 1862 (1) 1863 (2).

—— Philologisch-historische Classe. 1849 (3) 1850 (4) 1851 (3) 1852 (4) 1853 (5) 1854 (6) 1855 (4) 1856 (4) 1857 (2) 1858 (2) 1859 (4) 1860 (4) 1861 (4) 1862 (1) 1863 (3) 1864, 1. u. 2.

Jedes Heft der Berichte ist einzeln zu dem Preise von 10 Ngr. zu haben.

Aus den Berichten besonders abgedruckt:

Das Edict Diocletians de pretiis rerum venalium. Herausgegeben von *Th. Mommsen*. Mit Nachträgen. 1852. 14 Ngr.

M. Valerius Probus de notis antiquis. Herausgegeben von *Th. Mommsen*. 1853. 10 Ngr.

W. ROSCHER, ein nationalökonomisches Hauptprincip der Fürstwissenschaft. 1854. 6 Ngr.

SCHRIFTEN
DER FÜRSTLICH-JABLONOWSKISCHEN GESELLSCHAFT
ZU LEIPZIG.

ABHANDLUNGEN bei Begründung der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtsfeier Leibnizens herausgegeben von der Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft. Mit dem Bildnisse von Leibniz in Medaillon und zahlreichen Holzschnitten und Kupfertafeln. 61 Bogen in hoch 4. 1846. broch. Preis 5 Thlr.

PREISSCHRIFTEN gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft.

1. H. B. GRASSMANN, Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Characteristik. Mit einer erläuternden Abhandlung von *A. F. Möbius*. hoch 4. 1847. 20 Ngr.
2. H. B. GEINITZ, das Quadergebirge oder die Kreideformation in Sachsen, mit Berücksichtigung der glaukonitreichen Schichten. Mit 1 color. Tafel. hoch 4. 1850. 16 Ngr.
3. J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die Mondfinsternisse des Almagest. hoch 4. 1851. 10 Ngr.
4. J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die wichtigeren Finsternisse, welche von den Schriftstellern des classischen Alterthums erwähnt werden. hoch 4. 1853. 20 Ngr.
5. H. B. GEINITZ, Darstellung der Flora des Hainichen-Ebersdorfer und des Flöhaer Kohlenbassins. hoch 4. Mit 14 Kupfertafeln in gr. Folio. 1854. 8 Thlr.
6. TH. HIRSCH, Danzigs Handels- und Gewerbsgeschichte unter der Herrschaft des deutschen Ordens. hoch 4. 1858. 2 Thlr. 20 Ngr.
7. H. WISKEMANN, die antike Landwirthschaft und das von Thünensche Gesetz, aus den alten Schriftstellern dargelegt. 1859. 24 Ngr.
8. K. WERNER, Urkundliche Geschichte der Iglauer Tuchmacher Zunft. 1861. 1 Thlr.
9. V. BÖHMERT, Beiträge zur Geschichte des Zunftwesens. 1862. 1 Thlr. 10 Ngr.
10. H. WISKEMANN, Darstellung der in Deutschland zur Zeit der Reformation herrschenden nationalökonomischen Ansichten. 1862. 1 Thlr. 10 Ngr.
11. E. L. ETIENNE LASPEYRES, Geschichte der volkswirthschaftlichen Anschauungen der Niederländer und ihrer Litteratur zur Zeit der Republik. 1863. 2 Thlr. 20 Ngr.

CHR. AD. PESCHECK, die Böhmischen Exulanten in Sachsen. hoch 4. 1857. 1 Thlr. 10 Ngr.

Leipzig. **S. Hirzel.**

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

Digitized by Google

3 2044 106 282 486

Digitized by Google